Diferenciabildade de funções de variação limitada e Lipschitz contínuas
A integral de Riemann-Stieltjes

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

08 de Maio de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Lipschitz Continuidade e Diferenciabilidade

Lema

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função monótona, existe $E \subset [a,b]$ com $m^*(E) = 0$ tal que f é diferenciável em $[a,b] \backslash E$.

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função de variação limitada, existe $E \subset [a,b]$ com $m^*(E) = 0$ tal que f é diferenciável em $[a,b] \backslash E$.

Corolário

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I. Então f é diferenciável exceto possivelmente em um conjunto E com $m^*(E) = 0$. A função derivada $f' : I \backslash E \to \mathbb{R}$ é limitada.

Corolário

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I. Então f é diferenciável em um subconjunto denso de I.

Caracterização das funções Lipschitz que são C^1

Teorema

Seja I um intervalo aberto da reta e $g : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I. Então g é continuamente diferenciável se, e somente se, para cada $x_0 \in I$,

$$\left| \frac{g(x_0+s+h)-g(x_0+s)}{h} - \frac{g(x_0+h)+g(x_0)}{h} \right| \overset{|s|+|h|\to 0}{\longrightarrow} 0. \quad (1)$$

Prova: Se f é $C^1(I)$, existem $\theta, \theta' \in (0,1)$ tais que

$$\begin{aligned} &\left| \frac{g(x_0+s+h)-g(x_0+s)}{h} - \frac{g(x_0+h)+g(x_0)}{h} \right| \\ &= |g'(x_0+s+\theta h) - g'(x_0+\theta' h)| \overset{|s|+|h|\to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Agora mostraremos que se a g é diferenciável em todo ponto x_0 de I, (1) implica que g é continuamente diferenciável em I. De fato, de (1), dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$ e $|h| < \delta$ então

$$\left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - \frac{g(x_0 + h) + g(x_0)}{h} \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Segue que, para $|x - x_0| < \delta$,

$$|g'(x) - g'(x_0)| = \left| \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right\} \right| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

e g' é contínua em x_0. Para concluir a prova, basta mostrar que $g'(x)$ existe para cada $x \in I$.

Como g Lipschitz contínua, ela é diferenciável em um conjunto denso de pontos. Para cada $x_0 \in I, \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(x+h) - g(x) - g(x_0+h) + g(x_0)| \leqslant \frac{\epsilon}{4}|h|, \ |x - x_0| + |h| < \delta$$

e existe $x^* \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que $g'(x^*)$ existe. Logo, para $h \neq 0$ suficientemente pequeno

$$\left| \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} - g'(x^*) \right| \leqslant \frac{\epsilon}{2},$$

$$0 \leq \left\{ \overline{\lim_{h\to 0}} - \underline{\lim_{h\to 0}} \right\} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \leqslant \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, isto implica que $g'(x_0)$ existe.$\square$

Introdução: A integral de Riemann

No que se segue, vamos apresentar a integral de Riemann-Sieltjes. Dados $a<b$, seja $\mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que f é limitada$\}$.

Definição

Dizemos que $\mathcal{P}=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ é uma partição de $[a,b]$ se

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b. \tag{2}$$

Se $\Delta x_i:=x_i-x_{i-1}$, $1\leqslant i\leqslant n$, $\|\mathcal{P}\|:=\max\{\Delta x_i:1\leqslant i\leqslant n\}$ será chamada de malha da partição $\mathcal{P}$.

Se $f\in\mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$, $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$, $m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$ e chamamos de **soma superior** e **inferior** da função f relativas à $\mathcal{P}$, às somas

$$U(\mathcal{P},f)=\sum_{i=1}^{n}M_i\,\Delta x_i,\qquad L(\mathcal{P},f)=\sum_{i=1}^{n}m_i\,\Delta x_i.$$

Note que

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$
- $L(\mathcal{P}, f) \leqslant U(\mathcal{P}, f)$ pois $m_i \leqslant M_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
- $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m \leqslant m_i \leqslant M_i \leqslant M$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
- $m(b-a) \leqslant L(\mathcal{P}, f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = U(\mathcal{P}, f) \leqslant M(b-a)$
- Os conjuntos $\left\{U(\mathcal{P}, f) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}_{[a,b]}\right\}$ e $\left\{L(\mathcal{P}, f) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}_{[a,b]}\right\}$ são limitados inferiormente e superiormente, respectivamente, onde $\mathscr{P}_{[a,b]} = \{\mathcal{P} : \mathcal{P}$ é partição de $[a, b]\}$.

Definimos a **integral superior de Riemann** de f em $[a, b]$ por

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}} U(\mathcal{P}, f)$$

e a **integral inferior de Riemann** de f em $[a, b]$ por

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}} L(\mathcal{P}, f)\,.$$

Dizemos que f é **Riemann integrável em** $[a, b]$ se

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x).$$

O valor comum acima é chamado **integral de Riemann** de f em $[a, b]$ e denotado por $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

$$\mathscr{R}([a,b]) = \{f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R}) : f \text{ Riemann integrável em } [a,b]\}.$$

Nem toda função limitada é Riemann integrável. De fato, seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{para} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1, & \text{para} \quad x \in \mathbb{I} \cap [0,1]. \end{cases} \tag{3}$$

É claro que f é limitada em $[0,1]$. Mostremos que f **não** é Riemann integrável em $[0,1]$.

De fato: Se $\mathcal{P} = \{0 = x_0, x_1, \cdots, x_n = 1\} \in \mathscr{P}_{[0,1]}$, como $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = 1$ e $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = 0$,

$$U(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1,$$
$$L(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0\,\Delta x_i = 0.$$

Sendo assim,

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 1 \neq \underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0.$$

e f não é Riemann integrável em $[0, 1]$.

Integral de Rieman-Stieltjes: Definição e caracterização

A seguir apresentaremos a integral de Riemann-Stieltjes. Seja $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ não-decrescente. Claramente α é limitada em $[a, b]$.

Dada $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$, para $1 \leqslant i \leqslant n$, seja

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \geq 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

e, dada $f \in \mathscr{B}([a, b], \mathbb{R})$, defina

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta\alpha_i,$$

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta\alpha_i,$$

com $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, como antes.

Note que

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \alpha(b) - \alpha(a)$$

e

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i = U(\mathcal{P}, f, \alpha)$$

$$m\,[\alpha(b) - \alpha(a)] = \sum_{i=1}^{n} m\,\Delta\alpha_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i = U(\mathcal{P}, f, \alpha)$$

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i \leqslant M \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = M\,[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

onde $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, como antes.

Disto segue que os conjuntos

$$\{L(\mathcal{P}, f, \alpha)\,; \mathcal{P} \in \mathscr{P}_{[a,b]}\} \text{ e } \{U(\mathcal{P}, f, \alpha)\,; \mathcal{P} \in \mathscr{P}_{[a,b]}\}$$

são, respectivamente, limitado superiormente e inferiormente em $\mathbb{R}$. Logo definimos a integral superior e a integral inferior de Riemann-Stieltjes da função f em $[a, b]$, relativamente a α por

$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \inf_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}} U(\mathcal{P}, f, \alpha) \text{ e } \underline{\int_a^b} f\,d\alpha = \sup_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}} L(\mathcal{P}, f, \alpha)\,.$$

A função f é **Riemann-Stieltjes integrável em $[a, b]$, relativamente a** α se

$$\overline{\int_a^b} f \, d\alpha = \underline{\int_a^b} f \, d\alpha \, ,$$

e o valor acima é chamado **integral de Riemann-Stieltjes de** f **em $[a, b]$, relativamente a função** α. e será denotado por

$$\int_a^b f \, d\alpha \text{ ou } \int_a^b f(x) \, d\alpha(x)$$