1.ª Prova - SMA 380 - Análise - 2023

1.ª Questão. Dizemos que $\varnothing \subsetneq \alpha \subsetneq \mathbb{Q}$ é um **corte** se 1) $p \in \alpha \Rightarrow \{q \in \mathbb{Q} : q < p\} \subset \alpha$ e 2) $p \in \alpha \Rightarrow \{q \in \mathbb{Q} : q \leqslant p\} \subsetneq \alpha$. Dizemos que $\alpha < \beta$ se $\alpha \subsetneq \beta$ e, para todo $q \in \mathbb{Q}$, escrevemos $q^* = \{p \in \mathbb{Q} : p < q\}$.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Se α é um corte, $p, q \in \mathbb{Q}$, $p^* < \alpha$ e $\alpha < q^*$, então $p < q$.

(2) Se α é um corte, $\mathbb{Q} \ni r \notin \alpha$ então $\{s \in \mathbb{Q} : s > r\} \cap \alpha = \varnothing$.

(3) Exatamente uma das seguintes relações vale: $\alpha<\beta$ ou $\alpha=\beta$ ou $\beta<\alpha$.

(4) Seja $A \neq \varnothing$ um conjunto de cortes. Se existir um corte L tal que $a \leqslant L, \forall a \in A,$ então A tem um menor limitante superior.

(5) Se $\alpha > 0^*$, $\alpha^{-1} = \{p \in \mathbb{Q} : p < q^{-1} \text{ para algum } q \notin \alpha\}$ e se $\alpha < 0^*$ $\alpha^{-1} = -(-\alpha)^{-1}$. Em qualquer caso $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1^*$.

2.ª Questão.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Se uma seqüência $\{a_n\}$ é limitada então $\{a_n\}$ é convergente.

(2) Uma seqüência $\{a_n\}$ é convergente se, e somente se, é limitada e o conjunto dos valores de aderência é unitário.

(3) Se $\{a_n\}$ é seqüência limitada então existe uma função $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $\{a_{\phi(n)}\}$ é convergente.

(4) Se $\{a_n\}$ é seqüência em $\mathbb{R}$ então $\{a_n\}$ é de Cauchy se, e somente se, $\{a_n\}$ é convergente.

(5) Se $\{a_n\}$ é uma seqüência monótona então $\{a_n\}$ é convergente se, e somente se, $\{a_n\}$ é limitada.

3.ª Questão. Escolha 05 itens dentre os 06 itens a seguir.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	
(6)	

(1) Se $\{a_n\}$ é uma seqüência limitada e $\overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}} = c < 1$ então $\sum a_n$ é absolutamente convergente. Se $\overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}} = c > 1$ então $\sum a_n$ é divergente. Se $c = 1$ nada podemos concluir.

(2) Se $\{a_n\}$ é uma seqüência limitada tal que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0$ para todo $n \geq N$ e $\overline{\lim}\, \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c < 1$ então $\sum a_n$ é absolutamente convergente. Se $\overline{\lim}\, \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c > 1$ então $\sum a_n$ é divergente. Se $c = 1$ nada podemos concluir.

(3) Se $a_{2n} = \frac{1}{2^n}$ e $a_{2n-1} = \frac{1}{3^n}$, $\sum a_n x^n$ é convergente se, e só se, $|x| < \sqrt{2}$.

(4) Se $\{a_n\}$ é uma seqüência limitada e existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0$, $\forall n \geq N$ então $\underline{\lim}\, \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leqslant \underline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant \overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant \overline{\lim}\, \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

(5) A série $\sum a_n$ é convergente se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(6) A série $\sum \frac{n+2}{n+1} \frac{n^n}{x^n n!}$ é convergente se $|x| > e$ e divergente se $|x| < e$.

4.ª Questão.

ÍTEM	V OU F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Seja $\sum a_n$ uma série e $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $n \in \mathbb{N}$ as suas somas parciais. Se $\{s_n\}$ é limitada e $\{b_n\}$ é uma seqüência de números reais positivos que é não-crescente e infinitésima, então $\sum a_n b_n$ é convergente.

(2) A série $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ é convergente $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ não é múltiplo inteiro de 2π.

(3) Seja $\{b_n\}$ uma seqüência não-crescente e infinitésima. Então a série $\sum (-1)^n b_n$ é convergente.

(4) Se $\{a_n\}$ é uma seqüência não-crescente de termos não-negativos, $\sum a_n$ é convergente se, e somente se, a $\sum 2^k a_{2^k}$ é convergente.

(5) A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\log n)^{|p|}}$ é absolutamente convergente se, e somente se, $|p| > 1$ e é convergente para todo $p \in \mathbb{R}$.

5.ª Questão. Seja $\{a_n\}$ a seqüência dos termos da série $\sum a_n$, $\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção e $\{b_n\} = \{a_{\xi(n)}\}$.

ÍTEM	V OU F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Se a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente com soma s então $\sum b_n$ é absolutamente convergente com soma s.

(2) Se $\sum a_n$ é convergente e não é absolutamente convergente existe ξ tal que $\sum b_n$ diverge para $+\infty$.

(3) Se $\sum a_n$ é convergente e não é absolutamente convergente existe ξ tal que $\sum b_n$ é absolutamente convergente.

(4) Se $\sum a_n$ é convergente e não é absolutamente convergente e $c \in \mathbb{R}$, existe ξ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = c$.

(5) Sejam $\{a_n^+\}$ com $a_n^+ = a_n$ se $a_n > 0$ e $a_n^+ = 0$ se $a_n \leqslant 0$ e $\{a_n^-\}$ com $a_n^- = -a_n$ se $a_n < 0$ e $a_n^- = 0$ se $a_n \geqslant 0$. Se $\sum a_n$ é é convergente mas não é absolutamente convergente pode acontecer que uma das séries $\sum a_n^+$ ou $\sum a_n^-$ seja convergente.