Abertos, Fechados, Compactos e Conexos

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

19 de Abril de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Continuidade e Abertos

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset A$ diremos que B é aberto em A se para cada $b \in B$ existe um $r_b > 0$ tal que $A \cap (b - r_b, b + r_b) \subset B$.

Teorema

Seja $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$. A função f é contínua se, e somente se, para todo aberto $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\mathcal{O})$ é aberto em D.

Continuidade: Conexos e Compactos

Teorema

Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então $f(I)$ é um intervalo.

Teorema

Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto $f : K \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então $f(K)$ é compacto.

Outra Pova: Seja $\{y_n\}$ uma seqüência em $f(K)$. Então existe seqüência $\{x_n\}$ em K tal que $y_n = f(x_n)$. Como K é compacto, $\{x_n\}$ tem uma subseqüência $\{x_{\phi(n)}\}$ ($\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente) convergente com limite $\bar{x} \in K$. Como $x_{\phi(n)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}$, $y_{\phi(n)} = f(x_{\phi(n)}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\bar{x})$ e $\{y_n\}$ tem uma subseqüência convergente com limite em $f(K)$. Logo, $f(K)$ é compacto.$\square$

Teorema (Weierstrass)

Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ é contínua, existem $x_1, x_2 \in K$ tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in K$.

De fato: Como $f(K)$ é compacto, $L = \sup\{y : y \in f(K)\}$ e $\ell = \inf\{y : y \in f(K)\}$ pertencem a $f(K)$. Logo, existem $x_1, x_2 \in K$ tais que $f(x_1) = \ell \leq f(x) \leq L = f(x_2)$, para todo $x \in K$. $\square$

Teorema

Se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto, $f : K \to \mathbb{R}$ é contínua e injetiva e $C = f(K)$ então $f^{-1} : C \to \mathbb{R}$ é contínua.

De fato: Se $C \ni c_n = f(k_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c = f(k) \in C$ então $\{k_n\}$ é uma seqüência em K e portanto limitada.

Para qualquer $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente e tal que $\{k_{\phi(n)}\}$ é convergente com limite k_ϕ temos que

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{f(k_{\phi(n)})}_{=c_{\phi(n)}} = f(k_\phi) = c = f(k) \text{ e } k_\phi = k.$$

Logo, o conjunto dos valores de aderência da seqüência $\{k_n\}$ é o conjunto unitário $\{k\}$ e portanto $f^{-1}(c_n) = k_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} k = f^{-1}(c)$. Isto mostra que $f^{-1} : C \to \mathbb{R}$ é contínua.

Continuidade, Injetividade e Monotonicidade

Teorema

Se I é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua e injetiva então f é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Prova: Sejam $a, b, c \in I$ com $a < b < c$. O resultado segue mostrando que ou $f(a) < f(b) < f(c)$ ou $f(a) > f(b) > f(c)$. Provaremos isto usando o Teorema do Valor Intermedário.

$\boxed{\mathbf{f(a) < f(c)}:}$ Se $f(b) < f(a)$ existe $d \in (b, c)$ tal que $f(d) = f(a)$ e se $f(b) > f(c)$ existe $d \in (a, b)$ tal que $f(d) = f(c)$. Em qualquer dos casos isto contradiz a injetividade. Logo $f(a) < f(b) < f(c)$.

$\boxed{\mathbf{f(a) > f(c)}:}$ Se $f(b) > f(a)$ existe $d \in (b, c)$ tal que $f(d) = f(a)$ e se $f(b) < f(c)$ existe $d \in (a, b)$ tal que $f(d) = f(c)$. Em qualquer dos casos isto contradiz a injetividade. Logo $f(a) > f(b) > f(c)$. $\square$

Teorema

Se $f : D \to \mathbb{R}$ é tal que, dado $\epsilon > 0$ existe função contínua $g : D \to \mathbb{R}$ tal que $|g(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in D$, então f é contínua.

Prova: Seja $d \in D$, $\epsilon > 0$ e $g : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $|f(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{3}$, $\forall x \in D$. Como g é contínua em d, existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $|x - d| < \delta$ implica $|g(x) - g(d)| < \frac{\epsilon}{3}$. Logo, $x \in D$, $|x - d| < \delta$ implica

$$|f(x)-f(d)|\leqslant|f(x)-g(x)|+|g(x)-g(d)|+|g(d)-f(d)|<\epsilon.\square$$

Continuidade Uniforme

Definição (Continuidade Uniforme)

Se $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função, dizemos que f é uniformemente contínua se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in D$, $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Note que:

- Nem toda função contínua é uniformemente contínua.

Exemplo: $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ não é unformemente contínua em $(0,\infty)$ mas é uniformemente contínua em $[r,\infty)$ para qualquer $r > 0$.

- Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função tal que existem contantes $C > 0$ e $\theta \in (0,1]$ tais que $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\theta$, $\forall x, y \in D$. É fácil ver que f é uniformemente contínua. Dizemos que f é Hölder contínua se $\theta \in (0,1)$ e Lipschitz contínua se $\theta = 1$.

Exemplo: $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ é Hölder contínua com expoente $\theta = \frac{1}{2}$.

Teorema

Se $f : D \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua então f leva seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy.

De fato: Seja $\{x_n\}$ uma seqüência de Cauchy em D (note que o limite desta seqüência não precisa estar em D). Da continuidade uniforme, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $x, y \in D$ e $|x - y| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \delta$ para todo $n, m \geqslant N$. Segue que $|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$, para todo $n, m \geqslant N$. Isto mostra que $\{f(x_n)\}$ é de Cauchy.$\square$

Corolário

Se $f : D \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua então para cada ponto de acumulação d' de D existe o limite $\lim\limits_{x \to d'} f(x)$.

Teorema

Se $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ é compacto e $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ é contínua então $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.

Prova: Dado $\epsilon > 0$ e $\kappa \in \mathcal{K}$, existe $\delta_\kappa > 0$ tal que, se $x \in \mathcal{K}$ e $x \in (\kappa - 2\delta_\kappa, \kappa + 2\delta_\kappa)$ então $|f(x) - f(\kappa)| < \frac{\epsilon}{2}$. Se $I_\kappa := (\kappa - \delta_\kappa, \kappa + \delta_\kappa)$, como $\cup_{\kappa \in \mathcal{K}} I_\kappa \supset \mathcal{K}$ e $\mathcal{K}$ é compacto existem $n \in \mathbb{N}^*$ e $\kappa_1, \cdots, \kappa_n$ tais que $\cup_{i=1}^n I_{\kappa_i} \supset \mathcal{K}$. Seja $\delta = \min\{\delta_{\kappa_1}, \cdots, \delta_{\kappa_n}\}$.

Logo, se $\kappa, x \in \mathcal{K}$ e $|\kappa - x| < \delta$ então, $\kappa \in I_{\kappa_i}$, para algum $i \in \{1, \cdots, n\}$ e $|\kappa - \kappa_i| < \delta_{\kappa_i}$ e $|x - \kappa_i| \leqslant |x - \kappa| + |\kappa - \kappa_i| < 2\delta_{\kappa_i}$. Desta forma $|f(\kappa) - f(\kappa_i)| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|f(x) - f(\kappa_i)| < \frac{\epsilon}{2}$. Da desigualdade triangular temos $|f(\kappa) - f(x)| < \epsilon$.$\square$

Teorema

Toda função uniformemente contínua $f:D\to\mathbb{R}$ admite uma única extensão contínua a D^-. Esta extensão é uniformemente contínua.

Prova: Se $x\in D$ defina $\bar{f}(x)=f(x)$ e se d' é ponto de acumulação de D que não pertence a D defina $\bar{f}(d') = \lim\limits_{x\to d'} f(x)$. Mostremos que $\bar{f}$ é uniformemente contínua.

Dado $\epsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $x,y\in D, |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\epsilon}{2}$.

Agora, se $\bar{x},\bar{y}\in D^-$, $|\bar{x}-\bar{y}|<\delta$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ são seqüências em D, $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}$ e $y_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{y}$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $|x_n-y_n|<\delta$, $\forall n\geqslant N$.
Logo, $|f(x_n)-f(y_n)|<\frac{\epsilon}{2}$, $\forall n\geqslant N$ e, passando o limite,
$|\bar{f}(\bar{x})-\bar{f}(\bar{y})|\leq\frac{\epsilon}{2}<\epsilon$.

Qualquer outra extensão contínua coincide com f em D e portanto nos pontos de acumulação de D que não pertencem a D. $\square$

Descontinuidades

Definição

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. Um ponto de descontinuidade ou uma descontinuidade da função f é um ponto $d \in D$ no qual f não é contínua. É claro que descontinuidades são pontos de acumulação de D.

Uma descontinuidade d é de primeira espécie se o limite $\lim\limits_{x \to d^+} f(x)$ (se d é um ponto de acumulação à direita) existe e o limite $\lim\limits_{x \to d^-} f(x)$ (se d é um ponto de acumulação à esquerda) existe.

Uma descontinuidade que não é de primeira espécie é de segunda espécie.

Escreveremos $f(d^{\pm}) = \lim\limits_{x \to d^{\pm}} f(x)$ quando o limite existir.

Teorema

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função monótona.

1) *f não admite descontinuidades de segunda espécie.*

2) *Se $f(D)$ é denso em algum intervalo I, então f é contínua.*

Prova: 1)Dado $d \in D$, como f é monótona, $\lim_{x \to d^+} f(x)$ (se d é ponto de acumulação à direita) existe e $\lim_{x \to d^-} f(x)$ (se d é ponto de acumulação à esquerda) existe.

2) Se f é não-decrescente e $f(d^+) \neq f(d^-)$ e para todo $x \in D$, $x > d$, $f(x) \geqslant f(d^+)$ e para todo $x \in D$, $x < d$, $f(x) \leqslant f(d^-)$ logo $I \supset [f(d^-), f(d^+)]$ e ou $(f(d^-), f(d))$ ou $(f(d), f(d^+))$ é um intervalo aberto e não vazio que não contém pontos de $f(D)$ contradizendo a densidade de $f(D)$ em I. Segue que $f(d^+) = f(d^-)$ e f é contínua em d. O caso f não-crescente é análogo.$\square$

Teorema

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função cujas descontinuidades são todas de primeira espécie o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável. Em particular, se f é monótona o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável.

Prova: Seja $\sigma(x) = \max\{|f(x) - f(x^-)|, |f(x) - f(x^+)|\}$, $x \in D$. O conjunto das descontinuidade de f é $S = \{x \in D : \sigma(x) > 0\}$. Se $S_n = \{x \in D : \sigma(x) > \frac{1}{n}\}$, $S = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$.

Mostremos que os pontos de S_n são todos isolados.

Seja $s \in S_n$. Se s é um ponto de acumulação à direita de D. Da definição de $f(s^+)$, dado $n \in \mathbb{N}^*$ existe $\delta > 0$ tal que $s < x < s + \delta$, $x \in D$, implica $f(s^+) - \frac{1}{4n} < f(x) < f(s^+) + \frac{1}{4n}$. Logo, para cada $x \in (s, s + \delta) \cap D$, $\sigma(x) \leqslant \frac{1}{2n}$.

Semelhantemente, se s é um ponto de acumulação à esquerda de D, existe $\delta > 0$ tal que $\sigma(x) \leqslant \frac{1}{2n}$, para cada $x \in (s - \delta, s) \cap D$. Segue que s é um ponto isolado de S_n.

Disto segue que S_n é enumerável e portanto S é enumerável. $\square$