Continuidade: Resultados Fundamentais

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

08 de Abril de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Recorde que:

Definição (Continuidade)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função e* $p \in D_f$. *Diremos que* $f(x)$ **é contínua em** p *se, dado* $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in D_f \quad e \quad |x - p| < \delta, \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Se p é um ponto de acumulação de D_f, f é contínua em p se, e somente se, $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.

Diremos que f é contínua se for contínua para todo $p \in D_f$.

Soma, produto, quociente e composição de funções contínuas é uma função contínua.

Funções racionais e funções trigonométricas são contínuas.

A prova do teorema abaixo segue da definição de continuidade e da caracterização de limites por seqüências.

Teorema

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ e $p \in D$. A função f é contínua em p se, e somente se, para toda seqüência $\{x_n\}$ em D com $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$ existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Corolário

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ e $p \in D$. A função f é contínua em p se, e somente se, para toda seqüência $\{x_n\}$ em D com $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$ temos $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(p)$.

O Teorema da Conservação do Sinal

Teorema (Teorema da Conservação do Sinal)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\bar{x} \in D_f$ tal que $f(\bar{x}) > 0$ $(f(\bar{x}) < 0)$. Então, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ sempre que $x \in D_f$ e $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$.

O Teorema Anulamento

Teorema (Teorema do Anulamento)

Se

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *é contínua e* $f(a)<0<f(b)$

$(f(a)>0>f(b))$, *então, existe* $\bar{x}\in(a,b)$ *tal que* $f(\bar{x})=0$.

De fato: Faremos apenas o caso $f(a)<0<f(b)$. Seja

$$A=\{x\in[a,b]:f(s)>0,\ \text{para todo } s\in[x,b]\}.$$

Note que $\varnothing\neq A\subset[a,b]$ (pois $f(b)>0$). Seja $z=\inf A$. Do Teorema da Conservação do Sinal, $z\in(a,b)$ e $z\notin A$. Portanto $f(z)\leq 0$.

Por outro lado, do Teorema da Comparação, $f(z)=\lim\limits_{x\to z^+}f(x)\geq 0$ (pois $x>z\Rightarrow x\in A\Rightarrow f(x)>0$). Logo, $f(z)=0$. $\square$

O Teorema do Valor Intermediário

Teorema (Teorema do Valor Intermediário)

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e tal que $f(a) < f(b)$ $(f(a) > f(b))$. Se $f(a) < k < f(b)$ $(f(a) > k > f(b))$, então existe $\bar{x} \in (a, b)$ tal que $f(\bar{x}) = k$.

De fato: Considere a função $g(x) = f(x) - k$. Então

$$g : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ é contínua, } g(a) < 0 \text{ e } g(b) > 0$$

e do Teorema do Anulamento, existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $g(\bar{x}) = 0$. Portanto $f(\bar{x}) = k$. $\square$

O Teorema de Weierstrass e Aplicações

Teorema (de Weierstrass ou do Valor Extremo)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for contínua, existirão $p, q \in [a, b]$ tais que

$$\boxed{f(p) \leq f(x) \leq f(q), \quad \text{para todo } x \in [a, b].}$$

De fato: Verifiquemos, inicialmente, que $\mathrm{Im}(f)$ é limitada.

Se este não fosse o caso, dado $n \in \mathbb{N}$, existiria $x_n \in [a, b]$ tal que, $x_0 \in [a, b]$ e $|f(x_n)| > \max\{n, |f(x_{n-1})|\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Seja $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Segue que $A \subset [a, b]$ tem um ponto de acumulação $r \in [a, b]$.

Como f é contínua em r, existe $\delta > 0$ tal que,

$$x \in (r-\delta, r+\delta) \cap [a, b] = B \;\Rightarrow\; |f(x) - f(r)| < 1.$$

Segue que $f(B)$ é limitado e contém infinitos pontos de $f(A)$ e isto é uma contradição. Segue que $\mathrm{Im}(f)$ é limitada.

Seja $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Então $f(x) \geq m$, $\forall\, x \in [a, b]$. Se f não é constante, m é ponto de acumulação de $\{y \in \mathrm{Im}(f) : y > m\}$.

Seja $x_0 \in [a,b]$ tal que $0 < f(x_0) - m$ e $x_k \in [a,b]$ tal que $0 < f(x_k) - m < \min\{\frac{1}{k}, f(x_{k-1}) - m\}$, para $k \in \mathbb{N}^*$.

O conjunto $A = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ é infinito e limitado, portanto A tem um ponto de acumulação p.

Como f é contínua em p, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe $\delta_n > 0$ tal que

$$x \in [a,b],\ |x - p| < \delta_n \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \tfrac{1}{n}.$$

Em particular, escolha $x_k \in A$ com $k > n$ e tal que $|x_k - p| < \delta_n$,

$$m - \frac{1}{n} < f(x_k) - \tfrac{1}{n} < f(p) < f(x_k) + \tfrac{1}{n} < m + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} < m + \frac{2}{n}.$$

Concluímos que $f(p) = m$.

A afirmativa restante segue de $-\inf \mathrm{Im}(-f) = \sup \mathrm{Im}(f)$. $\square$

Como uma conseqüência do Teorema do Valor Intermediário e do Teorema de Weierstrass, obtemos o seguinte resultado

Corolário

Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Se

$$m=\min\{f(x):x\in[a,b]\} \text{ e } M=\max\{f(x):x\in[a,b]\},$$

então

$$Im(f)=f([a,b])=[m,M].$$

Abertos, Fechados, Compactos e Conexos

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$.

1) *Um ponto* $a \in A$ *é interior a* A *se existe* $r > 0$ *tal que* $(a - r, a + r) \subset A$.

2) *O conjunto* A *é aberto se todos os seus pontos são interiores.*

3) *O conjunto* A *é fechado em* $\mathbb{R}$ *se seu complementar é aberto.*

4) *O interior* A^{o} *de* A *é o conjunto dos pontos interiores a* A.

5) *O fecho* $\bar{A}$ *de* A *é a interseção de todos os fechados que contém* A.

Teorema

Seja Λ um conjunto e $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de conjuntos.

1) *Se cada A_λ é aberto, $\cup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ é aberto.*
2) *Se cada A_λ é aberto e Λ é um conjunto finito, $\cap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ é aberto.*
3) *Se cada A_λ é fechado, $\cap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ é fechado.*
4) *Se cada A_λ é fechado e Λ é um conjunto finito, $\cup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ é fechado.*

Exemplo

Todo intervalo aberto é aberto. O interior de $[a,b]$ é (a,b). O interior A^{o} de A é o maior aberto contido em A. O fecho de A é o menor fechado que contém A.

Teorema

Todo subconjunto aberto A de $\mathbb{R}$ se exprime, de maneira única, como união enumerável de intervalos abertos disjuntos

Prova: Primeiramente note que se Λ é um conjunto, para cada λ, $I_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda)$ é um intervalo e $p \in \cap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ então $\cup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = (a, b)$ onde $a = \inf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ e $b = \sup_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$. De fato, é claro que $\cup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subset (a, b)$. Para provar a outra inclusão note que $p \in (a, b)$ e se $x \in (a, b)$, ou $x \leq p$ ou $x > p$. Agora,

se $x \leq p$, do fato que $a = \inf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda < x$, existe $\mu_1 \in \Lambda$ tal que $a_{\mu_1} < x \leq p < b_{\mu_1}$.

se $x > p$, do fato que $b = \sup_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda > x$, existe $\mu_2 \in \Lambda$ tal que $a_{\mu_2} < p < x < b_{\mu_2}$.

Em qualquer dos casos $x \in \cup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$.

Para o restante da prova, dado $x \in A$ seja I_x a união de todos os intervalos abertos contidos em A e que contém x. Segue que

1) $I_x = (a_x, b_x) \subset A$,
2) se $x, y \in A$, ou $I_x \cap I_y = I_x = I_y$ ou $I_x \cap I_y = \varnothing$ e
3) $\cup_{x \in A} I_x = A$.

Tomando, para cada intervalo desta decomposição um único racional vemos que A pode ser escrito como união enumerável de intervalos disjuntos. Para ver que esta decomposição é única basta notar que cada intervalo aberto de uma tal decomposição está contido em algum dos I_x e não pode ser distinto de I_x. $\square$

Corolário

Se I é um intervalo aberto e $I = A \cup B$ onde A e B são conjuntos abertos e disjuntos então um deses conjuntos é vazio.

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um ponto $p \in \mathbb{R}$ é aderente a A se existir seqüência $\{x_n\}$ em A tal que $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} p$.

Sabemos que se p é ponto de acumulação de A então p é aderente a A. Se p é aderente a A e p não é ponto de acumulação de A então $p \in A$. Todo ponto interior a A é aderente a A e é um ponto de acumulação de A.

Teorema

Um ponto $p \in \mathbb{R}$ é aderente a A se, e só se, $A \cap (p-\epsilon, p+\epsilon) \neq \varnothing$ para todo $\epsilon > 0$.

Corolário

Se $A \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente (inferiormente) então $\sup A$ ($\inf A$) é aderente a A.

Teorema

O fecho A^- de $A \subset \mathbb{R}$ é o conjunto $\tilde{A}$ dos pontos aderentes de A.

Prova: De fato, se $x \notin \tilde{A}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap A = \varnothing$ segue que $\tilde{A}$ é fechado e $A^- \subset \tilde{A}$. Se $x \notin A^-$ existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap A = \varnothing$ e $x \notin \tilde{A}$. $\square$

Definição

Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ com $A \subset B$. Diremos que A é denso em B se $B \subset A^-$

Teorema

Sejam A *e* B *subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *com* $A \subset B$*. São equivalentes*

- *Todo ponto de* B *é aderente a* A*.*
- *Todo ponto de* B *é limite de uma seqüência de pontos de* A*.*
- *Para todo* $\epsilon > 0$ *e* $b \in B$ $(b-\epsilon, b+\epsilon) \cap A \neq \varnothing$*.*

Teorema

Todo subconjunto B de $\mathbb{R}$ contém um subconjunto A que é enumerável e denso em B.

Prova: Dado $n \in \mathbb{N}^*$ temos que $\mathbb{R} = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$. Para cada $p \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$ escolha $x_{np} \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right) \cap B$ quando esta interseção for não vazia. O conjunto A desses pontos é claramente denso em B (para cada $n \in \mathbb{N}^*$ e $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $|a-b| < \frac{1}{n}$) e é enumerável (a coleção de intervalos $\left\{\left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right) : p \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N}^*\right\}$ é enumerável).$\square$

Teorema

Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado, não vazio e sem pontos isolados. Então F é não enumerável.

Prova: Sejam $x, y \in F$ distintos, $r = |x-y|/2$ e $\tilde{F}_y = F \cap (x-r, x+r)$. Segue que $\tilde{F}_y$ é não vazio e não contém pontos isolados. Seja F_y a união de $\tilde{F}_y$ com os pontos de acumulação de $\tilde{F}_y$ no conjunto $\{x-r, x+r\}$. F_y é claramente fechado e não tem pontos isolados, é limitado e $y \notin F$.

Se $F \supset \{y_1, y_2, y_3, \cdots\}$ seja F_{y_1}. Tendo escolhido $F_{y_1}, \cdots F_{y_{n-1}}$, se $y_n \notin F_{y_{n-1}}$ escolhemos $F_{y_n} = F_{y_{n-1}}$ e se $y_n \in F_{y_{n-1}}$ escolhemos F_{y_n} fechado e sem pontos isolados tal que $y_n \notin F_{y_n} \subset F_{y_{n-1}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $x_n \in F_{y_n}$. A seqüência $\{x_n\}$ é limitada e portanto tem uma subseqüência $\{x_{\phi(n)}\}$ convergente com limite $\bar{x}$. É claro que $\bar{x} \in \cap_{n\in\mathbb{N}} F_{y_n}$ e $\bar{x} \neq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$