

# Séries de Números Reais

Alexandre Nolasco de Carvalho  
Universidade de São Paulo  
São Carlos SP, Brazil

20 de Março de 2024

**Primeiro Semestre de 2024**

# Teste da Razão x Teste da Raiz

## Teorema

Seja  $\{a_n\}$  uma seqüência limitada de números reais não nulos.  
Então

$$\underline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \underline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

**De fato:** Mostremos primeiramente que  $\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ . Se não, seja  $c > 0$  com  $\overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < c < \overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ . Logo, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < c, \quad \forall n \geq N.$$

Disto segue que  $|a_{N+p}| < |a_N|c^{-N}c^{N+p}$  para todo  $p \in \mathbb{N}^*$ . Sendo assim  $c < \overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq c$  o que é uma contradição.

Para ver que  $\underline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \underline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}}$  procedemos de modo similar supondo que, para algum  $c > 0$   $\underline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > c > \underline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ . Logo existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > c, \forall n \geq N$ , e  $|a_{N+p}| > |a_N|c^{-N}c^{N+p}$  para todo  $p \in \mathbb{N}^*$ . Logo  $c > \underline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} \geq c$  e temos uma contradição.

## Corolário

Seja  $\{a_n\}$  uma seqüência limitada de números reais não nulos. Se existe o limite  $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$  então o limite  $\lim |a_n|^{\frac{1}{n}}$  também existe e ambos têm o mesmo valor.

## Exemplo

$$\lim \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = e$$

**De fato:** Seja  $a_n = \frac{n^n}{n!}$  e note que  $(a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$ . Note também que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$$

O resultado desejado agora segue do corolário acima.

## Teorema (Dirichlet)

Seja  $\sum a_n$  uma série (não necessariamente convergente) e  $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  as suas somas parciais. Se  $\{s_n\}$  é limitada e  $\{b_n\}$  é uma seqüência de números reais positivos que é não-crescente e infinitésima, então  $\sum a_n b_n$  é convergente.

**De fato:** Segue facilmente por indução que, se  $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ ,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k b_k &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\ &= s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_n\end{aligned}$$

Seja  $M = \sup\{|s_n| : n \in \mathbb{N}\}$ . Como  $\sum(b_n - b_{n+1})$  é uma série convergente de números reais não negativos,  $s_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  e

$$|s_k(b_k - b_{k+1})| \leq M(b_k - b_{k+1}),$$

segue que  $\sum_{n=1}^{\infty} s_n(b_n - b_{n+1})$  é convergente e que  $\sum a_n b_n$  é convergente.  $\square$

## Exemplo

Para cada número real  $x$  que não é múltiplo inteiro de  $2\pi$ , as séries  $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$  e  $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$  são convergentes.

**Solução:** Para ver que  $\{\sum_{k=1}^n \cos(kx)\}$  ( ou  $\{\sum_{k=1}^n \sin(kx)\}$  ) é limitada utilizamos que (já que  $e^{ix} \neq 1$ )

$$1 + e^{ix} + e^{i2x} + \dots + e^{inx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$$

e tomamos parte real e parte imaginária. O resultado agora segue do Teorema (Dirichlet).

## Teorema (Abel)

Se  $\sum a_n$  é uma série convergente e  $\{b_n\}$  é uma seqüência não-crescente de números positivos (não precisa ser infinitésima), então a série  $\sum a_n b_n$  é convergente.

**De fato:** Seja  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n$  e  $s_n = a_1 + \dots + a_n$ . Note que

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k (b_k - c) + c \sum_{k=1}^n a_k$$

Do Teorema (Dirichlet),  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - c)$  é convergente com soma  $s$ .  
Logo  $\sum a_n b_n = s + c \sum a_n$ .  $\square$



## Teorema (Leibniz)

Seja  $\{b_n\}$  uma seqüência não crescente e infinitésima. Então a série  $\sum(-1)^n b_n$  é convergente.

**De fato:** É fácil ver que, se  $a_n = (-1)^n$  e  $s_n = a_1 + \dots + a_n$ , então  $\{s_n\}$  é limitada (embora não seja convergente). Segue do Teorema (Dirichlet) que  $\sum(-1)^n b_n$  é convergente.

## Teorema

Seja  $\{a_n\}$  uma seqüência não-crescente de números reais não negativos. A série  $\sum a_n$  é convergente se, e somente se, a série  $\sum 2^k a_{2^k}$  é convergente.

**De fato:** Sejam  $\{s_n\}$  e  $\{\tilde{s}_n\}$  são as seqüências das somas parciais de  $\sum a_n$  e  $\sum 2^k a_{2^k}$ . Então,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\leq s_{2^{n-1}} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{n-1}} + \cdots + a_{2^n-1}) \\ &\leq \tilde{s}_{n-1} \leq \tilde{s}_n. \end{aligned}$$

Logo, se  $\{\tilde{s}_n\}$  é limitada segue que  $\{s_n\}$  é limitada.

Agora note que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^n} \\ &\geq \frac{a_1}{2} + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) \\ &\geq \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^n} = \frac{1}{2}\tilde{s}_n. \end{aligned}$$

Logo, se  $\{s_n\}$  é limitada segue que  $\{\tilde{s}_n\}$  é limitada.  $\square$

### Exemplo

Do resultado anterior, a série  $\sum \frac{1}{n^p}$  é convergente se, e somente se a série  $\sum \frac{2^n}{2^{np}} = \sum 2^{(1-p)n}$  é convergente se, e somente se,  $p > 1$ .

### Exemplo

A série  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$  é convergente se, e somente se  $p > 1$ .

**De fato:** Do resultado anterior, basta notar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n(\log(2^n))^p}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)^{np}}$$

é convergente se e somente se  $p > 1$ .

# O número $e$ é irracional

## Exemplo

$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  é irracional.

**De fato:** Seja  $s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ . Sendo assim,

$$\begin{aligned} 0 < e - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{nn!} \end{aligned}$$

Agora, suponha que existem inteiros positivos  $p$  e  $q$  tais que  $e = \frac{p}{q}$ . Segue que

$$0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q} \leq 1.$$

Por hipótese  $q!e$  é um inteiro e como  $q!s_q$  também é inteiro segue que  $q!(e - s_q)$  é inteiro em  $(0, 1)$  e temos uma contradição.

## Exemplo

Considere a série  $\{a_n\}$  com  $a_{2n} = \frac{1}{2^n}$  e  $a_{2n-1} = \frac{1}{3^n}$ .

Note que

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{e} \quad \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\sqrt[2n]{a_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Logo,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$  e  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . O teste da raiz indica convergência enquanto que o teste da razão não se aplica.

## Teorema (Teste da Raiz - Revisitado)

Se  $\{a_n\}$  é uma seqüência limitada e  $\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} = c < 1$  então  $\sum a_n$  é absolutamente convergente. Se  $\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} = c > 1$  então  $\sum a_n$  é divergente. Se  $c = 1$  nada podemos concluir.

**De fato:** A primeira parte já foi provada anteriormente. Vamos mostrar que, se  $\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} = c > 1$ , então  $\sum a_n$  é divergente. Isto segue do fato que existe  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  estritamente crescente tal que  $\{|a_{\phi(n)}|^{\frac{1}{\phi(n)}}\}$  converge para  $c > 1$  e portanto  $\{|a_{\phi(n)}|\}$  não converge para zero. Para ver que nada pode ser dito quando  $c = 1$  tome as séries  $\sum \frac{1}{n}$  e  $\sum \frac{1}{n^2}$ .



## Teorema (Teste da Razão - Revisitado)

Se  $\sum a_n$  é uma série de termos não nulos e  $\overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c < 1$ , então  $\sum a_n$  é absolutamente convergente.

Por outro lado, se existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$  para todo  $n \geq n_0$  então a série é divergente.

# Séries de Potência

Dada uma seqüência  $\{a_n\}$  de números reais, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

é chamada uma série de potências. Os números  $a_n$  são chamados de coeficientes da série e  $x$  é um número real.

Dependendo da escolha de  $x$  a série pode convergir ou divergir. Vamos tentar determinar o maior conjunto de valores de  $x$  para o qual a série de potências é convergente.

## Teorema

Dada a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  seja  $\alpha = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ . Defina

$$R = \frac{1}{\alpha} \text{ se } 0 < \alpha < \infty,$$

$$R = 0 \text{ se } \alpha = \infty \text{ e ,}$$

$$R = \infty \text{ se } \alpha = 0$$

Então,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge se  $|x| < R$ , diverge se  $|x| > R$  e nada podemos afirmar de  $|x| = R$ .

**De fato:** Basta notar que  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \alpha$  e aplicar o teste da raiz.

## Exemplo

Vamos analisar a convergência das séries de potências

- $\sum n^n x^n, R = 0.$
- $\sum \frac{n^n}{n!} x^n, R = e^{-1}.$
- $\sum \frac{x^n}{n!}, R = \infty.$
- $\sum x^n, R = 1.$
- $\sum \frac{x^n}{n^p}, p > 0, R = 1.$

## Séries rearranjadas

Seja  $\sum a_n$  uma série. Defina as seqüências

- $\{a_n^+\}$  com  $a_n^+ = a_n$  se  $a_n > 0$  e  $a_n^+ = 0$  se  $a_n \leq 0$ .
- $\{a_n^-\}$  com  $a_n^- = -a_n$  se  $a_n < 0$  e  $a_n^- = 0$  se  $a_n \geq 0$ .

As seqüências  $\{a_n^+\}$  e  $\{a_n^-\}$  serão chamadas de parte positiva e parte negativa de  $\{a_n\}$ . Sendo assim  $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ ,  
 $a_n = a_n^+ - a_n^-$  e  $|a_n| = a_n + 2a_n^-$ .

Note que, se  $\sum a_n$  é absolutamente convergente então  $\sum a_n^+$  e  $\sum a_n^-$  são convergentes. Reciprocamente, se  $\sum a_n^+$  e  $\sum a_n^-$  são convergentes então  $\sum a_n$  é absolutamente convergente.

Além disso, se  $\sum a_n$  é convergente mas não é absolutamente convergente, segue facilmente das relações acima que ambas  $\sum a_n^+$  e  $\sum a_n^-$  são divergentes.

Seja  $\{a_n\}$  a seqüência dos termos da série  $\sum a_n$ ,  $\xi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  uma bijeção e  $b_n = a_{\xi(n)}$ . A série  $\sum b_n$  é chamada uma série rearranjada de  $\sum a_n$ .

### Exemplo

Considere a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ . Mostramos que esta série é convergente. Se  $s$  é a sua soma ( $s = \log 2$ ), temos

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots$$

$$\frac{1}{2}s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \dots$$

$$\frac{3s}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

Logo uma série rearranjada pode ter soma distinta da série original. Isto não ocorre se a série for absolutamente convergente.

## Teorema

*Toda série rearranjada de uma série absolutamente convergente é convergente com mesma soma.*

**De fato:** Se  $a_n \geq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\xi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  é uma bijeção e  $b_n = a_{\xi(n)}$ , dado  $n \in \mathbb{N}$  seja  $m_n = \max\{\xi(1), \dots, \xi(n)\}$ , então

$$\sum_{k=1}^n b_k \leq \sum_{k=1}^{m_n} a_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

e  $\sum b_n$  é convergente com  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Por outro lado, dado  $m \in \mathbb{N}$  seja  $n_m = \max\{\xi^{-1}(1), \dots, \xi^{-1}(m)\}$ . Sendo assim

$$\sum_{k=1}^m a_k \leq \sum_{k=1}^{n_m} b_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

e  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Isto mostra que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

Para o caso geral note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

e portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \square$$



## Teorema

Se  $\sum a_n$  é convergente e não é absolutamente convergente, então

- Dado  $c \in \mathbb{R}$ , existe bijeção  $\xi_c: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\xi_c(n)} = c$ .
- Existem bijeções  $\xi_+$  e  $\xi_-$  tais que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\xi_+(n)}$  diverge para  $+\infty$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\xi_-(n)}$  diverge para  $-\infty$

**De fato:** Seja  $\{p_n\}$  a seqüência dos termos positivos de  $\{a_n\}$  na ordem em que eles aparecem e  $\{q_n\}$  a seqüência dos termos não positivos de  $\{a_n\}$  na ordem em que eles aparecem. Sabemos que  $\sum p_n$  e  $\sum q_n$  divergem e que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Dado  $c \in \mathbb{R}$  seja  $n_1$  o primeiro inteiro tal que

$$\sum_{n=1}^{n_1} p_n > c.$$

Em seguida escolha  $m_1$  o menor inteiro tal que

$$\sum_{n=1}^{n_1} p_n + \sum_{n=1}^{m_1} q_n < c$$

e prossiga com este processo.

Desta forma, para todo  $k > 1$ ,

$$0 < \sum_{j=1}^{n_1} p_j + \sum_{j=1}^{m_1} q_j + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} p_j + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} q_j \\ + \cdots + \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} q_j + \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} p_j - c \leq p_{n_k+1} \quad e$$

$$0 > \sum_{j=1}^{n_1} p_j + \sum_{j=1}^{m_1} q_j + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} p_j + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} q_j \\ + \cdots + \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} p_j + \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} q_j - c \geq q_{m_k}.$$

Agora, como  $q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  e  $p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  o resultado segue desta reordenação. Um processo semelhante prova a segunda parte do resultado.  $\square$

## Seqüência dupla

Uma seqüência dupla  $(x_{nk})$  é uma função  $x : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada par  $(n, k)$  de números naturais um número real  $x_{nk}$ .

$$x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad \cdots$$

$$x_{21} \quad x_{22} \quad x_{23} \quad \cdots$$

$$x_{31} \quad x_{32} \quad x_{33} \quad \cdots$$

.....

.....

Consideremos as somas repetidas  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} \right)$  e  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} x_{nk} \right)$ .

Mesmo quando 'convergem', elas podem dar diferentes resultados.

Por exemplo, somando primeiro as linhas no quadro abaixo,

obtemos  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} \right) = 0$  enquanto se somarmos primeiro as

colunas, teremos  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} x_{nk} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^k = 1$ .

$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	...	→	0
0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	0	...	→	0
0	0	$\frac{7}{8}$	$-\frac{7}{8}$	0	...	→	0
0	0	0	$\frac{15}{16}$	$-\frac{15}{16}$	...	→	0
...	...	...	...	...	...		
↓	↓	↓	↓	...	...		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...	...		

Surge o problema de obter condições que assegurem a igualdade das duas somas repetidas. Nosso primeiro resultado será o

## Lema

Se  $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $f_n(j) = x_{n1} + \dots + x_{nj}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge

uniformemente em  $\mathbb{N}$  e  $\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}$  converge,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} x_{nk} \right)$$

**Prova:** Segue do fato que  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge uniformemente

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \lim_{j \rightarrow \infty} f_n(j) \right] = \lim_{j \rightarrow \infty} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(j) \right] = \lim_{j \rightarrow \infty} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^j x_{nk} \right] \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^j \sum_{n=1}^{\infty} x_{nk} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}. \quad \square \end{aligned}$$

## Teorema (A)

Dada  $\{x_{nk}\}$ , se  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk}| = a_n$  para cada  $n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$  então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} x_{nk} \right).$$

*Esta afirmação implica, em particular, que todas as séries contidas na igualdade acima são convergentes.*

**Prova:** Pondo  $f_n(k) = x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nk}$ , como no lema, temos  $|f_n(k)| \leq a_n$  para todo  $k$  e todo  $n$ . Logo  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  é uniformemente convergente em  $k \in \mathbb{N}$  pelo Teste M de Weierstrass. O lema anterior implica o resultado.  $\square$



A seguir definimos o produto de Cauchy de duas séries numéricas.

### Definição

Dadas as séries  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  o seu produto de Cauchy é a série  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  onde  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### Observação

*Este produto é inspirado no produto de polinômios.*

O produto de séries convergentes pode não ser convergente. Basta

considerar a série  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$  (exercício).

## Teorema (B)

Se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  é absolutamente convergente com soma  $A$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  é convergente com soma  $B$ , então o seu produto de Cauchy  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ,

$\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , é convergente com soma  $AB$ .

**Prova:** Se  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ,  $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$ ,  $C_n = \sum_{k=0}^n c_k$  e  $\beta_n = B_n - B$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , então  $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$ ,  $B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$  e  $\beta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Queremos mostrar que  $C_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} AB$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 C_n &= c_0 + c_1 + \cdots + c_n \\
 &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) \\
 &= a_0(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) + a_1(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) \\
 &\quad + \cdots + a_{n-1}(b_0 + b_1) + a_n b_0 \\
 &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_{n-1} B_1 + a_n B_0 \\
 &= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n(B + \beta_0) \\
 &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)B + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0 \\
 &= A_n B + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_{n-1} \beta_1 + a_n \beta_0.
 \end{aligned}$$

Se  $\gamma_n = a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_{n-1} \beta_1 + a_n \beta_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

$$C_n = A_n B + \gamma_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

e o resultado estará provado se mostrarmos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$ .

Como  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  é absolutamente convergente seja  $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

Como  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  é convergente, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que

$$|\beta_n| = |B_n - B| < \varepsilon \text{ sempre que } n \geq N.$$

Logo, para  $n \geq N$ ,

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &= |(\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}) + (\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \cdots + \beta_n a_0)| \\ &\leq |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1}| |a_{n-N-1}| + \cdots + |\beta_n| |a_0| \\ &< |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon (|a_{n-N-1}| + \cdots + |a_0|) \\ &\leq |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon \alpha. \end{aligned}$$

logo  $0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |\gamma_n| \leq \varepsilon \alpha$ , para todo  $\varepsilon > 0$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$ ,  
completando a demonstração.  $\square$