

# Derivadas

Alexandre Nolasco de Carvalho  
Universidade de São Paulo  
São Carlos SP, Brazil

24 de Abril de 2024

**Primeiro Semestre de 2024**

# Definição

## Definição (Derivada)

Sejam  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $p \in D_f$  um ponto de acumulação de  $D_f$ . Se existir o limite  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = L \in \mathbb{R}$ , diremos que  $L$  é a **derivada** de  $f$  em  $p$  e escreveremos

$$f'(p) = L = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}.$$

## A função derivada

Já definimos a derivada de  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  em pontos  $p \in D_f$  que também são pontos de acumulação de  $D_f$ . Sendo assim, se

$$D_{f'} = \left\{ x \in D_f : x \text{ é um ponto de acumulação de } D_f \right.$$

$$\left. \text{e } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ existe.} \right\} \subset D_f$$

definimos a função  $f' : D_{f'} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad x \in D_{f'}.$$

A função  $f'$  é dita **função derivada** ou simplesmente **derivada** de  $f$ .

Agora provamos que diferenciabilidade implica continuidade:

### Teorema

*Se  $f$  for diferenciável em  $p \in D_f$ , então  $f$  será contínua em  $p$ .*

**Prova:** Recorde que  $p \in D_f$  é um ponto de acumulação de  $D_f$ .  
Vamos mostrar que  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$  ou que  $\lim_{x \rightarrow p} (f(x) - f(p)) = 0$ .

Escrevemos, para  $x \neq p$ ,

$$f(x) - f(p) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p).$$

Assim

$$\lim_{x \rightarrow p} (f(x) - f(p)) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot \lim_{x \rightarrow p} (x - p) = f'(p) \cdot 0 = 0.$$

Portanto  $f$  é contínua em  $p$ .  $\square$

**Observação:** Note que não vale a recíproca. A função  $f(x) = |x|$  é contínua em  $x = 0$  mas não é diferenciável em  $x = 0$ .

### Exemplo (Critério Negativo)

*Se  $f$  não é contínua em  $p$  então  $f$  não é diferenciável em  $p$ .*

### Exemplo

A função  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1, \\ 2 & x > 1 \end{cases}$  é diferenciável em  $x = 1$ ?

**Solução:** Como

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x),$$

$f(x)$  não é contínua em  $x = 1$ , logo não é diferenciável em  $x = 1$ .

## Derivadas de Ordens Superiores

Seja  $f$  uma função derivável em  $D_{f'}$ . A função  $f' : D_{f'} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **derivada** de  $f$  ou **derivada primeira** de  $f$ .

Então, podemos definir a derivada de  $f'$ , que será chamada **derivada segunda** de  $f$ . Neste caso,

$$(f')'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},$$

quando o limite existir. Escrevemos  $f'' = f^{(2)} = (f')'$  para denotar a derivada segunda de  $f$ .

Para  $n \in \mathbb{N}^*$ , a **derivada n-ésima** de  $f$  será denotada por  $f^{(n)}$ , quando esta existir.

# Fórmulas e Regras de Derivação

## Teorema (Fórmulas de Derivação)

$$(a) \quad f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0,$$

$$(b) \quad f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1},$$

$$(c) \quad f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1},$$

$$(d) \quad f(x) = \text{sen } x \Rightarrow f'(x) = \text{cos } x,$$

$$(e) \quad f(x) = \text{cos } x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen } x,$$

$$(f) \quad f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x,$$

$$(g) \quad f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

**Prova:** A afirmativa (a) é trivial.

Prova do item (b). Lembremos que

$$y^n - x^n = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + yx^{n-2} + x^{n-1}).$$

Então,

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{y^n - x^n}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} (y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + yx^{n-2} + x^{n-1}) = nx^{n-1}.$$

Prova do item (c). Fazendo  $u = \sqrt[n]{y}$  e  $v = \sqrt[n]{x}$  temos, da continuidade de  $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ ,  $y \rightarrow x \Rightarrow u \rightarrow v$ . Assim

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x}}{y - x} = \lim_{u \rightarrow v} \frac{u - v}{u^n - v^n} = \frac{1}{nv^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$



Prova do item (d).

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{2 \operatorname{sen} \left( \frac{y-x}{2} \right) \cos \left( \frac{y+x}{2} \right)}{y - x} = \cos x.$$

Prova do item (e). Análoga ao item (d).

Prova do item (f).

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

pois,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$

Prova do item (g).

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right).$$

Fazendo  $u = \frac{h}{x}$  temos que para  $h \rightarrow 0$ ,  $u \rightarrow 0$ , assim

$$\lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x},$$

pois,  $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r = e.$

# Propriedades da Derivada

## Teorema (Propriedades da Derivada)

Sejam  $f$  e  $g$  funções diferenciáveis em  $p$  e  $k$  uma constante. Então

(a)  $kf$  será diferenciável em  $p$  e

$$(kf)'(p) = kf'(p), \text{ (Multiplicação por constante)}$$

(b)  $f + g$  será derivável em  $p$  e

$$(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p), \text{ (Derivada da Soma)}$$

(c)  $fg$  será derivável em  $p$  e

$$(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p), \text{ (Derivada do Produto)}$$

(d)  $\left(\frac{f}{g}\right)$  será derivável em  $p$ , se  $g(p) \neq 0$  e, neste caso, teremos

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}, \text{ (Derivada do Quociente).}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = f'(p)$  e  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p} = g'(p)$ , temos

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow p} \frac{kf(x) - kf(p)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p} k \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = k \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = kf'(p).$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow p} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(p)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{(f(x) - f(p)) + (g(x) - g(p))}{x - p}$$
$$= \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} + \lim_{x \rightarrow p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p} = f'(p) + g'(p).$$

(c) Note que  $g$  é contínua em  $p$ . Logo  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = g(p)$  e

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)g(x) - f(p)g(p)}{x-p} &= \lim_{x \rightarrow p} \left( \frac{f(x) - f(p)}{x-p} g(x) + f(p) \frac{g(x) - g(p)}{x-p} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x-p} \lim_{x \rightarrow p} g(x) + f(p) \lim_{x \rightarrow p} \frac{g(x) - g(p)}{x-p} \\ &= f'(p)g(p) + f(p)g'(p)\end{aligned}$$

(d) Como  $g$  é contínua em  $p$  e  $g(p) \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(p)}$ , e

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow p} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(p)}{g(p)}}{x-p} &= \lim_{x \rightarrow p} \left( \frac{f(x)g(p) - f(p)g(x)}{x-p} \frac{1}{g(x)g(p)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow p} \left( \frac{(f(x) - f(p))g(p) - f(p)(g(x) - g(p))}{x-p} \frac{1}{g(x)g(p)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow p} \left( \left( \frac{f(x) - f(p)}{x-p} g(p) - f(p) \frac{g(x) - g(p)}{x-p} \right) \frac{1}{g(x)g(p)} \right) \\
 &= \left( \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x-p} g(p) - f(p) \lim_{x \rightarrow p} \frac{g(x) - g(p)}{x-p} \right) \lim_{x \rightarrow p} \frac{1}{g(x)g(p)} \\
 &= (f'(p)g(p) - f(p)g'(p)) \frac{1}{g(p)^2}.
 \end{aligned}$$

# A Regra da Cadeia

A Regra da Cadeia nos fornece uma maneira de calcular a derivada da função composta  $h = f \circ g$  em termos das derivadas de  $f$  e de  $g$ .

## Teorema (Regra da Cadeia)

Sejam  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciáveis com  $\text{Im}(g) \subset D_f$ . Se  $g$  é diferenciável em  $p$ ,  $g(p)$  é ponto de acumulação de  $D_f$ ,  $f$  é diferenciável em  $g(p)$  e  $h = f \circ g$ , então  $h$  é diferenciável em  $p$  e

$$h'(p) = f'(g(p))g'(p). \quad (1)$$

**De fato:** Faça  $q = g(p)$ . Sejam  $\sigma_g$  e  $\sigma_f$  definidas em vizinhanças de 0 com  $\lim_{h \rightarrow 0} \sigma_g(h) = 0$  e  $\lim_{k \rightarrow 0} \sigma_f(k) = 0$  tais que

$$g(p+h) = g(p) + [g'(p) + \sigma_g(h)]h \text{ e}$$

$$f(q+k) = f(q) + [f'(q) + \sigma_f(k)]k.$$

Fazendo  $k = g(p+h) - g(p) = [g'(p) + \sigma_g(h)]h$  temos  $g(p+h) = q+k$  e

$$\begin{aligned} f(g(p+h)) &= f(q+k) = f(q) + [f'(q) + \sigma_f(k)]k \\ &= f(q) + [f'(q) + \sigma_f(k)][g'(p) + \sigma_g(h)]h \\ &= f(g(p)) + f'(g(p))g'(p)h \\ &\quad + [\sigma_f(g(p+h) - g(p))[g'(p) + \sigma_g(h)] + f'(q)\sigma_g(h)]h \end{aligned}$$

Agora, se  $\sigma_{f \circ g}(h) = [\sigma_f(g(p+h) - g(p))[g'(p) + \sigma_g(h)] + f'(q)\sigma_g(h)]$  temos que  $\lim_{h \rightarrow 0} \sigma_{f \circ g}(h) = 0$ .  $\square$



## Derivada da Função Inversa

Seja  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que tem inversa,  $D_{f^{-1}} = \text{Im}(f)$  e  $f^{-1} : D_{f^{-1}} \rightarrow \mathbb{R}$ . Então, para todo  $x \in D_{f^{-1}}$ ,

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Vimos que se  $f$  é contínua (em um compacto),  $f^{-1}$  é contínua.

Se, além disso,  $f$  e  $f^{-1}$  forem deriváveis, pela Regra da Cadeia,

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1.$$

Logo,  $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$  e

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Para estudar a diferenciabilidade de  $f^{-1}$  usamos o resultado a seguir.

### Proposição (Derivada de funções inversas)

*Seja  $f$  injetiva,  $p$  um ponto de acumulação de  $\text{Im}(f)$ . Se  $f$  for diferenciável em  $q = f^{-1}(p)$  e  $f^{-1}$  é contínua em  $p$ , então  $f^{-1}$  é diferenciável em  $p$  se, e somente se,  $f'(f^{-1}(p)) \neq 0$ . Neste caso*

$$(f^{-1})'(p) = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}.$$

**De fato:** Se  $f'(f^{-1}(p)) \neq 0$ , como  $f^{-1}$  é contínua em  $p$ ,  
 $\lim_{h \rightarrow 0} f^{-1}(p+h) = f^{-1}(p)$ . Usando  $f(f^{-1}(x)) = x$ ,  $x \in D_{f^{-1}}$ , temos

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(p) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(p+h) - f^{-1}(p)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{h}{f^{-1}(p+h) - f^{-1}(p)}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(p+h)) - f(f^{-1}(p)))}{f^{-1}(p+h) - f^{-1}(p)}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}\end{aligned}$$

Por outro lado, se  $f^{-1}$  é diferenciável em  $p$ , da regra da cadeia aplicada a  $f \circ f^{-1}$  temos  $f'(f^{-1}(p)) \cdot (f^{-1})'(p) = 1$  e  $f'(f^{-1}(p)) \neq 0$ .  $\square$

## Exemplo

Se  $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ , então  $g'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$ ,  $2 \leq n \in \mathbb{N}$ .

Recorde que,  $x > 0$  se  $n$  for par e  $x \neq 0$  se  $n$  for ímpar.

**Solução:** Note que  $g(x) = x^{\frac{1}{n}} = f^{-1}(x)$  onde  $f(u) = u^n$ . Então

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{\frac{n-1}{n}})} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

## Exemplo

Mostre que a função  $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  definida por  $f(x) = \text{sen}x$ ,  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , é bijetora.

**De fato:** Já sabemos  $f$  é contínua e que  $\text{Im}(f) \subset [-1, 1]$ .

Como  $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$  e  $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ , do teorema do valor intermediário que  $\text{Im}(f) \supset [-1, 1]$  e que  $f$  é sobrejetora.

Para verificar que  $f$  é injetora observamos que se  $x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $x > y$ , então  $\frac{x-y}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$  e  $\frac{x+y}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Logo

$$\text{sen}x - \text{sen}y = 2\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) > 0.$$

## Exemplo

A inversa da função  $f(x) = \sin x$ , para  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , é a função  $g(x) = \arcsen x$ , para  $x \in [-1, 1]$ . Qual é a derivada de  $g(x)$ ?

**Solução:** Aplicando a Proposição 1.

$$\arcsen'x = \frac{1}{\cos(\arcsen x)}.$$

Agora,  $1 = \cos^2(\arcsen x) + \sin^2(\arcsen x) = \cos^2(\arcsen x) + x^2$ ,  
logo  $\cos(\arcsen x) = \sqrt{1 - x^2}$  pois  $\cos y \geq 0$  para  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ .

Portanto,

$$\arcsen'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De maneira análoga podemos definir as funções trigonométricas inversas do  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{sec} x$  e  $\operatorname{cotg} x$ , denominadas  $\operatorname{arccos} x$ ,  $\operatorname{arctg} x$ ,  $\operatorname{arcsec} x$  e  $\operatorname{arccotg} x$ .

## Exemplo

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^3$ . Já sabemos que  $f$  é contínua.  
Como

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) \\ &= (x - y)\left(\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2\right) \\ &= (x - y)\left(\left(\frac{x}{2} + y\right)^2 + \frac{3}{4}x^2\right) \end{aligned}$$

Segue que  $x \neq y$  implica  $f(x) \neq f(y)$  e  $f$  é injetora.



Note ainda que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$  e, do teorema do valor intermediário,  $f$  é uma bijeção de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ . Segue ainda que  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua pois ela é contínua em qualquer intervalo compacto. A inversa de  $f$  é denotada por  $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ . Do teorema sobre a derivada da inversa e do fato que  $f'(x) = 3x^2$  deduzimos que  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável se, e somente se,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e, para estes valores de  $x$ ,

$$\underbrace{(f^{-1})'(x)}_{(\sqrt[3]{x})'} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{3 \underbrace{(\sqrt[3]{x})^2}_{f^{-1}(x)}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \cdot \square$$

Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que  $f$  tem um máximo (mínimo) local no ponto  $d \in D$  se existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) \leq f(d)$  ( $f(x) \geq f(d)$ ) para todo  $x \in D$ ,  $|x - d| < \delta$ . Quando a desigualdade é estrita dizemos que  $f$  tem um máximo (mínimo) local estrito. Os máximos e mínimos locais serão chamados de valores extremos e os pontos onde a função assume valores máximos ou mínimos serão chamados de pontos de máximo ou de mínimo.

Segue diretamente da definição de derivada (derivada à direita) que:

- Se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é não-decrescente (não-crescente) e é diferenciável em um ponto  $d \in D$  então,  $f'(d) \geq 0$  ( $f'(d) \leq 0$ ). Vale o mesmo resultado para funções diferenciáveis à direita.
- Se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável à direita (esquerda) em um ponto  $d \in D$  e  $f'(d^+) > 0$  ( $f'(d^-) > 0$ ) então existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in D$ ,  $x \in (d, d+\delta)$  ( $x \in (d-\delta, d)$ ) implica  $f(x) > f(d)$  ( $f(x) < f(d)$ ).
- Se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável à direita (esquerda) em um ponto  $d \in D$  e  $f'(d^+) < 0$  ( $f'(d^-) < 0$ ) então existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in D$ ,  $x \in (d, d+\delta)$  ( $x \in (d-\delta, d)$ ) implica  $f(x) < f(d)$  ( $f(x) > f(d)$ ).

- Se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável em um ponto  $d \in D$ ,  $d$  é ponto de acumulação a direita e a esquerda e  $f'(d) > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x, y \in D$ ,  $d - \delta < x < d < y < d + \delta \Rightarrow f(x) < f(d) < f(y)$ .
- Se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável em um ponto  $d \in D$ ,  $d$  é um ponto de acumulação a direita e a esquerda e  $f$  tem um valor extremo local em  $d$  então  $f'(d) = 0$ .