Séries de Números Reais

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

18 de Março de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Convergência Absoluta

Definição

Uma série $\sum a_n$ é absolutamente convergente quando $\sum |a_n|$ é convergente.

Segue facilmente do critério de Cauchy que

Teorema

Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente, então $\sum a_n$ é convergente.

Não vale a volta.

De fato: Note que $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ não é absolutamente convergente mas é convergente. Para concluir que é convergente note que

$$s_2 = 1-\frac{1}{2},\ s_4 = (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}),\ s_6 = (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})\cdots$$

Sendo assim, $s_2 < s_4 < s_6 < \cdots < s_{2n} < \cdots$ e $\{s_{2n}\}$ é crescente limitada (por 1) e portanto convergente. Por outro lado

$$s_1 = 1,\ s_3 = 1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}),\ s_5 = 1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}), \cdots$$

Sendo assim, $s_1 > s_3 > s_5 > \cdots > s_{2(n-1)} > \cdots$ e $\{s_{2n-1}\}$ é decrescente limitada e portanto convergente.

Por outro lado $s_{2n+1} - s_{2n} = \dfrac{1}{2n+1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e portanto $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente.

Exercício

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência infinitésima de termos não negativos que é decrescente. Mostre que $\sum(-1)^n a_n$ é convergente.

Sugestão: Repita a prova acima substituindo $\frac{1}{n}$ por a_n.

Exercício

- *Seja $\sum b_n$ uma série convergente de termos não negativos. Se existem $k > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|a_n| \leqslant kb_n$ para todo $n \geqslant n_0$ então a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.*
- *Se existem $c \in (0,1)$, $k > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|a_n| \leqslant k \cdot c^n$ para todo $n \geqslant n_0$ então a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.*

Teste da Raiz

Teorema (Teste da Raiz)

Se $\{a_n\}$ *é uma seqüência limitada e* $\overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}} = c < 1$ *então* $\sum a_n$ *é absolutamente convergente.*

De fato: Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{k \geqslant n} |a_k|^{\frac{1}{k}} < r = \frac{c+1}{2} < 1$ para todo $n \geqslant N$. Logo $|a_n| < r^n$ para todo $n \geqslant N$. Segue do Teorema da Comparação que $\sum |a_n|$ é convergente, ou seja, $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Exemplo

Se $p \in \mathbb{N}$ então $\sum n^p a^n$ é convergente para $|a| < 1$ e divergente para $|a| \geqslant 1$.

Solução: Basta ver que $\overline{\lim}\, |n^p a^n|^{\frac{1}{n}} = |a| < 1$ e aplicar o Teste da Raiz. Para ver que a série é divergente quando $|a| \geqslant 1$ basta notar que a seqüência dos termos da série não converge para zero neste caso.

Teste da Razão

Teorema (Teste da Razão)

Se $\sum b_n$ é uma série convergente de termos positivos e $\sum a_n$ é uma série de termos não nulos tais que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}, \ \forall n \geqslant n_0,$$

então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Em particular, se $\overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c < 1$, então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

De fato:

$$\frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|} \leqslant \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}}, \ \frac{|a_{n_0+2}|}{|a_{n_0+1}|} \leqslant \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}}, \ \frac{|a_{n_0+3}|}{|a_{n_0+2}|} \leqslant \frac{b_{n_0+3}}{b_{n_0+2}}, \ \cdots$$

Logo $\frac{|a_{n_0+p}|}{|a_{n_0}|} \leqslant \frac{b_{n_0+p}}{b_{n_0}}$ e o resultado segue utilizando o Teorema da Comparação. O caso particular segue tomando $b_n = c^n$.

Exemplo

$\sum \frac{n!}{n^n} a^n$ *é convergente para* $|a| < e$.

De fato: Note que, para $a \neq 0$, $\frac{\left| \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} a^{(n+1)} \right|}{\left| \frac{n!}{n^n} a^n \right|} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} |a| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{|a|}{e}$.

O resultado agora segue do Teste da Razão.

Exemplo

Considere a série $\sum a_n$ *com* $a_{2n} = 2a^{2n-1}$ *e* $a_{2n-1} = a^{2(n-1)}$.

Vamos aplicar o critério da raiz e o critério da razão para esta série.

- Se $n = 2k$, $\frac{|a_{2k+1}|}{|a_{2k}|} = \frac{|a^{2k}|}{2|a^{2k-1}|} = \frac{|a|}{2}$.
- Se $n = 2k - 1$, $\frac{|a_{2k}|}{|a_{2k-1}|} = \frac{2|a^{2k-1}|}{|a^{2(k-1)}|} = 2|a|$.

Segue que $\overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2|a|$. Por outro lado $\sqrt[n]{a_n} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} |a|$.

Desta forma, o teste da Raiz nos dá convergência para $|a| < 1$ enquanto que o teste da razão nos dá convergência apenas para $|a| < \frac{1}{2}$.

Isto indica uma possível melhor eficácia do Teste da Raiz que é provada no resultado a seguir.