

# Funções - Limites e Continuidade

Alexandre Nolasco de Carvalho  
Universidade de São Paulo  
São Carlos SP, Brazil

05 de Abril de 2024

**Primeiro Semestre de 2024**

# Valor de Aderência

## Definição

Dizemos que  $y \in \mathbb{R}$  é um valor de aderência de  $f$  no ponto  $p$  se existe seqüência  $\{x_n\}$  em  $D \setminus \{p\}$ ,  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$ .

## Teorema

Seja  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $p$  um ponto de acumulação de  $D$ .

- 1) Se  $\ell$  é um valor de aderência de  $f$  em  $p$ ,  $\liminf_{x \rightarrow p} f(x) \leq \ell \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x)$ .
- 2) Se  $f$  é limitada em uma vizinhança de  $p$  então  $\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x)$  e  $\liminf_{x \rightarrow p} f(x)$  são valores de aderência de  $f$ .
- 3)  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$  existe se, e somente se,  $f$  é limitada em uma vizinhança de  $p$  e o conjunto dos valores de aderência de  $f$  em  $p$  é unitário.
- 4) Se  $f$  é limitada em uma vizinhança de  $p$ , dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\liminf_{x \rightarrow p} f(x) - \epsilon < f(x) < \overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) + \epsilon$  para todo  $x \in D$  com  $0 < |x - p| < \delta$ .

**Prova de 1):** Se  $f$  não é limitada inferiormente ou superiormente em uma vizinhança de  $p$ , o resultado é imediato. Caso contrário, se  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = l$  e  $\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) = L$ , dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta_\epsilon > 0$  tal que

$$l - \epsilon < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} < l + \epsilon$$

$$L - \epsilon < \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} < L + \epsilon$$

$\forall 0 < \delta < \delta_\epsilon$ . Escolha  $\delta_0 < \delta_\epsilon$ . Se  $\ell$  é um valor de aderência de  $f$  em  $p$ , existe  $x_n \in D \setminus \{p\}$ ,  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ , com  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$ . Seja  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - p| < \delta_0$ ,  $\forall n \geq N$ . Logo,  $\forall n \geq N$ ,

$$l - \epsilon < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\}$$

$$\leq f(x_n) \leq \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} < L + \epsilon.$$

Segue que  $l - \epsilon \leq \ell \leq L + \epsilon$  para todo  $\epsilon > 0$  e portanto  $l \leq \ell \leq L$ .  $\square$

**Prova de 2):** Note que, para algum  $\delta_0 > 0$  temos que

$$-\infty < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} \leq \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} < \infty.$$

Como

$(0, \delta_0) \ni \delta \mapsto \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\}$  é não-crescente e

$(0, \delta_0) \ni \delta \mapsto \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\}$  é não-decrescente,

existem os limites

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} = l \text{ e}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} = L$$

Como  $p$  é um ponto de acumulação de  $D$  seja  $\{x_n^I\}$  e  $\{x_n^L\}$  seqüências em  $D$  tais que  $0 < \max\{|x_n^I - p|, |x_n^L - p|\} < \frac{\delta_0}{n}$  e

$$\inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \frac{\delta_0}{n}\} \leq f(x_n^I) \leq \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \frac{\delta_0}{n}\} + \frac{1}{n}$$

$$\sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \frac{\delta_0}{n}\} - \frac{1}{n} \leq f(x_n^L) \leq \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \frac{\delta_0}{n}\}$$

O resultado agora segue tomando o limite nas expressões acima.  $\square$

**Prova de 3):** Se o limite existe então  $f$  é limitada em uma vizinhança de  $p$  e todos os valores de aderência coincidem e em particular  $\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) = \underline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x)$ . Por outro lado, se  $f$  é limitada em uma vizinhança de  $p$  e o conjunto dos valores de aderência é unitário, isto é, todos os valores de aderência coincidem, segue que o limite existe.

**Prova de 4):** Se  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = l$  e  $\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) = L$ , dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta_\epsilon > 0$  tal que

$$l - \epsilon < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} < l + \epsilon$$

$$L - \epsilon < \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} < L + \epsilon$$

$\forall 0 < \delta < \delta_\epsilon$ . Segue que, para  $\delta < \delta_\epsilon$  e  $x \in D$ ,  $0 < |x - p| < \delta$ ,

$$\begin{aligned} l - \epsilon &< \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} \leq f(x) \\ &\leq \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} < L + \epsilon. \square \end{aligned}$$



## Definição (Continuidade)

Seja  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $p \in D_f$ . Diremos que  $f(x)$  é **contínua em  $p$**  se, dado  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que

$$x \in D_f \text{ e } |x - p| < \delta, \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(p)| < \varepsilon .$$

## Observação

Note que,

*se  $p \in D_f$  é um ponto de acumulação de  $D_f$ , então  $f$  é contínua em  $p$  se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$  e*  
*se  $p$  é um ponto isolado de  $D_f$  então  $f$  é contínua em  $p$ .*

## Exemplo

(a) A função  $f(x) = k$  é contínua em  $x = p$  para cada  $p \in \mathbb{R}$ .

(b) A função  $f(x) = x$  é contínua em  $x = p$  para cada  $p \in \mathbb{R}$ .

(c) A função  $f(x) = x + 1$  é contínua em  $x = p$  para cada  $p \in \mathbb{R}$ .

(d) A função  $f(x) = x^2$  é contínua em  $x = p$  para cada  $p \in \mathbb{R}$ .

(e) A função  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$  não é contínua em  $x = 1$  pois  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \neq 0 = f(1)$ .

**Exercício:** Verifique cada uma das afirmativas do exemplo anterior utilizando os resultados dos exemplos anteriores para as mesmas funções.

## Propriedades do Limite

Recordemos as propriedades do limite.

Sejam  $f_i: D_{f_i} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i=1$  e  $2$ , funções. Suponha que  $p$  seja um ponto de acumulação de  $D_{f_1} \cap D_{f_2}$  e que  $\lim_{x \rightarrow p} f_i(x) = L_i$ ,  $i = 1, 2$ . Então:

$$1) \lim_{x \rightarrow p} (f_1 + f_2)(x) = \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow p} f_2(x) = L_1 + L_2.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow p} k f_1(x) = k L_1 \text{ onde } k = \text{constante.}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow p} f_2(x) = L_1 \cdot L_2.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow p} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow p} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow p} f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \text{ se } L_2 \neq 0.$$

# Propriedades da Continuidade

## Corolário

Sejam  $f_i: D_{f_i} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i=1$  e  $2$ , funções. Suponha que  $p \in D_{f_1} \cap D_{f_2}$  e que  $f$  e  $g$  sejam contínuas em  $p$ . Então  $f_1 + f_2$ ,  $k \cdot f_1$ ,  $f_1 \cdot f_2$  e, se  $f_2(p) \neq 0$ ,  $f_1/f_2$  são contínuas em  $p$ .

## Teorema (Limite da Composta)

Sejam  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  funções tais que  $\text{Im}(g) \subset D_f$  e  $L \in D_f$ . Se  $p$  é um ponto de acumulação de  $D_g$ ,  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$  e  $f$  é contínua em  $L$ , então

$$\lim_{x \rightarrow p} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow p} g(x)\right) = f(L).$$

**De fato:** Como  $f$  é contínua em  $L$ , dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta_f > 0$  tal que

$$y \in D_f, \quad |y - L| < \delta_f \Rightarrow |f(y) - f(L)| < \epsilon.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$ , dado  $\delta_f > 0$  existe  $\delta_g > 0$  tal que

$$x \in D_g, \quad 0 < |x - p| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - L| < \delta_f.$$

Desta forma, como  $\text{Im}(g) \subset D_f$ ,  $D_{f \circ g} = D_g$  e

$$x \in D_g = D_{f \circ g}, \quad 0 < |x - p| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - L| < \delta_f \Rightarrow |f(g(x)) - f(L)| < \epsilon.$$

Logo  $\lim_{x \rightarrow p} f(g(x)) = f(L)$ .  $\square$

# Continuidade: Resultados fundamentais

## Definição (Continuidade)

Seja  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $p \in D_f$ . Diremos que  $f(x)$  é **contínua em  $p$**  se, **dado  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$**  tal que

$$x \in D_f \text{ e } |x - p| < \delta, \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Se  $p$  é um ponto de acumulação de  $D_f$ ,  $f$  é contínua em  $p$  se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ .

Diremos que  $f$  é contínua se for contínua para todo  $p \in D_f$ .

Soma, produto, quociente e composição de funções contínuas é uma função contínua.

Funções racionais e funções trigonométricas são contínuas.

## O Teorema da Conservação do Sinal

### Teorema (Teorema da Conservação do Sinal)

Seja  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $\bar{x} \in D_f$  tal que  $f(\bar{x}) > 0$  ( $f(\bar{x}) < 0$ ). Então, existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ ) sempre que  $x \in D_f$  e  $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ .

**De fato:** Como  $f$  é contínua em  $\bar{x}$ , dado  $\epsilon = f(\bar{x}) > 0$  existe  $\delta > 0$ , tal que

$$x \in D_f, x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(\bar{x}) - \epsilon, f(\bar{x}) + \epsilon) = (0, 2f(\bar{x})).$$

Isto prova o resultado.  $\square$

# O Teorema Anulamento

## Teorema (Teorema do Anulamento)

Se

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ é contínua e } f(a) < 0 < f(b)$$

$(f(a) > 0 > f(b))$ , então, existe  $\bar{x} \in (a, b)$  tal que  $f(\bar{x}) = 0$ .

**De fato:** Faremos apenas o caso  $f(a) < 0 < f(b)$ . Seja

$$A = \{x \in [a, b] : f(s) > 0, \text{ para todo } s \in [x, b]\}.$$

Note que  $\emptyset \neq A \subset [a, b]$  (pois  $f(b) > 0$ ). Seja  $z = \inf A$ . Do Teorema da Conservação do Sinal,  $z \in (a, b)$  e  $z \notin A$ . Portanto  $f(z) \leq 0$ .

Por outro lado, do Teorema da Comparação,  $f(z) = \lim_{x \rightarrow z^+} f(x) \geq 0$  (pois  $x > z \Rightarrow x \in A \Rightarrow f(x) > 0$ ). Logo,  $f(z) = 0$ .  $\square$



## O Teorema do Valor Intermediário

### Teorema (Teorema do Valor Intermediário)

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e tal que  $f(a) < f(b)$   
( $f(a) > f(b)$ ). Se  $f(a) < k < f(b)$  ( $f(a) > k > f(b)$ ), então existe  
 $\bar{x} \in (a, b)$  tal que  $f(\bar{x}) = k$ .

**De fato:** Considere a função  $g(x) = f(x) - k$ . Então

$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua,  $g(a) < 0$  e  $g(b) > 0$

e do Teorema do Anulamento, existe  $\bar{x} \in [a, b]$  tal que  $g(\bar{x}) = 0$ .  
Portanto  $f(\bar{x}) = k$ .  $\square$