1.ª Prova - SMA 380 - Análise

Professor: Alexandre Nolasco de Carvalho

Questão	Nota
01.ª	
02.ª	
03.ª	
04.ª	
05.ª	
Total	

Nome: ______________________________

Número USP: ______________________________

12.05.2024

Instruções:

- Assinale todas alternativas verdadeiras com V e as falsas com F.
- Em cada questão escolha **uma alternativa** e justifique (prova ou contra-exemplo).
- Cada questão vale 2.0 pontos, desses 1.0 é o valor da justificativa do ítem escolhido.
- A prova é individual e sem consulta. Boa prova!

1.ª Questão. Escolha 05 itens dentre os 06 itens a seguir. Se $p \in \mathbb{Q}$, escrevemos $p^* = \{q \in \mathbb{Q} : q < p\}$. Se α e β são subconjuntos de $\mathbb{Q}$, dizemos que $\alpha < \beta$ se $\alpha \subsetneq \beta$. Um corte α é um subconjunto de $\mathbb{Q}$ tal que $\varnothing \subsetneq \alpha \subsetneq \mathbb{Q}$ e

$$p \in \alpha \Rightarrow p^* \cup \{p\} < \alpha.$$

ÍTEM	V OU F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	
(6)	

(1) Se α é um corte, $p, q \in \mathbb{Q}$, $p^* \leqslant \alpha$ e $\alpha \leqslant q^*$, então $p < q$.

(2) Dados dois cortes α e β com $\alpha < \beta$ existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha < r^* < \beta$.

(3) Se α é um corte e $\alpha > 0^*$, pode não haver racional positivo em α.

(4) Dados dois cortes α e β, exatamente uma das seguintes relações vale: $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$ ou $\beta < \alpha$.

(5) Seja $A \neq \varnothing$ um conjunto de cortes. Se existir um corte L tal que $a \geqslant L$, $\forall a \in A$, então A tem um maior limitante inferior.

(6) Se α é um corte defina $\beta = \{r \in \mathbb{Q} : r < -s \text{ para algum } s \notin \alpha\}$ então $\alpha + \beta = 0^*$.

2.ª Questão.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Se $\{a_n\}$ é uma seqüência e existe um número ℓ tal que, toda subseqüência de $\{a_n\}$ tem uma subseqüência convergente com limite ℓ, então $\{a_n\}$ é convergente.

(2) Se uma seqüência $\{a_n\}$ é limitada e $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ então $\{a_n\}$ é convergente.

(3) Uma seqüência $\{a_n\}$ é convergente se, e somente se o conjunto dos valores de aderência é unitário.

(4) Se $\{a_n\}$ é seqüência limitada então existe uma função $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $\{a_{\phi(n)}\}$ é convergente.

(5) se $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é injetiva e $\{a_n\}$ é convergente então $\{a_{\phi(n)}\}$ é convergente.

3.ª Questão.

ÍTEM	V OU F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Seja $\{a_n\}$ uma seqüência limitada defina $c := \overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}}$. A série $\sum a_n$ é absolutamente convergente se $c < 1$ e divergente se $c > 1$. Se $c = 1$ nada podemos concluir.

(2) Seja $\{a_n\}$ uma seqüência. Se a série $\sum |a_n|^2$ é convergente, então $\sum \frac{a_n}{n^r}$ é absolutamente convergente para todo $r > \frac{1}{2}$.

(3) Se $\{a_n\}$ é uma seqüência limitada de números reais não nulos e existe o limite $c := \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ então, a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente se $c < 1$, divergente se $c > 1$ e nada podemos afirmar se $c = 1$.

(4) Se $\{a_n\}, \{b_n\}$ são seqüências limitadas então

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + b_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n \text{ e } \underline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + b_n) \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n$$

(5) A série $\sum \frac{n^n}{1+n^n} \frac{(xn)^n}{n!}$ é convergente se $|x| < e$ e divergente se $|x| > e$.

4.ª Questão.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Seja $\sum a_n$ uma série convergente e b_n uma seqüência **não-decrescente** e limitada. Então $\sum a_n b_n$ é convergente.

(2) Se $\{a_n\}$ é uma seqüência não-crescente de números reais não-negativos que não é infinitésima então $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ não é convergente e

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n - \underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

(3) Seja $\{a_n\}$ uma seqüência não-crescente. A série $\sum a_n$ é absolutamente convergente se e somente se a série $\sum 3^n a_{3^n}$ é absolutamente convergente.

(4) A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{-n^2}$ é convergente para todo inteiro positivo k.

(5) Se $\{a_n\}$ é tal que $\{|a_n|\}$ é uma seqüência decrescente e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente então $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.

5.ª Questão. LIMITES E CONTINUIDADE

ÍTEM	V OU F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to A$ uma função. Dizemos que $a \in A$ é um ponto fixo de f se $f(a) = a$. Se I é um intervalo fechado e limitado e $f : I \to I$ é contínua então f tem um ponto fixo em I.

(2) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $k \in \mathbb{R}$ é tal que $[k - f(a)].[f(b) - k] > 0$, então, existe $\bar{x} \in (a, b)$ tal que $f(\bar{x}) = k$.

(3) Seja $D \subset \mathbb{R}$, p um ponto de acumulação de D e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função limitada em uma vizinhança de p. Então $\overline{\lim\limits_{x\to p}} f(x)$ e $\underline{\lim\limits_{x\to p}} f(x)$ são valores de aderência de f e, se ℓ é um valor de aderência de f em p, então $\underline{\lim\limits_{x\to p}} f(x) \leqslant \ell \leqslant \overline{\lim\limits_{x\to p}} f(x)$.

(4) Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ e $p \in D$. A função f é contínua em p se, e somente se, para toda seqüência $\{x_n\}$ em D com $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$ existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

(5) Seja $D \subset \mathbb{R}$, p um ponto de acumulação de D e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. Se o limite $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ existe, o conjunto dos valores de aderência de f em p é unitário. A recíproca não vale.