Abertos, Fechados, Compactos e Conexos

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

15 de Abril de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Abertos, Fechados, Compactos e Conexos

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$*.*

1) *Um ponto* $a \in A$ *é interior a* A *se existe* $r > 0$ *tal que* $(a - r, a + r) \subset A$*.*

2) *O conjunto* A *é aberto se todos os seus pontos são interiores.*

3) *O conjunto* A *é fechado em* $\mathbb{R}$ *se seu complementar é aberto.*

4) *O interior* A^{o} *de* A *é o conjunto dos pontos interiores a* A*.*

5) *O fecho* $\bar{A}$ *de* A *é a interseção de todos os fechados que contém* A*.*

Teorema

Seja Λ *um conjunto e* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *uma família de conjuntos.*

1) *Se cada* A_λ *é aberto,* $\cup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ *é aberto.*

2) *Se cada* A_λ *é aberto e* Λ *é um conjunto finito,* $\cap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ *é aberto.*

3) *Se cada* A_λ *é fechado,* $\cap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ *é fechado.*

4) *Se cada* A_λ *é fechado e* Λ *é um conjunto finito,* $\cup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ *é fechado.*

Exemplo

Todo intervalo aberto é aberto. O interior de $[a,b]$ *é* (a,b). *O interior* A^{o} *de* A *é o maior aberto contido em* A. *O fecho de* A *é o menor fechado que contém* A.

Teorema

Todo subconjunto aberto A de $\mathbb{R}$ se exprime, de maneira única, como união enumerável de intervalos abertos disjuntos

Prova: Primeiramente note que se Λ é um conjunto, para cada λ, $I_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda)$ é um intervalo e $p \in \cap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ então $\cup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = (a, b)$ onde $a = \inf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ e $b = \sup_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$. De fato, é claro que $\cup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subset (a, b)$. Para provar a outra inclusão note que $p \in (a, b)$ e se $x \in (a, b)$, ou $x \leq p$ ou $x > p$. Agora,

- se $x \leq p$, do fato que $a = \inf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda < x$, existe $\mu_1 \in \Lambda$ tal que $a_{\mu_1} < x \leq p < b_{\mu_1}$.
- se $x > p$, do fato que $b = \sup_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda > x$, existe $\mu_2 \in \Lambda$ tal que $a_{\mu_2} < p < x < b_{\mu_2}$.

Em qualquer dos casos $x \in \cup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$.

Para o restante da prova, dado $x \in A$ seja I_x a união de todos os intervalos abertos contidos em A e que contém x. Segue que

1) $I_x = (a_x, b_x) \subset A$,
2) se $x, y \in A$, ou $I_x \cap I_y = I_x = I_y$ ou $I_x \cap I_y = \varnothing$ e
3) $\cup_{x \in A} I_x = A$.

Tomando, para cada intervalo desta decomposição um único racional vemos que A pode ser escrito como união enumerável de intervalos disjuntos. Para ver que esta decomposição é única basta notar que cada intervalo aberto de uma tal decomposição está contido em algum dos I_x e não pode ser distinto de I_x. $\square$

Corolário

Se I é um intervalo aberto e $I = A \cup B$ onde A e B são conjuntos abertos e disjuntos então um deses conjuntos é vazio.

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um ponto $p \in \mathbb{R}$ é aderente a A se existir seqüência $\{x_n\}$ em A tal que $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} p$.

Sabemos que se p é ponto de acumulação de A então p é aderente a A. Se p é aderente a A e p não é ponto de acumulação de A então $p \in A$. Todo ponto interior a A é aderente a A e é um ponto de acumulação de A.

Teorema

Um ponto $p \in \mathbb{R}$ é aderente a A se, e só se, $A \cap (p-\epsilon, p+\epsilon) \neq \emptyset$ para todo $\epsilon > 0$.

Corolário

Se $A \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente (inferiormente) então $\sup A$ ($\inf A$) é aderente a A.

Teorema

O fecho A^- de $A \subset \mathbb{R}$ é o conjunto $\tilde{A}$ dos pontos aderentes de A.

Prova: De fato, se $x \notin \tilde{A}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap A = \varnothing$ segue que $\tilde{A}$ é fechado e $A^- \subset \tilde{A}$. Se $x \notin A^-$ existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap A = \varnothing$ e $x \notin \tilde{A}$. $\square$

Definição

Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ com $A \subset B$. Diremos que A é denso em B se $B \subset A^-$

Teorema

Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ com $A \subset B$. São equivalentes

- *Todo ponto de B é aderente a A.*
- *Todo ponto de B é limite de uma seqüência de pontos de A.*
- *Para todo $\epsilon > 0$ e $b \in B$, $(b - \epsilon, b + \epsilon) \cap A \neq \varnothing$.*

Teorema

Todo subconjunto B de $\mathbb{R}$ contém um subconjunto A que é enumerável e denso em B.

Prova: Dado $n \in \mathbb{N}^*$ temos que $\mathbb{R} = \displaystyle\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$. Para cada $p \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$ escolha $x_{np} \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right) \cap B$ quando esta interseção for não vazia. O conjunto A desses pontos é claramente denso em B (para cada $n \in \mathbb{N}^*$ e $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $|a - b| < \frac{1}{n}$) e é enumerável (a coleção de intervalos $\left\{\left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right) : p \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N}^*\right\}$ é enumerável).$\square$

Teorema

Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado, não vazio e sem pontos isolados. Então F é não enumerável.

Prova: Sejam $x, y \in F$ distintos, $r = |x-y|/2$ e $\tilde{F}_y = F \cap (x-r, x+r)$. Segue que $\tilde{F}_y$ é não vazio e não contém pontos isolados. Seja F_y a união de $\tilde{F}_y$ com os pontos de acumulação de $\tilde{F}_y$ no conjunto $\{x-r, x+r\}$. F_y é claramente fechado e não tem pontos isolados, é limitado e $y \notin F$.

Se $F \supset \{y_1, y_2, y_3, \cdots\}$ seja F_{y_1}. Tendo escolhido $F_{y_1}, \cdots F_{y_{n-1}}$, se $y_n \notin F_{y_{n-1}}$ escolhemos $F_{y_n} = F_{y_{n-1}}$ e se $y_n \in F_{y_{n-1}}$ escolhemos F_{y_n} fechado e sem pontos isolados tal que $y_n \notin F_{y_n} \subset F_{y_{n-1}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $x_n \in F_{y_n}$. A seqüência $\{x_n\}$ é limitada e portanto tem uma subseqüência $\{x_{\phi(n)}\}$ convergente com limite $\bar{x}$. É claro que $\bar{x} \in \cap_{n\in\mathbb{N}} F_{y_n}$ e $\bar{x} \neq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Coberturas e Compactos

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ *e* Λ *um conjunto, uma coleção* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *de conjuntos é chamada uma* **cobertura de** A *se* $A \subset \cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda$*.*

Se $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *é uma cobertura de* A*,* $\Lambda' \subset \Lambda$ *e* $A \subset \cup_{\lambda'\in\Lambda'}\mathcal{A}_{\lambda'}$*,* $\{\mathcal{A}_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ *é dita uma* **subcobertura da cobertura** $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$*.*

Se os conjuntos da cobertura são todos abertos a cobertura é dita uma **cobertura aberta***.*

Teorema (Borel-Lebsegue)

Dada uma cobertura $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de $[a,b]$ onde cada I_λ é um intervalo aberto existe $\Lambda'\subset\Lambda$ finito tal que $[a,b]\subset\cup_{\lambda'\in\Lambda'}I_{\lambda'}$.

Prova: Seja $A=\{x\in[a,b]:\text{existe }\Lambda'\subset\Lambda\text{ finito com }[a,x]\subset\cup_{\lambda'\in\Lambda'}I_{\lambda'}\}$. É claro que $A\neq\varnothing$. Seja $s=\sup A$. É claro que $s\in[a,b]$ e que existe λ_s tal que $s\in I_{\lambda_s}$. Como I_{λ_s} é aberto $I_{\lambda_s}\cap A\neq\varnothing$. Segue que $s=b$ e que $[a,b]$ está contido em uma união finita de I_λ's.$\square$

Corolário

Dada uma cobertura aberta $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *de* $[a,b]$ *existe* $\Lambda' \subset \Lambda$ *finito tal que* $[a,b] \subset \cup_{\lambda'\in\Lambda'} A_{\lambda'}$.

Basta lembrar que cada aberto da cobertura pode ser escrito como união enumerável de intervalos abertos (disjuntos).

Corolário

Dada uma cobertura aberta $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *de um conjunto fechado e limitado* F *existe* $\Lambda' \subset \Lambda$ *finito tal que* $F \subset \cup_{\lambda'\in\Lambda'} A_{\lambda'}$.

De fato: Como F é fechado e limitado $F \subset [a,b]$. Como $A = F^c$ é aberto e $[a,b] \subset \cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \cup A$ temos que existe $\Lambda' \subset \Lambda$ finito tal que

$$[a,b] \subset \cup_{\lambda'\in\Lambda'} A_\lambda \cup A \quad \text{e} \quad F \subset \cup_{\lambda'\in\Lambda'} A_\lambda. \square$$

Teorema

Dado $K \subset \mathbb{R}$ são equivalentes:

1) *K é fechado e limitado.*

2) *Toda cobertura aberta de K possui uma subcobertura finita.*

3) *Todo subconjunto infinito de K possui um ponto de acumulação pertencente a K.*

4) *Toda seqüência de pontos de K possui uma subseqüência que converge para um ponto de K.*

Prova:

- 1) $\Rightarrow$ 2): Segue diretamente do corolário anterior.
- 2) $\Rightarrow$ 3): Se $A \subset K$ é infinito e não tem pontos de acumulação em K, para cada $k \in K$ existe $I_k = r_k > 0$ tal que $(k - r_k, k + r_k) \cap A = \{k\}$ ou $I_k \cap A = \emptyset$. Segue que $\cup_{k \in K} I_k \supset K$ é uma cobertura aberta sem subcobertura finita.
- 3) $\Rightarrow$ 4): Dada uma seqüência de pontos $\{k_n\}$ em K ela pode ter um número finito ou infinito de valores. Em qualquer dos casos possui uma subseqüência convergente.
- 4) $\Rightarrow$ 1): É claro que K é limitado pois caso contrário existiria uma seqüência $\{x_n\}$ em K com $x_0 \in K$ e $|x_n| \geqslant |x_{n-1}| + 1$ e esta não teria subseqüência convergente. Para ver que K é fechado simplesmente note que se $x \in K^-$ existe seqüência $x_n \in K$ tal que $x_n \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} x$, de 4), $x \in K$.$\square$

Definição

Um conjunto é compacto se é satisfaz uma das condições do teorema anterior.

Corolário (Teorema de Bolzado-Weierstrass)

Todo conjunto infinito e limitado de números reais possui um ponto de acumulação.

Corolário

Toda seqüência decrescente de compactos não-vazios tem interseção não vazia.

Continuidade e Abertos

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset A$ diremos que B é aberto em A se para cada $b \in B$ existe um $r_b > 0$ tal que $A \cap (b - r_b, b + r_b) \subset B$.

Note que.

- Todo conjunto é aberto nele mesmo.
- Se $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset A$, B é aberto em A se, e somente se, existe um aberto $\mathcal{O}_B$ de $\mathbb{R}$ tal que $B = \mathcal{O}_B \cap A$.
- Se A é aberto, $B \subset A$ é aberto em A se, e somente se, B é aberto em $\mathbb{R}$.

Recorde que, se $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função, $f^{-1}(\mathcal{O}) = \{d \in D : f(d) \in \mathcal{O}\}$.

Teorema

Seja $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$. A função f é contínua se, e somente se, para todo aberto $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\mathcal{O})$ é aberto em D.

Prova: Se $f : D \to \mathbb{R}$ é contínua, $\mathcal{O}$ é um aberto de $\mathbb{R}$ e $d \in f^{-1}(\mathcal{O})$, então $f(d) \in \mathcal{O}$ e dado $\epsilon > 0$ tal que $(f(d) - \epsilon, f(d) + \epsilon) \subset \mathcal{O}$, existe $\delta > 0$ tal que $f((d - \delta, d + \delta) \cap D) \subset (f(d) - \epsilon, f(d) + \epsilon)$. Isto mostra que $(d - \delta, d + \delta) \cap D \subset f^{-1}(\mathcal{O})$ e que $f^{-1}(\mathcal{O})$ é aberto em D.

Por outro lado de $f^{-1}(\mathcal{O})$ é aberto em D para dada $\mathcal{O}$ aberto em $\mathbb{R}$, se $d \in D$, dado $\epsilon > 0$ seja $\mathcal{O} = (f(d) - \epsilon, f(d) + \epsilon)$. Como $d \in f^{-1}((f(d) - \epsilon, f(d) + \epsilon))$ que é aberto em D existe $\delta > 0$ tal que $(d - \delta, d + \delta) \cap D \subset f^{-1}((f(d) - \epsilon, f(d) + \epsilon))$, ou seja

$$x \in D, |x - d| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(d)| < \epsilon.$$

e f é contínua em d. $\square$

Continuidade e conexos

Teorema

Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então $f(I)$ é um intervalo.

Prova: Basta notar que, dados dois pontos $f(a) \neq f(b)$ em $f(I)$ com $a < b$, tomando a restrição de f ao intervalo $[a, b]$, do teorema do valor intermediário, para todo k entre $f(a)$ e $f(b)$ existe um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$, ou seja $f(I)$ é um intervalo. $\square$

Continuidade e Compactos

Teorema

Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto $f : K \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então $f(K)$ é compacto.

Prova: Seja $\{\mathcal{O}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma cobertura aberta de $f(K)$. Como, para cada $\lambda \in \Lambda$, $f^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)$ é aberto em K existe U_λ aberto em $\mathbb{R}$ tal que $U_\lambda \cap K = f^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)$. Assim $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é uma cobertura aberta de K. Como K é compacto, existe $\Lambda' \subset \Lambda$ finito tal que $\cup_{\lambda' \in \Lambda'} U_{\lambda'} \supset K$. Segue que $\{\mathcal{O}_{\lambda'} : \lambda' \in \Lambda'\}$ é uma subcobertura finita da cobertura $\{\mathcal{O}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de $f(K)$. Isto mostra que $f(K)$ é compacto.$\square$

Outra Pova: Seja $\{y_n\}$ uma seqüência em $f(K)$. Então existe seqüência $\{x_n\}$ em K tal que $y_n = f(x_n)$. Como K é compacto, $\{x_n\}$ tem uma subseqüência $\{x_{\phi(n)}\}$ ($\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente) convergente com limite $\bar{x} \in K$. Como $x_{\phi(n)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}$, $y_{\phi(n)} = f(x_{\phi(n)}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\bar{x})$ e $\{y_n\}$ tem uma subseqüência convergente com limite em $f(K)$. Logo, $f(K)$ é compacto.$\square$

Teorema (Weierstrass)

Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ é contínua, existem $x_1, x_2 \in K$ tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in K$.

De fato: Como $f(K)$ é compacto, $L = \sup\{y : y \in f(K)\}$ e $\ell = \inf\{y : y \in f(K)\}$ pertencem a $f(K)$. Logo, existem $x_1, x_2 \in K$ tais que $f(x_1) = \ell \leq f(x) \leq L = f(x_2)$, para todo $x \in K$. $\square$

Teorema

Se $f: K \to \mathbb{R}$ é contínua e injetiva e $C = f(K)$ então $f^{-1}: C \to \mathbb{R}$ é contínua.

De fato: Se $C \ni c_n = f(k_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} c = f(k) \in C$ então $\{k_n\}$ é uma seqüência em K e portanto tem uma subseqüência convergente com limite em K. Para qualquer $\phi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente e tal que $\{k_{\phi(n)}\}$ é convergente com limite k_ϕ temos que

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{f(k_{\phi(n)})}_{=c_{\phi(n)}} = f(k_\phi) = c = f(k) \quad \text{e} \quad k_\phi = k.$$

Logo, o conjunto dos valores de aderência da seqüência $\{k_n\}$ é o conjunto unitário $\{k\}$ e portanto $f^{-1}(c_n) = k_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} k = f^{-1}(c)$. Isto mostra que $f^{-1}: C \to \mathbb{R}$ é contínua.