Diferenciabildade de funções monótonas, de variação limitada e Lipschitz contínuas

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

06 de Maio de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Medida Exterior

Se $I = (a, b)$ defina $\ell(I) = b - a$. Dado $A \subset \mathbb{R}$ existe uma família contável de intervalos abertos que cobrem A. Seja $\mathscr{U}_A$ a coleção de todas as coberturas contáveis de intervalos abertos de A.

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum \ell(I_n) : \{I_n\} \in \mathscr{U}_A \right\}$$

É claro que $m^*(\varnothing) = 0$, $m^*((a, b)) \leqslant b - a$, $m^*(\{x\}) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e que, se $A \subset B$ $m^*(A) \leqslant m^*(B)$.

Lema

$m^*[a,b] = m^*(a,b] = m^*[a,b) = m^*(a,b) = b - a.$

Lema

Se $\{A_n\}$ *é uma família contável de subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *então*

$$m^*\left(\bigcup A_n\right) \leqslant \sum m^*(A_n)$$

Corolário

1) *Se* $A \subset \mathbb{R}$ *é enumerável,* $m^*(A) = 0$.

2) *Se* $\{A_n\}$ *é uma família contável de subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *e* $m^*(A_n) = 0$, $\forall n$ *então* $m^*(\bigcup_n A_n) = 0$

O Lema do Recobrimento de Vitali

Lema (Recobrimento de Vitali)

Seja $E \subset [a, b]$, *consequentemente* $m^*(E) \leqslant b - a$. *Se* $\mathscr{I}$ *é uma cobertura de* E *por intervalos não degenerados e tal que, dados* $x \in E$ *e* $\epsilon > 0$, *existe* $I \in \mathscr{I}$ *tal que* $x \in I$ *e* $\ell(I) < \epsilon$. *Então, dado* $\epsilon > 0$, *existe uma coleção finita e disjunta* $\{I_1, \ldots, I_N\} \subset \mathscr{I}$ *tal que*

$$m^*\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) < \epsilon.$$

Monotonicidade e Diferenciabilidade

Lema

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é monótona, então f é diferenciável exceto possivelmente em um conjunto $E \subset [a, b]$ com $m^*(E) = 0$.

Prova: Faremos apenas o caso f não-descrescente. Considere

$$\overline{d^+}f(x) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{e} \quad \overline{d^-}f(x) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

$$\underline{d^+}f(x) = \underline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{e} \quad \underline{d^-}f(x) = \underline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}.$$

Provemos que o conjunto dos $x \in [a, b]$ tais que $\underline{d^-}f(x) < \overline{d^+}f(x)$ ou $\overline{d^-}f(x) > \underline{d^+}f(x)$ tem medida exterior nula.

Vamos apenas considerar o conjunto E dos pontos $x \in [a, b]$ para os quais $\overline{d^+}f(x) > \underline{d^-}f(x)$, o caso restante será deixado como exercício. O conjunto E é a união dos conjuntos

$$E_{u,v} = \left\{x : \overline{d^+}f(x) > u > v > \underline{d_-}f(x)\right\}$$

para todos os racionais u e v. Logo, é suficiente mostrar que $m^*(E_{u,v}) = 0$. Seja $s = m^*(E_{u,v})$, escolhendo $\epsilon > 0$, $E_{u,v}$ está contido em um aberto O com $m^*(O) < s + \epsilon$.

Para cada $x \in E_{u,v}$, podemos escolher $h > 0$ arbitrariamente pequeno de modo que o intervalo $[x - h, x]$ está contido em O e

$$f(x) - f(x - h) < vh \tag{1}$$

Do Lema de Vitali, escolhemos uma coleção $\{I_1, \ldots, I_N\}$ disjunta desses intervalos cujos interiores cobrem $A \subset E_{u,v}$ com $m^*(A) > s - \epsilon$. Somando (1) para todos estes intervalos

$$\sum_{n=1}^{N} [f(x_n) - f(x_n - h_n)] < v \sum_{n=1}^{N} h_n < v\, m^*(O) < v(s + \epsilon).$$

Agora, cada $y \in A$ e k arbitrariamente pequeno $[y, y + k] \subset I_n$ e

$$f(y + k) - f(y) > uk. \tag{2}$$

Usando novamente o Lema de Vitali temos uma coleção disjunta $\{J_1, \cdots, J_M\}$ desses intervalos cuja união contém um subconjunto de A com medida exterior maior que $s - 2\epsilon$. Somando (2) para todos esses intervalos temos

$$\sum_{i=1}^{M} f(y_i + k_i) - f(y_i) > u \sum k_i > u(s - 2\epsilon).$$

Cada intervalo J_i está contido em algum intervalo I_n e, como f é crescente, se somamos para todos os i para os quais $J_i \subset I_n$, temos

$$\sum f(y_i + k_i) - f(y_i) \leqslant f(x_n) - f(x_n - h_n)$$

Logo

$$\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - f(x_n - h_n) \geq \sum_{i=1}^{M} f(y_i + k_i) - f(y_i)$$

e

$$v(s+\epsilon) > u(s-2\epsilon).$$

Como isto vale para todo $\epsilon > 0$, $vs \geq us$. Como $u > v$, $s = 0$. Isto (juntamente com o exercício) mostra que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe exceto possivelmente em um conjunto E com $m^*(E) = 0$.$\square$

Lipschitz Continuidade e Diferenciabilidade

Corolário

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I. Então f é diferenciável exceto possivelmente em um conjunto E com $m^*(E) = 0$. A função derivada $f' : I \backslash E \to \mathbb{R}$ é limitada.

Corolário

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I. Então f é diferenciável em um subconjunto denso de I.