Derivadas: Teoremas fundamentais

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

26 de Abril de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Derivada a direita e monotonicidade

Teorema

Se $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \leqslant 0$ ($D^+f(x) \geqslant 0$) para todo $x \in [a, b)$ e $f(a) = 0$ então $f(x) \leqslant 0$ ($f(x) \geqslant 0$) em $[a, b)$.

Prova: Suponha primeiramente que $D^+f(x) < 0$ para todo $x \in [a, b)$. Se o resultado é falso, existe ao menos um $x \in (a,b)$ tal que $f(x) > 0$. Seja $x_0 = \inf\{x \in (a, b) : f(x) > 0\}$.

Da continuidade de f, $f(x_0) = 0$ e da definição de x_0 existe uma seqüência $x_n \in (x_0, b)$ tal que $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ e $f(x_n) > 0$. Assim

$$D^+f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geqslant 0$$

o que é uma contradição. Logo, $f(x) \leqslant 0$ para todo $x \in [a, b)$.

Agora consideramos o caso geral $D^+f(x) \leqslant 0$ para todo $x \in [a, b)$. Neste caso consideramos a função auxiliar $f_\epsilon(x) = f(x) - \epsilon(x - a)$ e temos que $f_\epsilon(x) \leqslant 0$ para todo $x \in [a, b)$ e para todo $\epsilon > 0$.

Sendo assim $f(x) \leqslant \epsilon(x - a)$, para todo $x \in [a, b)$ e $\epsilon > 0$. Disto segue que para todo $x \in [a, b)$, $f(x) \leqslant 0$.

O caso restande será deixado como exercício. $\square$

A hipótese de continuidade não pode ser retirada como estabelece o exercício abaixo.

Exercício

Encontre uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é diferenciável à direita, tal que $D^+f(x) < 0$ para todo $x \neq 0$, $D^+f(0) = 0$, f é positiva para $x > 0$ e negativa para $x < 0$ ($f(x) \overset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$).

Corolário

Se $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \leqslant 0$ para todo $x \in [a, b)$ então f é não-crescente em $[a, b)$.

Prova: Se $a \leqslant c < d < b$ seja $g : [c, b) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - f(c)$ e $D^+g(x) \leqslant 0$ para todo $x \in [c, b)$. Segue do teorema que $g(x) \leqslant 0$ para todo $x \in [c, b)$. Em particular $g(d) = f(d) - f(c) \leqslant 0.\square$

Corolário

Se $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b)$ então f é não-decrescente em $[a, b)$.

Prova: Exercício.

Exercício

Enuncie e prove resultados semelhantes aos anteriores para a derivada à esquerda.

A derivada tem a propriedade do valor intermediário

Teorema (Darboux)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é diferenciável com $f'(a) \neq f'(b)$ então, para todo C entre $f'(a)$ e $f'(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = C$.

Prova: Suponha que $f'(a) < 0 < f'(b)$. Segue que, para x próximo a a em $[a, b]$, $f(x) < f(a)$ e para x próximo a b em $[a, b]$, $f(x) < f(b)$. Logo, o ponto de mínimo (que existe pelo Teorema de Weierstrass) c de f ocorre em (a, b) e portanto $f'(c) = 0$. Para o caso geral consideramos

- Se $f'(a) < C < f'(b)$, $g(x) = f(x) - C \cdot x$.
- Se $f'(a) > C > f'(b)$, $g(x) = C \cdot x - f(x)$.

A derivada não tem descontinuidades de primeira espécie

Teorema

Se I é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável então f' não tem descontinuidades de primeira espécie.

Prova: Se a é um ponto de acumulação à direita de I e $L^+ = \lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$ existe, mostremos que $L^+ = f'(a)$.

De modo análogo (exercício), se a é um ponto de acumulação à esquerda de I e $L^- = \lim\limits_{x \to a^-} f'(x)$ existe, mostre que $f'(a) = L^-$.

Se $L^+ > f'(a)$ e $C \in (f'(a), L^+)$ existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) > C$ para todo $x \in (a, a+\delta)$. Escolhendo $b \in (a, a+\delta)$ temos que $f'(b) > C > f'(a)$ o que está em contradição com o Teorema de Darboux pois este implica a existência de $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = C$. Logo, $f'(a) \geqslant L^+$.

Se $f'(a) > L^+$ e $C \in (L^+, f'(a))$ existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) < C$ para todo $x \in (a, a+\delta)$. Escolhendo $b \in (a, a+\delta)$ temos que $f'(b) < C < f'(a)$ o que está em contradição com o Teorema de Darboux pois este implica a existência de $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = C$. Logo, $f'(a) \leqslant L^+$. Segue que $L^+ = f'(a)$.$\square$

O Teorema do Valor Médio e suas Conseqüências

O Teorema do Valor Médio é um dos Teoremas teoremas fundamentais das funções diferenciáveis em intervalos. A sua demonstração decorre do seguinte resultado:

Theorem (Teorema do Valor Médio de Cauchy)

Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas que são differenciáveis em (a, b), existe $c \in (a, b)$ para o qual

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Proof: Se

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

h é contínua em $[a, b]$, differenciável em (a, b) e

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b).$$

Para provar o teorema temos que mostrar que $h'(c) = 0$ para algum $c \in (a, b)$. Se h é constante isto vale para todo $c \in (a, b)$. Se $h(x) > h(a)$ para algum $x \in (a, b)$, seja c um ponto $[a, b]$ no qual h atinge o seu máximo. Como $h(a) = h(b)$, $c \in (a, b)$ e $h'(c) = 0$. Se $h(x) < h(a)$ para algum $x \in (a, b)$, escolhemos c em $[a, b]$ para o qual h atinge o seu mínimo. Exatamente como antes $c \in (a, b)$ e $f'(c) = 0$.$\square$

O resultado a seguir é um corolário imediato da prova do teorema anterior.

Corolário (de Rolle)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é contínua em* $[a, b]$ *e diferenciável em* (a, b) *e* $f(a) = f(b)$, *então existirá* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Corolário (do Valor Médio)

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é contínua em* $[a,b]$ *e diferenciável em* (a,b), *então existe* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a),$$

ou seja

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Prova: Basta tomar $g(x) = x$ no Teorema anterior.

Os fatos a seguir são conseqüências do Teorema do Valor Médio.

Corolário

Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *é diferenciável*

(a) *Se* $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, b)$, *então* f *não-decrescente em* (a, b).

(b) *Se* $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, *então* f *crescente em* (a, b).

(c) *Se* $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, *então* f *é constante em* (a, b).

(d) *Se* $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a, b)$, *então* f *não-crescente em* (a, b).

(e) *Se* $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, *então* f *decrescente em* (a, b).

Prova: Para todos os casos note que, para quaisquer $x_1, x_2 \in (a, b)$, do Teorema do Valor Médio, existe $\bar{x}$ entre x_1 e x_2 tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\bar{x})(x_2 - x_1) . \square$$

Observação (Teorema da Função Inversa)

Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ é C^1 e $f'(x_0) \neq 0$ então, existe $\delta > 0$ tal que $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ é injetora $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = J$ é um intervalo aberto, e $f^{-1} : J \to I$ é continuamente diferenciável com

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Regra de L'Hospital

Teorema

Sejam f e g são diferenciáveis em (a,b), e $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$, onde $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ e

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \to a} A. \tag{1}$$

Se

$$f(x) \xrightarrow{x \to a} 0 \ e \ \ g(x) \xrightarrow{x \to a} 0 \tag{2}$$

ou se

$$g(x) \xrightarrow{x \to a} +\infty \tag{3}$$

então

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \to a} A.$$

O resultado permanece válido se $x \to b$, ou se $g(x) \to -\infty$.

Prova: Primeiramente consideramos o caso $-\infty \leqslant A < +\infty$. Se $q > r > A$, de (1) existe $c \in (a, b)$ tal que, se $a < x < c$ então

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r$$

Se $a < x < y < c$, do Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe $t \in (x, y)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r. \tag{4}$$

Se (2) vale, vazendo $x \to a$ na desigualdade acima

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leqslant r < q \quad (a < y < c) \tag{5}$$

Se (3) vale, mantendo y fixo in (4), podemos escolher $c_1 \in (a, y)$ tal que $g(x) > g(y)$ e $g(x) > 0$ se $a < x < c_1$. Multiplicando (4) por $[g(x) - g(y)]/g(x)$, obtemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \quad (a < x < c_1).$$

Usando (3), existe $c_2 \in (a, c_1)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} < q \quad (a < x < c_2) \tag{6}$$

Assim, (5) ou (6) mostram que, para qualquer $q > A$ existe c_2 tal que $\frac{f(x)}{g(x)} < q$ se $a < x < c_2$. Do mesmo modo, $-\infty < A \leqslant +\infty$ e $p < A$, podemos encontrar c_3 tal que

$$p < \frac{f(x)}{g(x)} \quad (a < x < c_3)\,.$$

Disto segue o resultado.$\square$

Teorema de Taylor

Theorem

Se $n \in \mathbb{N}^*$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função* $n - 1$ *vezes diferenciável em* $[a, b]$ *e* n *vezes diferenciável em* (a, b) *com* $f^{(n-1)} : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua. Sejam* $\alpha, \beta \in [a, b]$, $\alpha \neq \beta$ *e*

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t - \alpha)^k$$

Então existe ξ *entre* α *e* β *tal que*

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(\beta - \alpha)^n.$$

Para $n = 1$, teste é o teorema do valor médio. Em geral o teorema mostra como aproximar f por polinômios e fornece uma maneira de estimar o erro se conhecermos limitações para $\left|f^{(n)}(\xi)\right|$.

Prova: Seja M o número definido por

$$f(\beta) = P(\beta) + M(\beta - \alpha)^n.$$

Fazendo

$$g(t) = f(t) - P(t) - M(t - \alpha)^n \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Precisamos mostrar que $n!M = f^{(n)}(\xi)$ para algum ξ entre α e β. Segue facilmente que

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!M \quad (a < t < b).$$

Para completar a prova basta mostrar que $g^{(n)}(\xi) = 0$ para algum ξ entre α e β. Como $P^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$, $k = 0, \ldots, n-1$, temos

$$g(\alpha) = g'(\alpha) = \cdots = g^{(n-1)}(\alpha) = 0.$$

Nossa escolha de M implica que $g(\beta) = 0$ e, do Teorema do Valor Médio, $g'(x_1) = 0$ para algum x_1 entre α e β. Como $g'(\alpha) = 0$, de modo semelhante, $g''(x_2) = 0$ para algum x_2 entre α e x_1. Depois de n chegamos a conclusão que $g^{(n)}(x_n) = 0$ para algum x_n entre α e x_{n-1}, isto é, entre α e β. $\square$