

Séries de Números Reais

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

20 de Março de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Exemplo

Considere a série $\{a_n\}$ com $a_{2n} = \frac{1}{2^n}$ e $a_{2n-1} = \frac{1}{3^n}$.

Note que

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{e} \quad \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\sqrt[2n]{a_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Logo, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ e $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. O teste da raiz indica convergência enquanto que o teste da razão não se aplica.

Teorema (Teste da Raiz - Revisitado)

Se $\{a_n\}$ é uma seqüência limitada e $\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} = c < 1$ então $\sum a_n$ é absolutamente convergente. Se $\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} = c > 1$ então $\sum a_n$ é divergente. Se $c = 1$ nada podemos concluir.

De fato: A primeira parte já foi provada anteriormente. Vamos mostrar que, se $\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} = c > 1$, então $\sum a_n$ é divergente. Isto segue do fato que existe $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $\{|a_{\phi(n)}|^{\frac{1}{\phi(n)}}\}$ converge para $c > 1$ e portanto $\{|a_{\phi(n)}|\}$ não converge para zero. Para ver que nada pode ser dito quando $c = 1$ tome as séries $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$.

Teorema (Teste da Razão - Revisitado)

Se $\sum a_n$ é uma série de termos não nulos e $\overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c < 1$, então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Por outro lado, se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ para todo $n \geq n_0$ então a série é divergente.

Séries de Potência

Dada uma seqüência $\{a_n\}$ de números reais, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

é chamada uma série de potências. Os números a_n são chamados de coeficientes da série e x é um número real.

Dependendo da escolha de x a série pode convergir ou divergir. Vamos desenvolver um modo de determinar o maior conjunto de valores de x para o qual a série de potências é convergente.

Teorema

Dada a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ seja $\alpha = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Defina

$$R = \frac{1}{\alpha} \text{ se } 0 < \alpha < \infty,$$

$$R = 0 \text{ se } \alpha = \infty \text{ e ,}$$

$$R = \infty \text{ se } \alpha = 0$$

Então, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge se $|x| < R$, diverge se $|x| > R$ e nada podemos afirmar de $|x| = R$.

De fato: Basta notar que $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \alpha$ e aplicar o teste da raiz.

Exemplo

Vamos analisar a convergência das séries de potências

- $\sum n^n x^n, R = 0.$
- $\sum \frac{n^n}{n!} x^n, R = e^{-1}.$
- $\sum \frac{x^n}{n!}, R = \infty.$
- $\sum x^n, R = 1.$
- $\sum \frac{x^n}{n^p}, p > 0, R = 1.$

Séries rearranjadas

Seja $\sum a_n$ uma série. Defina as seqüências

- $\{a_n^+\}$ com $a_n^+ = a_n$ se $a_n > 0$ e $a_n^+ = 0$ se $a_n \leq 0$.
- $\{a_n^-\}$ com $a_n^- = -a_n$ se $a_n < 0$ e $a_n^- = 0$ se $a_n \geq 0$.

As seqüências $\{a_n^+\}$ e $\{a_n^-\}$ serão chamadas de parte positiva e parte negativa de $\{a_n\}$. Sendo assim $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$,
 $a_n = a_n^+ - a_n^-$ e $|a_n| = a_n + 2a_n^-$.

Note que, se $\sum a_n$ é absolutamente convergente então $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são convergentes. Reciprocamente, se $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são convergentes então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Além disso, se $\sum a_n$ é convergente mas não é absolutamente convergente, segue facilmente das relações acima que ambas $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são divergentes.

Seja $\{a_n\}$ a seqüência dos termos da série $\sum a_n$, $\xi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uma bijeção e $b_n = a_{\xi(n)}$. A série $\sum b_n$ é chamada uma série rearranjada de $\sum a_n$.

Exemplo

Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Mostramos que esta série é convergente. Se s é a sua soma ($s = \log 2$), temos

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots$$

$$\frac{1}{2}s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \dots$$

$$\frac{3s}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

Logo uma série rearranjada pode ter soma distinta da série original. Isto não ocorre se a série for absolutamente convergente.

Teorema

Toda série rearranjada de uma série absolutamente convergente é convergente com mesma soma.

De fato: Se $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\xi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é uma bijeção e $b_n = a_{\xi(n)}$, dado $n \in \mathbb{N}$ seja $m_n = \max\{\xi(1), \dots, \xi(n)\}$, então

$$\sum_{k=1}^n b_k \leq \sum_{k=1}^{m_n} a_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

e $\sum b_n$ é convergente com $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Por outro lado, dado $m \in \mathbb{N}$ seja $n_m = \max\{\xi^{-1}(1), \dots, \xi^{-1}(m)\}$. Sendo assim

$$\sum_{k=1}^m a_k \leq \sum_{k=1}^{n_m} b_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Isto mostra que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Para o caso geral note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

e portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \square$$

Teorema

Se $\sum a_n$ é convergente e não é absolutamente convergente, então

- Dado $c \in \mathbb{R}$, existe bijeção $\xi_c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\xi_c(n)} = c$.
- Existem bijeções ξ_+ e ξ_- tais que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\xi_+(n)}$ diverge para $+\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\xi_-(n)}$ diverge para $-\infty$

De fato: Seja $\{p_n\}$ a seqüência dos termos positivos de $\{a_n\}$ na ordem em que eles aparecem e $\{q_n\}$ a seqüência dos termos não positivos de $\{a_n\}$ na ordem em que eles aparecem. Sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\sum p_n$ diverge para $+\infty$ e $\sum q_n$ divergem para $-\infty$. Dado $c \in \mathbb{R}$ seja n_1 o primeiro inteiro tal que

$$\sum_{n=1}^{n_1} p_n > c.$$

Em seguida escolha m_1 o menor inteiro tal que

$$\sum_{n=1}^{n_1} p_n + \sum_{n=1}^{m_1} q_n < c$$

e prossiga com este processo.

Desta forma, para todo $k > 1$,

$$\begin{aligned}
 0 < \sum_{j=1}^{n_1} p_j + \sum_{j=1}^{m_1} q_j + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} p_j + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} q_j \\
 + \cdots + \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} q_j + \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} p_j - c \leq p_{n_k+1} \quad e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 > \sum_{j=1}^{n_1} p_j + \sum_{j=1}^{m_1} q_j + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} p_j + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} q_j \\
 + \cdots + \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} p_j + \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} q_j - c \geq q_{m_k}.
 \end{aligned}$$

Agora, como $q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e $p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ o resultado segue desta reordenação. Um processo semelhante prova a segunda parte do resultado. \square

Produto de Cauchy de séries

A seguir definiremos o produto de Cauchy de duas séries numéricas.

Definição

Dadas as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ o seu produto de Cauchy é a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ onde } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observação

Este produto, inspirado no produto de polinômios, surge de forma natural quando estudamos funções dadas por séries de potências.

O produto de Cauchy de séries convergentes pode não ser convergente. De fato, o produto de Cauchy da série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ por ela mesma é

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \dots,$$

de modo que

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}.$$

Como

$$(n-k+1)(k+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2.$$

temos

$$|c_n| \geq \sum_{k=0}^n \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2},$$

e $c_n \rightarrow 0$ não converge para zero e $\sum c_n$ não é convergente.

Teorema (B)

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente com soma A , $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ é convergente com soma B , então o seu produto de Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$,

com $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, $n \in \mathbb{N}$, é convergente com soma AB .

Prova: Se $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$, $C_n = \sum_{k=0}^n c_k$ e $\beta_n = B_n - B$, $n \in \mathbb{N}$, então $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$, $B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$ e $\beta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Queremos mostrar que $C_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} AB$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 C_n &= c_0 + c_1 + \cdots + c_n \\
 &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) \\
 &= a_0(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) + a_1(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) \\
 &\quad + \cdots + a_{n-1}(b_0 + b_1) + a_n b_0 \\
 &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_{n-1} B_1 + a_n B_0 \\
 &= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n(B + \beta_0) \\
 &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)B + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0 \\
 &= A_n B + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_{n-1} \beta_1 + a_n \beta_0.
 \end{aligned}$$

Se $\gamma_n = a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_{n-1} \beta_1 + a_n \beta_0$, $n \in \mathbb{N}$.

$$C_n = A_n B + \gamma_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

e o resultado estará provado se mostrarmos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$.

Como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente seja $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ é convergente, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$|\beta_n| = |B_n - B| < \varepsilon \text{ sempre que } n \geq N.$$

Logo, para $n \geq N$,

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &= |(\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}) + (\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \cdots + \beta_n a_0)| \\ &\leq |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1}| |a_{n-N-1}| + \cdots + |\beta_n| |a_0| \\ &< |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon (|a_{n-N-1}| + \cdots + |a_0|) \\ &\leq |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon \alpha. \end{aligned}$$

logo $0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |\gamma_n| \leq \varepsilon \alpha$, para todo $\varepsilon > 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$, completando a demonstração. \square

Bibliografia Principal

- (●) W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, (3rd Edition) International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw Hill (1976).
- (●) Elon Lages Lima, *Curso de Análise - Vol. 1* (12^a Edição), Projeto Euclides, IMPA (2007).

Lista de exercícios selecionados da bibliografia principal

- (1) W. Rudin-Capítulo 1: Exercícios 1,2,3,4,5,6 e 7
- (2) W. Rudin-Capítulo 3: Exercícios 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 e 13
- (3) Elon L. Lima - Final do Capítulo 4: Exercícios 2, 3 4, 10, 11 e 11, 13, 14, 17, 18, 21, 23, 27, 28, 33, 42, 43