Medida Exterior e o Teorema do Recobrimento de Vitali

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

03 de Maio de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Medida Exterior

Se $I = (a, b)$ defina $\ell(I) = b - a$. Dado $A \subset \mathbb{R}$ existe uma família contável de intervalos abertos que cobrem A. Seja $\mathscr{U}_A$ a coleção de todas as coberturas contáveis de intervalos abertos de A.

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum \ell(I_n) : \{I_n\} \in \mathscr{U}_A \right\}$$

É claro que $m^*(\varnothing) = 0$, $m^*((a, b)) \leqslant b - a$, $m^*(\{x\}) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e que, se $A \subset B$ $m^*(A) \leqslant m^*(B)$.

De fato:

- $m^*(\varnothing) = 0$ pois, para toto $\epsilon > 0$, $\varnothing \subset (-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2})$ e portanto $m^*(\varnothing) = 0 \leqslant \epsilon$.
- $m^*((a,b)) \leqslant b - a$ é imediato pois (a,b) é um subconjunto dele mesmo e da definição de medida exterior.
- Para ver que, se $A \subset B$, então $m^*(A) \leqslant m^*(B)$ simplesmente note que toda cobertura contável de intervalos abertos de B é também uma cobertura contável de intervalos abertos de A.

Lema

$m^*[a,b] = m^*(a,b] = m^*[a,b) = m^*(a,b) = b - a.$

Prova: Para ver que $m^*[a,b] = b - a$ basta ver que qualquer que qualquer cobertura contável $\{I_n\}$ de intervalos abertos de $[a,b]$ tem uma subcobertura finita $\{I_{n_k}\}_{k=1}^{N}$ onde todo $I_{n_k} \cap [a,b] \neq \emptyset$ e nenhum I_{n_k} esta contido em qualquer dos demais, $k = 1 \cdots N$. Agora

$$b - a \leqslant \sum_{k=1}^{N} \ell(I_{n_k}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n).$$

Sendo assim $m^*[a,b] \geqslant b - a$ e como $b - a) \leqslant m^*(a,b) \leqslant m^*[a,b]$ o resultado segue.

A prova de que $m^*(a,b) \geqslant b - a$ segue do fato que, para todo $\epsilon > 0$, $m^*(a,b) \geqslant m^*(a+\epsilon, b-\epsilon) = b - a - 2\epsilon$.

Os demais casos agora seguem imediatamente.$\square$

Lema

Se $\{A_n\}$ é uma família contável de subconjuntos de $\mathbb{R}$ então

$$m^*\left(\bigcup A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

Prova: Basta considerar o caso $\sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) < \infty$. Agora, dado $\epsilon > 0$, seja $\{I_k^n\}_{k=1}^{\infty}$ coleção contável intervalos abertos que cobre A_n e tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k^n) - \epsilon 2^{-n} \leqslant m^*(A_n).$$

Como $\{I_k^n : 1 \leqslant k, n \leqslant \infty\}$ é uma cobertura enumerável de $\bigcup A_n$,

$$m^*(\bigcup A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k^n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \epsilon. \square$$

Corolário

1) *Se* $A \subset \mathbb{R}$ *é enumerável,* $m^*(A) = 0$*.*

2) *Se* $\{A_n\}$ *é uma família contável de subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *e* $m^*(A_n) = 0$, $\forall n$ *então* $m^*(\bigcup_n A_n) = 0$

O Lema do Recobrimento de Vitali

Lema (Recobrimento de Vitali)

Seja $E \subset [a, b]$, consequentemente $m^*(E) \leqslant b - a$. Se $\mathscr{I}$ é uma cobertura de E por intervalos não degenerados e tal que, dados $x \in E$ e $\epsilon > 0$, existe $I \in \mathscr{I}$ tal que $x \in I$ e $\ell(I) < \epsilon$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe uma coleção finita e disjunta $\{I_1, \ldots, I_N\} \subset \mathscr{I}$ tal que

$$m^*\left(E \Big\backslash \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) < \epsilon.$$

Monotonicidade e Diferenciabilidade

Lema

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é monótona, então f é diferenciável exceto possivelmente em um conjunto $E \subset [a, b]$ com $m^*(E) = 0$.

Prova: Faremos apenas o caso f não-descrescente. Considere

$$\overline{d^+}f(x) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant \underline{d^+}f(x) = \underline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\overline{d^-}f(x) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \geqslant \underline{d^-}f(x) = \underline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Provemos que $\underline{d^+}f(x) \geqslant \overline{d^-}f(x)$ e $\underline{d^-}f(x) \geqslant \overline{d^+}f(x)$ exceto em um conjunto E com $m^*(E) = 0$, ou seja, para todo $x \in [a, b] \backslash E$,

$$\underline{d^+}f(x) \geqslant \overline{d^-}f(x) \geqslant \underline{d^-}f(x) \geqslant \overline{d^+}f(x) \geqslant \underline{d^+}f(x).$$

Desta forma, a derivada à direita e a derivada à esquerda existem e coincidem para todo $x \in [a, b] \backslash E$.

Vamos apenas considerar o conjunto E dos pontos $x \in [a,b]$ para os quais $\underline{d^-}f(x) < \overline{d^+}f(x)$. O caso restante tem prova análoga e será deixado como exercício. O conjunto E é a união dos conjuntos

$$E = \left\{x \in [a,b] : \underline{d_-}f(x) < \overline{d^+}f(x)\right\} = \bigcup_{\substack{u,v \in \mathbb{Q} \\ v<u}} E_{u,v}$$

$$\text{onde} \quad E_{u,v} = \left\{x \in [a,b] : \underline{d_-}f(x) < v < u < \overline{d^+}f(x)\right\}$$

Logo, é suficiente mostrar que $m^*(E_{u,v}) = 0$. Seja $s = m^*(E_{u,v})$ e, dado $\epsilon > 0$, $E_{u,v}$ está contido em um aberto O com $m^*(O) < s + \epsilon$.

Para cada $x \in E_{u,v}$, podemos escolher $h > 0$ arbitrariamente pequeno de modo que o intervalo $[x-h, x]$ está contido em O e

$$f(x) - f(x-h) < vh \tag{1}$$

Do Lema de Vitali, escolhemos uma coleção $\{I_1, \ldots, I_N\}$ disjunta desses intervalos cujos interiores cobrem $A \subset E_{u,v}$ com $m^*(A) > s - \epsilon$. Somando (1) para todos estes intervalos

$$\sum_{n=1}^{N} \left[f\left(x_n\right) - f\left(x_n - h_n\right)\right] < \underbrace{v \sum_{n=1}^{N} h_n}_{\substack{\| \\ v\, m^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n\right)}} < v\, m^*(O) < v(s + \epsilon).$$

Agora, cada $y \in A$ e k arbitrariamente pequeno $[y, y + k] \subset I_n$ e

$$f(y + k) - f(y) > uk. \tag{2}$$

Usando o Lema de Vitali temos uma coleção disjunta $\{J_1, \cdots, J_M\}$ desses intervalos que cobrem $B \subset A$ com $m^*(B) > m^*(A) - \epsilon > s - 2\epsilon$. Somando (2) para todos esses intervalos temos

$$\sum_{i=1}^{M} f(y_i + k_i) - f(y_i) > u \underbrace{\sum_{i=1}^{M} k_i}_{\substack{\| \\ u\, m^*\left(\bigcup_{i=1}^{M} J_i\right)}} > u(s - 2\epsilon).$$

Cada intervalo J_i está contido em algum intervalo I_n e, como f é crescente, se somamos para todos os i para os quais $J_i \subset I_n$, temos

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant M \\ J_i \subset I_n}} f(y_i + k_i) - f(y_i) \leqslant f(x_n) - f(x_n - h_n)$$

Logo

$$u(s-2\epsilon) < \sum_{i=1}^{M} f(y_i + k_i) - f(y_i) \leqslant \sum_{n=1}^{N} f(x_n) - f(x_n - h_n) < v(s+\epsilon)$$

e, para todo $\epsilon > 0$,

$$u(s - 2\epsilon) < v(s + \epsilon).$$

Segue que, $us \leqslant vs$. Como $u > v$, concluímos que $s = 0$. Isto mostra que $m^*(E_{u,v}) = 0$ e consequentemente $m^*(E) = 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe exceto possivelmente em um conjunto E com $m^*(E) = 0$. $\square$

Diferenciabilidade de funções monótonas, BV e Lipschiz

Corolário

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I. Então f é diferenciável exceto possivelmente em um conjunto E com $m^*(E) = 0$.

Corolário

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I. Então f é diferenciável em um subconjunto denso de I.