Abertos, Fechados, Compactos e Conexos

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

22 de Abril de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Descontinuidades

Definição

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. Um ponto de descontinuidade ou uma descontinuidade da função f é um ponto $d \in D$ no qual f não é contínua. É claro que descontinuidades são pontos de acumulação de D.

Uma descontinuidade d é de primeira espécie se o limite $\lim\limits_{x \to d^+} f(x)$ (se d é um ponto de acumulação à direita) existe e o limite $\lim\limits_{x \to d^-} f(x)$ (se d é um ponto de acumulação à esquerda) existe.

Uma descontinuidade é de segunda espécie se não é de primeira.

Escreveremos $f(d^{\pm}) = \lim\limits_{x \to d^{\pm}} f(x)$ quando o limite existir.

Teorema

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função monótona.

1) *f não admite descontinuidades de segunda espécie.*
2) *Se $f(D)$ é denso em algum intervalo I, então f é contínua.*

Prova: 1)Dado $d \in D$, como f é monótona, $\lim_{x\to d^+} f(x)$ (se d é ponto de acumulação à direita) existe e $\lim_{x\to d^-} f(x)$ (se d é ponto de acumulação à esquerda) existe.

2) Se f é não-decrescente e $f(d^+) \neq f(d^-)$ então, para $x \in D$ com $x > d$, $f(x) \geqslant f(d^+)$ e para $x \in D$, $x < d$, $f(x) \leqslant f(d^-)$ logo $I \supset [f(d^-), f(d^+)]$ e ou $(f(d^-), f(d))$ ou $(f(d), f(d^+))$ é um intervalo aberto e não vazio que não contém pontos de $f(D)$ contradizendo a densidade de $f(D)$ em I. Segue que $f(d^+) = f(d^-)$ e f é contínua em d. O caso f não-crescente é análogo. $\square$

Teorema

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função cujas descontinuidades são todas de primeira espécie o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável. Em particular, se f é monótona o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável.

Prova: Seja $\sigma(x)=\max\{|f(x)-f(x^-)|, |f(x)-f(x^+)|\}$, $x \in D$. O conjunto das descontinuidade de f é $S = \{x \in D : \sigma(x) > 0\}$. Se $S_n = \{x \in D : \sigma(x) > \frac{1}{n}\}$, $S = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$.

Mostremos que os pontos de S_n são todos isolados.

Seja $s \in S_n$. Se s é um ponto de acumulação à direita de D. Da definição de $f(s^+)$, dado $n \in \mathbb{N}^*$ existe $\delta > 0$ tal que $s < x < s + \delta$, $x \in D$, implica $f(s^+) - \frac{1}{4n} < f(x) < f(s^+) + \frac{1}{4n}$. Logo, para cada $x \in (s, s+\delta) \cap D$, $\sigma(x) \leqslant \frac{1}{2n}$.

Semelhantemente, se s é um ponto de acumulação à esquerda de D, existe $\delta > 0$ tal que $\sigma(x) \leqslant \frac{1}{2n}$, para cada $x \in (s-\delta, s) \cap D$. Segue que s é um ponto isolado de S_n.

Disto segue que S_n é enumerável e portanto S é enumerável. $\square$

Semicontinuidade Superior e Inferior

Recorde que, se $D \subset \mathbb{R}$, c é um ponto de acumulação de D e $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função que é limitada em uma vizinhança de $c \in \mathbb{R}$, definimos

$$\overline{\lim_{x\to c}}\, f(x) := \lim_{r\to 0^+} \sup\{f(x) : x \in D,\ 0 < |x - c| < r\} \quad \text{e}$$
$$\underline{\lim_{x\to c}}\, f(x) := \lim_{r\to 0^+} \inf\{f(x) : x \in D,\ 0 < |x - c| < r\}.$$

Definimos também, para qualquer ponto $c \in D^-$,

$$\overline{\mathrm{Lim}}_{x\to c}\, f(x) := \lim_{r\to 0^+} \sup\{f(x) : x \in D,\ |x - c| < r\} \quad \text{e}$$
$$\underline{\mathrm{Lim}}_{x\to c}\, f(x) := \lim_{r\to 0^+} \inf\{f(x) : x \in D,\ |x - c| < r\}$$

Definição

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e $c \in D$. Então, f é semicontínua superiormente em c se

$$f(c) = \overline{Lim}_{x \to c} f(x) \qquad (\ f(c) \geqslant \overline{\lim}_{x \to c} f(x)\ )$$

e f é semicontínua inferiormente em c se

$$f(c) = \underline{Lim}_{x \to c} f(x) \qquad (\ f(c) \leqslant \underline{\lim}_{x \to c} f(x)\ ).$$

Se f é semicontínua superiormente (inferiormente) em todos os pontos de D dizemos simplesmente que f é semicontínua superiormente (inferiormente).

Teorema

Se $f : D \to \mathbb{R}$ é semicontínua superiormente (inferiormente), se e somente se, dado $k \in \mathbb{R}$, existe um aberto O_k de $\mathbb{R}$ tal que

$$O_k \cap D = \underbrace{\{x \in D : f(x) < k\}}_{=f^{-1}((-\infty,k))} \quad (O_k \cap D = \underbrace{\{x \in D : f(x) > k\}}_{=f^{-1}((k,\infty))})$$

Prova: Para $c \in D$ com $f(c) < k$, da definição da semicontinuidade superior, existe $r_c > 0$ tal que $f(x) < k$ para todo $x \in D$, $|x - c| < r_c$. Seja $I_c = (c - r_c, c + r_c)$ e defina

$$O_k = \cup_{c \in f^{-1}((-\infty,k))} I_c$$

É claro que $O_k \cap D = f^{-1}((-\infty, k))$.

Para a recíproca note que, se $p \in D$ e $k > f(p)$ então $p \in f^{-1}((-\infty, k)) = \mathcal{O}_k \cap D$ e existe $\delta > 0$ tal que $(p-\delta, p+\delta) \cap D \subset f^{-1}((-\infty, k))$. Segue que

$$\underline{\mathrm{Lim}}_{x \to p} f(x) \leqslant k,$$

para todo $k > f(p)$. Logo $\underline{\mathrm{Lim}}_{x \to p} f(x) \leqslant f(p)$ e o resultado segue.

Demonstre a characterização da semicontinuidade inferior como exercício. $\square$

Definição

Definição (Derivada)

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função e* $p \in D_f$ *um ponto de acumulação de* D_f*. Se existir o limite* $\lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = L \in \mathbb{R}$, *diremos que* L *é a* **derivada** *de* f *em* p *e escreveremos*

$$f'(p) = L = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}.$$

Se f admitir derivada $f'(p)$ em p, diremos que f é **derivável** ou **diferenciável em** p.

Se f admitir derivada em todo ponto de $A \subset D_f$, diremos que f é **derivável** ou **diferenciável em** $A \subset D_f$.

Se $A = D_f$, diremos simplesmente que f é **derivável** ou **diferenciável**.

Se $f : D \to \mathbb{R}$ possui derivada num ponto $d \in D$ que é também um ponto de acumulação de D, para $h \in \mathbb{R}$ tal que $d + h \in D$, excrevemos (resto da aproximação)

$$r(h) = f(d + h) - f(d) - f'(d)h.$$

Nesses pontos, definimos $r : \{h \in \mathbb{R} : d + h \in D_f\} \to \mathbb{R}$ e escrevemos $f(d + h) = f(d) + f'(d)h + r(h)$ e, fazendo $\sigma(h) = \frac{r(h)}{h}$, $h \neq 0$, $\lim\limits_{h \to 0} \sigma(h) = 0$.

É fácil ver que f é diferenciável em d se, e somente se, existe função σ com $\lim\limits_{h\to 0} \sigma(h) = 0$ tal que $f(d+h) = f(d) + [f'(d) + \sigma(h)]h$.

Definição (Derivada à Direita e à Esquerda)

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$ um ponto de acumulação à direita de D_f. Se existir o limite $\lim\limits_{x \to p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = L^+ \in \mathbb{R}$, *diremos que L^+ é a* **derivada à direita** *de f em p e escreveremos*

$$f'(p^+) = L^+ = \lim_{x \to p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}. \; .$$

De maneira semelhante definimos a derivada à esquerda.

A função derivada

Já definimos a derivada de $f : D_f \to \mathbb{R}$ em pontos $p \in D_f$ que também são pontos de acumulação de D_f. Sendo assim, se

$$D_{f'} = \Big\{ x \in D_f : \ x \text{ é um ponto de acumulação de } D_f \text{ e } \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ existe.} \Big\} \subset D_f$$

definimos a função $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$ por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad x \in D_{f'}.$$

A função f' é dita **função derivada** ou simplesmente **derivada** de f.

Agora provamos que diferenciabilidade implica continuidade:

Teorema

Se f for diferenciável em $p \in D_f$, então f será contínua em p.

Prova: Recorde que $p \in D_f$ é um ponto de acumulação de D_f. Vamos mostrar que $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ ou que $\lim_{x \to p} (f(x) - f(p)) = 0$.

Escrevemos.

$$f(x) - f(p) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p).$$

Assim

$$\lim_{x \to p} (f(x) - f(p)) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot \lim_{x \to p} (x - p) = f'(p) \cdot 0 = 0.$$

Portanto f é contínua em p. $\square$

Observação: Note que não vale a recíproca. A função $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$ mas não é diferenciável em $x = 0$.

Exemplo (Critério Negativo)

Se f não é contínua em p então f não é diferenciável em p.

Exemplo

A função $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 1, \\ 2 & x > 1 \end{cases}$ *é diferenciávelem $x = 1$?*

Solução: Como

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \neq 2 = \lim_{x \to 1^+} f(x),$$

$f(x)$ não é contínua em $x = 1$, logo não é diferenciável em $x = 1$.

Derivadas de Ordens Superiores

Seja f uma função derivável em $D_{f'}$. A função $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$ é dita **derivada** de f ou **derivada primeira de** f.

Então, podemos definir a derivada de f', que será chamada **derivada segunda de** f. Neste caso,

$$(f')'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},$$

quando o limite existir. Escrevemos $f'' = f^{(2)} = (f')'$ para denotar a derivada segunda de f.

Para $n \in \mathbb{N}^*$, a **derivada n-ésima de** f será denotada por $f^{(n)}$, quando esta existir.

Fórmulas e Regras de Derivação

Teorema (Fórmulas de Derivação)

Se $k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, são válidas as fórmulas de derivação a seguir

(a) $f(x) = k \Rightarrow \ f'(x) = 0,$

(b) $f(x) = x^n \ \Rightarrow \ f'(x) = nx^{n-1},$

(c) $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \ \Rightarrow \ f'(x) = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1},$

(d) $f(x) = \mathrm{sen}\ x \ \Rightarrow \ f'(x) = \cos x,$

(e) $f(x) = \cos x \ \Rightarrow \ f'(x) = -\mathrm{sen}\ x,$

(f) $f(x) = e^x \Longrightarrow \ f'(x) = e^x,$

(g) $f(x) = \ln x \ \Longrightarrow \ f'(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$

Prova: A afirmativa (a) é trivial.

Prova do item (b). Lembremos que

$$y^n - x^n = (y-x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}).$$

Então,

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{y^n - x^n}{y-x} = \lim_{y\to x} (y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}) = nx^{n-1}.$$

Prova do item (c). Fazendo $u = \sqrt[n]{y}$ e $v = \sqrt[n]{x}$ temos, da continuidade de $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$, $y \to x \Rightarrow u \to v$. Assim

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x}}{y-x} = \lim_{u\to v} \frac{u-v}{u^n - v^n} = \frac{1}{nv^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Prova do item (d).

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{\operatorname{sen} y-\operatorname{sen} x}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{2sen\left(\frac{y-x}{2}\right)\cos\left(\frac{y+x}{2}\right)}{y-x}=\cos x.$$

Prova do item (e). Análoga ao item (d).

Prova do item (f).

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x$$

pois, $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1.$

Prova do item (g).

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right).$$

Fazendo $u = \dfrac{h}{x}$ temos que para $h \to 0$, $u \to 0$, assim

$$\lim_{h\to 0} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(1+u\right)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x},$$

pois, $\displaystyle\lim_{u\to 0} \left(1+u\right)^{\frac{1}{u}} = \lim_{r\to\infty} \left(1+\frac{1}{r}\right)^{r} = e.$

Propriedades da Derivada

Teorema (Propriedades da Derivada)

Sejam f e g funções diferenciáveis em p e k uma constante. Então

(a) kf será diferenciável em p e

$$(kf)'(p) = kf'(p),$$ **(Multiplicação por constante)**

(b) $f+g$ será derivável em p e

$$(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p),$$ **(Derivada da Soma)**

(c) fg será derivável em p e

$$(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p),$$ **(Derivada do Produto)**

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)$ será derivável em p, se $g(p) \neq 0$ e, neste caso, teremos

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2},$$ **(Derivada do Quociente)**.

Como $\boxed{\lim\limits_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=f'(p)}$ e $\boxed{\lim\limits_{x\to p}\frac{g(x)-f(p)}{x-p}=g'(p)}$, temos

(a) $\boxed{\lim\limits_{x\to p}\frac{kf(x)-kf(p)}{x-p}=\lim\limits_{x\to p}k\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=k\lim\limits_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=kf'(p).}$

(b) $\boxed{\lim\limits_{x\to p}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(p)}{x-p}}=\boxed{\lim\limits_{x\to p}\frac{(f(x)-f(p)+(g(x)-g(p))}{x-p}}$

$$=\boxed{\lim_{x\to p}\frac{(f(x)-f(p)}{x-p}+\lim_{x\to p}\frac{(g(x)-g(p))}{x-p}}\boxed{=f'(p)+g'(p).}$$

(c) Note que g é contínua em p. Logo $\lim_{x \to p} g(x) = g(p)$ e

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)g(x) - f(p)g(p)}{x - p} = \lim_{x \to p} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} g(x) + f(p) \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \right)$$

$$= \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \lim_{x \to p} g(x) + f(p) \lim_{x \to p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p}$$

$$= f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$$

(d) Como g é contínua em p e $g(p) \neq 0$, $\lim_{x \to p} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(p)}$, e

$$\begin{aligned}
\boxed{\lim_{x \to p} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(p)}{g(p)}}{x - p}} &= \boxed{\lim_{x \to p} \left(\frac{f(x)g(p) - f(p)g(x)}{x - p} \frac{1}{g(x)g(p)} \right)} \\
&= \boxed{\lim_{x \to p} \left(\frac{(f(x) - f(p))g(p) - f(p)(g(x) - g(p))}{x - p} \frac{1}{g(x)g(p)} \right)} \\
&= \boxed{\lim_{x \to p} \left(\left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} g(p) - f(p) \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \right) \frac{1}{g(x)g(p)} \right)} \\
&= \boxed{\left(\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} g(p) - f(p) \lim_{x \to p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \right) \lim_{x \to p} \frac{1}{g(x)g(p)}} \\
&= \boxed{(f'(p)g(p) - f(p)g'(p)) \frac{1}{g(p)^2}}.
\end{aligned}$$

A Regra da Cadeia

A Regra da Cadeia nos fornece uma maneira de calcular a derivada da função composta $h = f \circ g$ em termos das derivadas de f e de g.

Teorema (Regra da Cadeia)

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ diferenciáveis com $\mathrm{Im}(g) \subset D_f$. Se g é diferenciável em p, $g(p)$ é ponto de acumulação de D_f, f é diferenciável em $g(p)$ e $h = f \circ g$, então h é diferenciável em p e

$$\boxed{h'(p) = f'(g(p))g'(p).} \tag{1}$$

De fato: Faça $q = g(p)$. Sejam σ_g e σ_f definidas em vizinhanças de 0 com $\lim_{h\to 0}\sigma_g(h) = 0$ e $\lim_{k\to 0}\sigma_f(k) = 0$ tais que

$$g(p+h) = g(p) + [g'(p) + \sigma_g(h)]h \text{ e}$$
$$f(q+k) = f(q) + [f'(q) + \sigma_f(k)]k.$$

Fazendo $k = g(p+h) - g(p) = [g'(p) + \sigma_g(h)]h$ temos $g(p+h) = q + k$ e

$$\begin{aligned} f(g(p+h)) &= f(q+k) = f(q) + [f'(q) + \sigma_f(k)]k \\ &= f(q) + [f'(q) + \sigma_f(k)][g'(p) + \sigma_g(h)]h \\ &= f(g(p)) + f'(g(p))g'(p)h \\ &\quad + [\sigma_f(g(p+h) - g(p))[g'(p) + \sigma_g(h)] + f'(q)\sigma_g(h)]h \end{aligned}$$

Agora, se $\sigma_{f\circ g}(h) = [\sigma_f(g(p+h) - g(p))[g'(p) + \sigma_g(h)] + f'(q)\sigma_g(h)]$ temos que $\lim_{h\to 0}\sigma_{f\circ g}(h) = 0.$ □

Derivada da Função Inversa

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função que tem inversa, $D_{f^{-1}} = Im(f)$ e $f^{-1} : D_{f^{-1}} \to \mathbb{R}$. Então, para todo $x \in D_{f^{-1}}$,

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Vimos que se f é contínua (em um compacto), f^{-1} é contínua.

Se, além disso, f e f^{-1} forem deriváveis, pela Regra da Cadeia,

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1.$$

Logo, $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ e

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Para estudar a diferenciabilidade de f^{-1} usamos o resultado a seguir.

Proposição (Derivada de funções inversas)

Seja f injetiva, p um ponto de acumulação de $Im(f)$. Se f for diferenciável em $q = f^{-1}(p)$ e f^{-1} é contínua em p, então f^{-1} é diferenciável em p se, e somente se, $f'(f^{-1}(p)) \neq 0$. Neste caso

$$\boxed{(f^{-1})'(p) = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}.}$$

De fato: Se $f'(f^{-1}(p)) \neq 0$, como f^{-1} é contínua em p, $\lim_{h \to 0} f^{-1}(p+h) = f^{-1}(p)$. Usando $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in D_{f^{-1}}$, temos

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(p) &= \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(p+h) - f^{-1}(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{h}{f^{-1}(p+h)-f^{-1}(p)}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(p+h))-f(f^{-1}(p))}{f^{-1}(p+h)-f^{-1}(p)}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}\end{aligned}$$

Por outro lado, se f^{-1} é diferenciável em p, da regra da cadeia aplicada a $f \circ f^{-1}$ temos $f'(f^{-1}(p)) \cdot (f^{-1})'(p) = 1$ e $f'(f^{-1}(p)) \neq 0$. $\square$

Exemplo

Se $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$, *então* $g'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$, $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$.

Recorde que, $x > 0$ *se* n *for par e* $x \neq 0$ *se* n *for ímpar.*

Solução: Note que $g(x) = x^{\frac{1}{n}} = f^{-1}(x)$ onde $f(u) = u^n$. Então

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{\frac{n-1}{n}})} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Exemplo

Mostre que a função $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ *definida por* $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *é bijetora.*

De fato: Já sabemos f é contínua e que $\operatorname{Im}(f) \subset [-1, 1]$.

Como $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$ e $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, do teorema do valor intermediário que $\operatorname{Im}(f) \supset [-1, 1]$ e que f é sobrejetora.

Para verificar que f é injetora observamos que se $x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $x > y$, então $\frac{x-y}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $\frac{x+y}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Logo

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) > 0.$$

Exemplo

A inversa da função $f(x) = sen\ x$, para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, é a função $g(x) = \operatorname{arcsen} x$, para $x \in [-1, 1]$. Qual é a derivada de $g(x)$?

Solução: Aplicando a Proposição 1.

$$\boxed{\mathrm{arcsen}'x = \frac{1}{\cos(\mathrm{arcsen}\ x)}.}$$

Agora, $\boxed{1=\cos^2(\mathrm{arcsen} x)+\mathrm{sen}^2(\mathrm{arcsen} x)=\cos^2(\mathrm{arcsen}\ x)+x^2,}$ logo $\cos(\mathrm{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$ pois $\cos y \geqslant 0$ para $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.
Portanto,

$$\boxed{\mathrm{arcsen}'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

De maneira análoga podemos definir as funções trigonométricas inversas do $\cos x$, $\mathrm{tg} x$, $\sec x$ e $\mathrm{cotg}\ x$, denominadas $\mathrm{arccos}\ x$, $\mathrm{arctg}\ x$, $\mathrm{arcsec}\ x$ e $\mathrm{arccotg}\ x$.