A integral de Riemann-Stieltjes

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

10 de Maio de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Integral de Rieman-Stieltjes: Definição e caracterização

Seja $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ não-decrescente.

Dada $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$, seja

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \alpha(b) - \alpha(a)$$

Se $f \in \mathscr{B}([a, b], \mathbb{R})$, definimos

$$\boxed{L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta\alpha_i,} \leqslant \boxed{U(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta\alpha_i,}$$

com $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ e $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Ainda, se $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha), \qquad L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leqslant M[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

Disto segue que os conjuntos

$$\{L(\mathcal{P}, f, \alpha)\,; \mathcal{P} \in \mathscr{P}_{[a,b]}\} \text{ e } \{U(\mathcal{P}, f, \alpha)\,; \mathcal{P} \in \mathscr{P}_{[a,b]}\}$$

são, respectivamente, limitado superiormente e inferiormente em $\mathbb{R}$.

Logo definimos a integral superior e a integral inferior de Riemann-Stieltjes da função f em $[a, b]$, relativamente a α, por

$$\overline{\int_a^b} f\, d\alpha = \inf_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}} U(\mathcal{P}, f, \alpha) \text{ e } \underline{\int_a^b} f\, d\alpha = \sup_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}} L(\mathcal{P}, f, \alpha)\,.$$

A função f é **Riemann-Stieltjes integrável em $[a, b]$, relativamente a** α se

$$\overline{\int_a^b} f\, d\alpha = \underline{\int_a^b} f\, d\alpha\,,$$

e o valor acima é chamado **integral de Riemann-Stieltjes de f em $[a, b]$, relativamente a função** α e será denotado por

$$\int_a^b f\, d\alpha \text{ ou } \int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$$

Denote por $\mathscr{R}(\alpha, [a, b]) = \{f \in \mathscr{B}([a, b], \mathbb{R}) : f$ é Riemann-Stieltjes integrável $[a, b]$, relativamente a $\alpha\}$.

Se $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dada por $\alpha(x) = x$, $x \in [a, b]$ a integral de Riemann-Stieltjes, relativamente a α, coincide com a integral de Riemann, ou seja,

$$\int_a^b f \, d\alpha = \int_a^b f(x) dx$$

pois, neste caso, $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Note que $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ só precisa ser não-decrescente em $[a, b]$, para podermos falar na integral de Riemann-Stieltjes de funções $f \in \mathscr{B}([a, b], \mathbb{R})$ relativamente a α.

Vamos supor, daqui em diante, que

$$\alpha(b) > \alpha(a). \tag{1}$$

Caso contrário, a integral de Rieman-Stieltjes de f relativamente a α seria nula para toda $f \in \mathscr{B}([a, b], \mathbb{R})$.

A seguir passaremos a investigar em que situações existe a integral de Riemann-Stieltjes, relativamente à função α, para uma função limitada, a valores reais, definida no intervalo $[a, b]$.

Definição (Refinamento)

Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{P}^* \in \mathscr{P}_{[a,b]}$, dizemos que a partição $\mathcal{P}^*$ é um **refinamento da partição** $\mathcal{P}$, *se*

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^*,$$

ou seja, todo ponto de $\mathcal{P}$ é um ponto de $\mathcal{P}^*$.

Sejam $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathscr{P}_{[a,b]}$. Definimos

$$\mathcal{P}^\star = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2. \tag{2}$$

Então $\mathcal{P}^\star \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ e $\mathcal{P}^\star$ é um refinamento comum a $\mathcal{P}_1$ e a $\mathcal{P}_2$.

Proposição

Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{P}^* \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ com $\mathcal{P}^* \supset \mathcal{P}$. Então,

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leqslant L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \tag{3}$$

$$U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha)\,. \tag{4}$$

Prova: Se $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$ não há nada a fazer. Se $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{P}^*$, seja $x^* \in \mathcal{P}^* \setminus \mathcal{P}$. Considere, inicialmente, o caso

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \{x^*\}.$$

Logo, se $\mathcal{P}$ tem n elementos, $\mathcal{P}^*$ tem $n+1$ elementos e

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \{a = x_0, x_1, \cdots, x_{i_0-1}, x_{i_0}, \cdots, x_n = b,\\
\mathcal{P}^* &= \{a = x_0, x_1, \cdots, \ x_{i_0-1}, \ x^*, x_{i_0}, \ \ \cdots, x_n \ \ = b\}\\
&= \{a = x_0^*, x_1^*, \cdots, x_{i_0-1}^*, x_{i_0}^*, x_{i_0+1}^*, \cdots, x_{n+1}^* = b\}
\end{aligned}$$

Se $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ e $m_j^* = \inf\limits_{x \in [x_{j-1}^*, x_j^*]} f(x)$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$.
$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$, $1 \leqslant i \leqslant n$ e $\Delta\alpha_j^* = \alpha(x_j^*) - \alpha(x_{j-1}^*)$,$1 \leqslant j \leqslant n+1$.

Assim,

$$L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{j=1}^{n+1} m_j^* \, \Delta\alpha_j^* - \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta\alpha_i$$
$$= m_{i_0}^* \, \Delta\alpha_{i_0}^* + m_{i_0+1}^* \, \Delta\alpha_{i_0+1}^* - m_{i_0} \, \Delta\alpha_{i_0}$$
$$= m_{i_0}^* \, \Delta\alpha_{i_0}^* + m_{i_0+1}^* \, \Delta\alpha_{i_0+1}^* - m_{i_0}[\underbrace{\alpha(x_{i_0}) - \alpha(x^*)}_{\Delta\alpha_{i_0+1}^*} + \underbrace{\alpha(x^*) - \alpha(x_{i_0-1})}_{\Delta\alpha_{i_0}^*}]$$
$$= [m_{i_0}^* - m_{i_0}][\alpha(x^*) - \alpha(x_{i_0-1})] + [m_{i_0+1}^* - m_{i_0}][\alpha(x_{i_0}) - \alpha(x^*)] \geqslant 0$$

ou seja,

$$L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \geqslant 0.$$

O caso geral segue por indução. A desigualdade para a soma superior é obtida de maneira análoga (Exercício).$\square$

Como consequência do resultado anterior temos

Teorema

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada em* $[a, b]$*. Então*

$$\underline{\int_a^b} f \, d\alpha \leqslant \overline{\int_a^b} f \, d\alpha \, . \tag{5}$$

Prova: Do resultado anteior, se $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ e $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$

$$L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) \leqslant L\,(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leqslant U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leqslant U(\mathcal{P}_2, f, \alpha).$$

e

$$\underline{\int_a^b} f \, d\alpha = \sup_{\mathcal{P}_1 \in \mathscr{P}} L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) \leqslant \inf_{\mathcal{P}_2 \in \mathscr{P}} U(\mathcal{P}_2, f, \alpha) = \overline{\int_a^b} f \, d\alpha$$

completando a prova.$\square$

Corolário

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada em $[a,b]$. Então $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $\mathcal{P} \in \mathscr{P}$, tal que

$$0 \leqslant U(\mathcal{P},f,\alpha) - L(\mathcal{P},f,\alpha) < \epsilon.$$

Prova: Note que, dado $\leqslant > 0$, se $\mathcal{P} \in \mathscr{P}$ é tal que a desigualdade acima está satisfeita,

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P},f,\alpha) &\leqslant \sup_{\mathcal{P}'\in\mathscr{P}} L(\mathcal{P}',f,\alpha) = \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \leqslant \overline{\int_a^b} f\,d\alpha \\ &= \inf_{\mathcal{P}'\in\mathscr{P}} U(\mathcal{P}',f,\alpha) \leqslant U(\mathcal{P},f,\alpha) \leqslant L(\mathcal{P},f,\alpha) + \epsilon \end{aligned}$$

e

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f\,d\alpha - \underline{\int_a^b} f\,d\alpha < \epsilon.$$

Segue que $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$.

Por outro lado, se $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$,

$$\inf_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}} U(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sup_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}} L(\mathcal{P}, f, \alpha).$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, existem partições $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathscr{P}$ tais que

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) \leqslant U(\mathcal{P}_2, f, \alpha) < \overline{\int_a^b} f \, d\alpha + \frac{\epsilon}{2} = \int_a^b f \, d\alpha + \frac{\epsilon}{2},$$

e

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \geqslant L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) > \underline{\int_a^b} f \, d\alpha - \frac{\epsilon}{2} = \int_a^b f \, d\alpha - \frac{\epsilon}{2},$$

onde $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Ou seja $0 \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon.$ □

Teorema

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é limitada e* $\epsilon > 0$ *dado*

1) *Se existe* $\mathcal{P} \in \mathscr{P}$ *tal que* $0 \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon$ *então* $0 \leqslant U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) < \epsilon$, *para todo refinamento* $\mathcal{P}^*$ *de* $\mathcal{P}$.

2) *Se* $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\}$ *é tal que* $0 \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon$ *e* $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *então*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \, \Delta\alpha_i < \epsilon \,. \tag{6}$$

e, se $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \, \Delta\alpha_i - \int_a^b f \, d\alpha \right| < \epsilon. \tag{7}$$

Prova: 1) Seja $\mathcal{P} \in \mathscr{P}$ tal que $0 \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon$ e $\mathcal{P}^*$ um refinamento de $\mathcal{P}$. O resultado segue de

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leqslant L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leqslant U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha).$$

2) Sabemos que, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, se $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ então $f(s_i), f(t_i) \in [m_i, M_i]$ e $|f(s_i) - f(t_i)| \leqslant M_i - m_i$ onde $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ e $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$. Portanto

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \, \Delta\alpha_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta\alpha_i = U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon$$

e o resultado segue.

Se $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ e $\mathcal{P} \in \mathscr{P}([a, b])$ é tal que

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leqslant \int_a^b f \, d\alpha \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) < L(\mathcal{P}, f, \alpha) + \epsilon$$

Escolhendo $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $f(t_i) \in [m_i, M_i]$

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i &\leqslant \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta\alpha_i \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i = U(\mathcal{P}, f, \alpha) < L(\mathcal{P}, f, \alpha) + \epsilon \end{aligned}$$

e o resultado segue.$\square$

Classes de Funções Riemann-Stieltjes Integráveis

Teorema

$$C([a,b]\,;\,\mathbb{R}) \subsetneq \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$$

Prova: Dado $\epsilon > 0$, escolhamos $\eta = \frac{\epsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)}$ e, como f é uniformemente contínua, seja $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $x, t \in [a,b]$, $|x-t| < \delta$ implica $|f(x)-f(t)| < \eta$.

Seja $\mathcal{P}=\{a=x_0,\cdots,x_n=b\}$ tal que $\|\mathcal{P}\|=\sup\{\Delta x_i : 1\leqslant i\leqslant n\}<\delta$.

Como f é contínua, podemos escolher $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tais que $m_i = f(t_i)$ e $M_i = f(s_i)$. Logo, $|t_i - s_i| \leqslant \Delta x_i < \delta$ e

$$|M_i - m_i| = |f(x_i) - f(t_i)| < \eta$$

e

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta\alpha_i < \eta \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \epsilon.$$

Segue que $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$. □

Teorema

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é monótona em $[a,b]$ e $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua e não-decrescente. Então $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$.

Prova: Dado $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, escolha uma partição $\mathcal{P}$ tal que

$$\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Isto é possível pois α satisfaz a propriedade do valor intermediário. Se f é não-decrescente (o outro caso é análogo). Então

$$M_i = f(x_i), \quad m_i = f(x_{i-1}) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

e portanto

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \cdot [f(b) - f(a)] < \epsilon \end{aligned}$$

se n for suficientemente grande. Segue que, $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$.$\square$

Teorema

Se $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ possui somente um número finito de pontos de descontinuidade e $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função não-decrescente que é contínua nos pontos onde f é descontínua. Então $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$.

Prova: Dado $\epsilon > 0$, se $M = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$ e $E = \{y_1, \cdots, y_k\}$ o conjunto (ordenado) das descontinuidades de f. Como α é contínua nos pontos de E, podemos cobrir E por sub-intervalos disjuntos de $[a,b]$, $I_j \ni y_j$, de extremos $u_j < v_j$, $1 \leqslant j \leqslant k$, tais que

$$\sum_{j=1}^{k} (\alpha(v_j) - \alpha(u_j)) < \epsilon.$$

Podemos escolher estes intervalos de modo que se $y_j \notin \{a,b\}$ então $y_j \in I_j = (u_j, v_j)$ (se $y_1 = a$ ($y_k = b$), $I_1 = [a, v_1)$ ($I_k = (u_k, b]$)).

O conjunto $K = [a, b] \setminus \bigcup_{j=1}^{k} (u_j, v_j)$ é compacto e f é uniformemente contínua em K. Seja $\delta > 0$ tal que $s, t \in K$, $|s - t| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \epsilon$.

Agora escolhemos uma partição $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$, da seguinte forma: $u_j, v_j \in \mathcal{P}$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Nenhum ponto de I_j pertence a $\mathcal{P}$. Se $x_{i-1} \neq u_j$, para todo $1 \leqslant j \leqslant k$, então $\Delta x_i < \delta$.

Note que $M_i - m_i \leqslant 2M$ para todo i e $M_i - m_i \leqslant \epsilon$ exceto quando x_{i-1} é algum dos u_j. Logo

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq [\alpha(b) - \alpha(a)]\epsilon + 2M\epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$.$\square$