Produto de Cauchy de Séries e Limites de Funções

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

01 de Abril de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Produto de Cauchy de séries

A seguir definimos o produto de Cauchy de duas séries numéricas.

Definição

Dadas as séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *o seu produto de Cauchy é a série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *onde* $\displaystyle c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Observação

Este produto, inspirado no produto de polinômios, surge de forma natural quando estudamos funções dadas por séries de potências.

O produto de Cauchy de séries convergentes pode não ser convergente. De fato, o produto de Cauchy da série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ por ela mesma é

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots,$$

de modo que

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}.$$

Como

$$(n-k+1)(k+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2.$$

temos

$$|c_n| \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2},$$

e $c_n \to 0$ não converge para zero e $\sum c_n$ não é convergente.

Teorema (B)

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente com soma* A, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *é convergente com soma* B, *então o seu produto de Cauchy* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, *com* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $n \in \mathbb{N}$, *é convergente com soma* AB.

Prova: Se $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ e $\beta_n = B_n - B$, $n \in \mathbb{N}$, então $A_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$, $\quad B_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} B$ e $\beta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Queremos mostrar que $C_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} AB$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
C_n &= c_0 + c_1 + \cdots + c_n \\
&= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) \\
&= a_0(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) + a_1(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \cdots + a_{n-1}(b_0 + b_1) + a_n b_0 \\
&= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots a_{n-1} B_1 + a_n B_0 \\
&= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n(B + \beta_0) \\
&= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)B + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0 \\
&= A_n B + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_{n-1}\beta_1 + a_n\beta_0.
\end{aligned}
$$

Se $\gamma_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_{n-1}\beta_1 + a_n\beta_0$, $n \in \mathbb{N}$.

$$C_n = A_n B + \gamma_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

e o resultado estará provado se mostrarmos que $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$.

Como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente seja $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ é convergente, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $|\beta_n| = |B_n - B| < \varepsilon$ sempre que $n > N$. Logo, para $n > N$,

$$
\begin{aligned}
|\gamma_n| &= |(\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}) + (\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \cdots + \beta_n a_0)| \\
&\leqslant |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1}||a_{n-N-1}| + \cdots + |\beta_n||a_0| \\
&< |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon\left(|a_{n-N-1}| + \cdots + |a_0|\right) \\
&\leqslant |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon\alpha.
\end{aligned}
$$

logo $0 \leqslant \limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \leqslant \varepsilon\alpha$, para todo $\epsilon > 0$ e $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$, completando a demonstração.$\square$

Limites de Funções

Definição (Limite)

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D. Diremos que **o limite de** $f(x)$ **quando** x **tende** p **é** L *se, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D \text{ e } 0 < |x - p| < \delta, \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Dito de outra forma, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, p) > 0$ tal que

$$f(D \cap (p - \delta, p + \delta) \backslash a) \subset (L - \epsilon, L + \epsilon).$$

Note que:

- Se não existe um número real L tal que $\lim_{x \to p} f(x) = L$ diremos que $\lim_{x \to p} f(x)$ não existe.
- O ponto p não precisa pertencer a D e mesmo que pertença o valor de f em p não é importante para a definição acima.
- Apenas os valores de f em pontos arbitrariamente próximos a p são importantes para a definição.

Teorema

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D. O limite de $f(x)$ quando x tende a p, caso exista, é único. Este limite será denotado por

$$\lim_{x\to p} f(x) = L.$$

De fato: Se L e L' são limites de $f(x)$ quando x tende a p, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \text{ e } 0 < |x-p| < \delta, \implies |f(x)-L| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |f(x)-L'| < \varepsilon.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, com a escolha de δ acima e $x \in D$ satisfazendo $0 < |x - p| < \delta$, temos

$$|L - L'| = |L - f(x) + f(x) - L'| \leqslant |f(x) - L| + |L' - f(x)| < 2\epsilon.$$

Isto mostra que $L = L'$. $\square$

Quando nos referimos a uma função, fica implícito que ela tem um domínio especificado.

Dada a função $f : D \to \mathbb{R}$, dado $D' \subset D$ denotaremos por $f|_{D'} : D' \to \mathbb{R}$ a função definida por $f|_{D'}(x) = f(x)$, para $x \in D'$.

Nos referiremos a $f|_{D'}$ como a restrição de $f : D \to \mathbb{R}$ a D'.

Segue imediatamente da definição que

Teorema (1)

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função, $D' \subset D$ e p um ponto de acumulação de D'. Se $\lim_{x \to p} f(x) = L$ então $\lim_{x \to p} f|_{D'}(x) = L$

Critério negativo para existência de limites

Teorema

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função, D' e D'' subconjuntos de D e $p \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D' e de D''.

•*Se*

- *um dos limites $\lim\limits_{x \to p} f|_{D'}(x)$ ou $\lim\limits_{x \to p} f|_{D''}(x)$ não existe ou*
- *ambos existem e $\lim\limits_{x \to p} f|_{D'}(x) \neq \lim\limits_{x \to p} f|_{D''}(x)$*

então o limite $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ não existe.

•*Se $(D' \cup D'')\backslash\{p\} = D\backslash\{p\}$, o limite $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ existe se, e somente se, $\lim\limits_{x \to p} f|_{D'}(x)$ e $\lim\limits_{x \to p} f|_{D''}(x)$ existem e $\lim\limits_{x \to p} f|_{D'}(x) = \lim\limits_{x \to p} f|_{D''}(x)$.*

Prova: A prova da primeira parte segue diretamente de (1). Para a segunda parte, existe $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D,\ 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon,$$

se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D',\ 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon \implies |f|_{D'}(x) - L| < \epsilon$$

e

$$x \in D'',\ 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon \implies |f|_{D''}(x) - L| < \epsilon.$$

se, e somente se,

$$\lim_{x \to p} f|_{D'}(x) = \lim_{x \to p} f|_{D''}(x). \square$$

Limites Laterais

Se $D \subset \mathbb{R}$, diremos que $p \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação à direita (esquerda) de D se é um ponto de acumulação de $D_p^+ = D \cap (p, \infty)$ $(D_p^- = D \cap (-\infty, p))$.

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p é um ponto de acumulação à direita (esquerda) de D. O **limite de** $f(x)$ **quando** x **tende a** p **pela direita (esquerda)** é

$$\lim_{x \to p^+} f(x) := \lim_{x \to p} f|_{D_p^+}(x) \qquad \left(\lim_{x \to p^-} f(x) := \lim_{x \to p} f|_{D_p^-}(x) \right)$$

Corolário

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p é um ponto de acumulação à direita e à esquerda de D. Então

$$\lim_{x \to p} f(x)$$

existe se, e somente se, existem os limites laterais à direita e à esquerda e

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x).$$

Teorema

Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D. Se existe $\lim_{x \to p} f(x) = L$ então f é limitada em uma vizinhança de p, isto é, existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tais que $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M$.

De fato: Existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1$. Logo

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - L| + |L| \leqslant 1 + |L| = M, \quad \forall x \in D,\ 0 < |x - p| < \delta. \square$$

Teorema (Confronto)

Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ funções e p um ponto de acumulação de D. Se existe $\delta_0 > 0$ tal que, para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta_0$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ e $\lim\limits_{x \to p} f(x) = \lim\limits_{x \to p} h(x) = L$ então $\lim\limits_{x \to p} g(x) = L$.

De fato: Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_0 > \delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$ $\Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ e $|h(x) - L| < \epsilon$. Logo

$$L - \epsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < L + \epsilon, \quad \forall x \in D,\ 0 < |x - p| < \delta.$$

Segue que $L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$, $\forall x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$. Ou ainda

$$|g(x) - L| < \epsilon, \quad \forall x \in D,\ 0 < |x - p| < \delta. \square$$

Teorema (Conservação do Sinal)

Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D. Se $\lim_{x \to p} f(x) = L > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in D$ com $0 < |x - p| < \delta$.

De fato: Dado $\epsilon = \frac{L}{2}$ existe $\delta > 0$ tal que

$$-\frac{L}{2} < f(x) - L < \frac{L}{2}$$

para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$. Logo $0 < \frac{L}{2} < f(x)$ para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$. $\square$

Teorema (Comparação)

Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D. Se existe $\delta_0 > 0$ tal que $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta_0$ e existem $\lim_{x \to p} f(x) = L_f$ e $\lim_{x \to p} g(x) = L_g$, então $L_f \leqslant L_g$.

De fato: Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta \in (0, \delta_0)$ tal que $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$ implica

$$L_f - \frac{\epsilon}{2} \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant L_g + \frac{\epsilon}{2}.$$

Segue que $L_f - L_g \leqslant \epsilon$ e como $\epsilon > 0$ é arbitrário o resutlado segue.$\square$

Teorema (Limite por seqüências)

Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D. O limite $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ existe para toda seqüência $\{x_n\}$ em $D \backslash \{p\}$ que converge para p.

De fato: Se $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$ e $\{x_n\}$ é seqüência em $D \backslash \{p\}$ com $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$, para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$.

Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - p| < \delta$ para todo $n \geqslant N$. Logo $|f(x_n) - L| < \epsilon$, para todo $n \geqslant N$. Isto mostra que $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$. $\square$

Para a recíproca primeiramente note que, se $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existe para toda seqüência $\{x_n\}$ em $D\backslash\{p\}$ que converge para p todas as seqüência $\{f(x_n)\}$ têm o mesmo limite pois se duas tais seqüências tem imagens pela f com limites distintos, alternando os seus elementos contruímos uma seqüência $\{\tilde{x}_n\}$ em $D\backslash\{p\}$ que converge para p e tal que $\{f(\tilde{x}_n)\}$ não converge.

Agora, se $\lim_{x\to p} f(x)$ não é L, existe $\epsilon > 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in D$, $0 < |x_n - p| < \frac{1}{n}$ tal que $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Logo $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ não é L.$\square$

Propriedades do Limite

Sejam $f_i : D_{f_i} \to \mathbb{R}$, $i=1$ e 2, funções. Suponha que p seja um ponto de acumulação de $D_{f_1} \cap D_{f_2}$ e que $\lim\limits_{x\to p} f_i(x) = L_i$, $i = 1, 2$. Então:

1) $\lim\limits_{x\to p}(f_1 + f_2)(x) = \lim\limits_{x\to p} f_1(x) + \lim\limits_{x\to p} f_2(x) = L_1 + L_2$.

2) $\lim\limits_{x\to p} \; k\, f_1(x) = k\, L_1$ onde $k =$ constante.

3) $\lim\limits_{x\to p} f_1(x)\cdot f_2(x) = \lim\limits_{x\to p} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to p} f_2(x) = L_1 \cdot L_2$.

4) $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to p} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to p} f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.

Sabendo de que estas propriedades facilitam, enormemente, o nosso trabalho, vamos fazer a demonstração das mesmas para poder utilizá-las, livremente.

Prova de 1): $\lim_{x \to p}(f_1 + f_2)(x) = \lim_{x \to p} f_1(x) + \lim_{x \to p} f_2(x) = L_1 + L_2$

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_i > 0$ tal que

$$x \in D_{f_i},\ 0 < |x - p| < \delta_i \ \Rightarrow \ |f_i(x) - L_i| < \frac{\epsilon}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Escolha $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então

$$x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1+f_2},\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow$$

$$|(f_1+f_2)(x)-(L_1+L_2)| \leq |f_1(x)-L_1| + |f_2(x)-L_2| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

ou seja $\lim_{x \to p}(f_1 + f_2)(x) = L_1 + L_2$.

Prova de 2): $\lim\limits_{x \to p} k\ f_1(x) = k\, L_1$ onde $k =$ constante

Se $k = 0$ o resultado é trivial. Se $k \neq 0$, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1},\ 0 < |x - p| < \delta \ \Rightarrow \ |f_1(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{|k|}.$$

Então

$$x \in D_{f_1},\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |kf_1(x) - kL_1| = |k|\, |f_1(x) - L_1| < |k| \frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon.$$

ou seja $\lim\limits_{x \to p} (kf_1)(x) = kL_1$.

Prova de 3): $\lim_{x \to p} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \to p} f_1(x) \cdot \lim_{x \to p} f_2(x) = L_1 \cdot L_2$

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1},\ 0 < |x - p| < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f_1(x) - L_1| < \min\left\{\frac{\epsilon}{2(|L_2|+1)}, 1\right\}.$$

e $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_2},\ 0 < |x - p| < \delta_2 \ \Rightarrow \ |f_2(x) - L_2| < \min\left\{\frac{\epsilon}{2(|L_1|+1)}, 1\right\}.$$

Logo $|f_2(x)| \leq |f_2(x) - L_2| + |L_2| < |L_2| + 1$ sempre que
$x \in D_{f_2},\ 0 < |x - p| < \delta_2$.

Logo, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para $x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1 \cdot f_2}$, $0 < |x - p| < \delta$,

$$\begin{aligned}
|(f_1 \cdot f_2)(x) - (L_1 \cdot L_2)| &\leq |(f_1(x) - L_1)f_2(x) + L_1(f_2(x) - L_2)| \\
&\leq |f_1(x) - L_1||f_2(x)| + |L_1||f_2(x) - L_2| \\
&\leq |f_1(x) - L_1|(|L_2| + 1) + |L_1||f_2(x) - L_2| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2(|L_2|+1)}(|L_2| + 1) + |L_1|\frac{\epsilon}{2(|L_1|+1)} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

ou seja $\lim\limits_{x \to p} (f_1 \cdot f_2)(x) = L_1 \cdot L_2$.

Prova de 4): $\displaystyle \lim_{x\to p} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x\to p} f_1(x)}{\lim_{x\to p} f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}\,,$ se $L_2 \neq 0\,.$

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1},\ 0 < |x-p| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |f_1(x) - L_1| < \frac{\epsilon |L_2|}{4}$$

e $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_2},\ 0 < |x-p| < \delta_2 \ \Rightarrow\ |f_2(x) - L_2| < \min\left\{ \frac{\epsilon |L_2|^2}{4(|L_1|+1)}, \frac{|L_2|}{2} \right\}.$$

Logo, se $x \in D_{f_2},\ 0<|x-p|<\delta_2$

$$|L_2| \leq |f_2(x) - L_2| + |f_2(x)| < \frac{|L_2|}{2} + |f_2(x)| \ \text{ e } \ \frac{|L_2|}{2} < |f_2(x)|.$$

Logo, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para $x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1 \cdot f_2}$, $0 < |x - p| < \delta$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{L_1}{L_2}\right| &= \frac{|(f_1(x) - L_1)L_2 + (L_2 - f_2(x))L_1|}{|f_2(x)|\,|L_2|} \\
&\leq \frac{|f_1(x) - L_1||L_2| + |L_2 - f_2(x)||L_1|}{|L_2|\,|L_2|/2} \\
&\leq 2\frac{|f_1(x) - L_1|}{|L_2|} + 2|L_2 - f_2(x)|\frac{|L_1|}{|L_2|^2} \\
&\leq 2\frac{\epsilon|L_2|}{4}\frac{1}{|L_2|} + 2\frac{\epsilon|L_2|^2}{4(|L_1| + 1)}\frac{|L_1|}{|L_2|^2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

ou seja $\lim_{x \to p} (f_1 \cdot f_2)(x) = L_1 \cdot L_2$.

Teorema (Critério de Cauchy)

Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ funções e p um ponto de acumulação de D. O $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ existe se, e somente se, f é de Cauchy em p, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in D$, $0 < |x - p| < \delta$ e $0 < |y - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

De fato: É claro que se $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$ então f é de Cauchy em p.
Reciprocamente, se f é de Cauchy em p e $\{x_n\}$ é uma seqüência em $D \backslash \{p\}$ que converge para p, $\{f(x_n)\}$ é de Cauchy e portanto convergente.$\square$

Limites no infinito

Seja D um subconjunto **ilimitado superiormente** de $\mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. Diremos que o limite de $f(x)$ quando x tende para **infinito** é $L \in \mathbb{R}$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $M = M(\epsilon) > 0$ tal que

$$x \in D,\ x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Escreveremos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

De modo análogo, quando D é ilimitado inferiormente, definimos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

O limite de uma seqüência é um caso particular de limite infinito. Neste caso $D = \mathbb{N}$ é ilimitado superiorementе.

Limites infinitos

Seja D um subconjunto $\mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. Se p é um ponto de acumulação de D diremos que $f(x)$ **diverge** para $+\infty$ quando x tende para p se, dado $M > 0$, existe $\epsilon = \epsilon(M) > 0$ tal que

$$x \in D,\ 0 < |x - p| < \epsilon \Rightarrow f(x) > M.$$

Escreveremos

$$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty.$$

De modo análogo definimos

$$\lim_{x \to p} f(x) = -\infty.$$

Se D é ilimitado superiormente (inferiormente) definimos também

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty \ (\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty).$$