Seqüências de Números Reais

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

13 de Março de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Valores de Aderência, Limite Superior e Limite Inferior

Definição

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência. Um número real a é um valor de aderência de $\{a_n\}$ se a seqüência $\{a_n\}$ possui uma subseqüência convergente com limite a.

Já vimos que o conjunto dos valores de aderência de uma seqüência limitada é não vazio.

Definição

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência limitada. Definimos o limite superior $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ (limite inferior $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$) da seqüência $\{a_n\}$ por

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} a_k$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} a_k$$

Também escreveremos $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ ou $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ para denotar o limite inferior e o limite superior.

Teorema

Se $\{a_n\}$ é uma seqüência limitada, então $a = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ e $b = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ são valores de aderência de $\{a_n\}$.

De fato: Dada vizinhança V_a de a e $r>0$ tal que $(a-r,a+r)\subset V_a$, seja $N\in\mathbb{N}$ tal que $inf_{k\geqslant n}a_k\in(a-r,a+r)$ para todo $n\geqslant N$.

Logo, existe $k_1\geqslant N$ tal que $a_{k_1}\in(a-r,a+r)$.

Tomando $n_1>k_1\geqslant N$ temos que $inf_{k\geqslant n_1}a_k\in(a-\frac{r}{2},a+\frac{r}{2})$ e portanto existe $k_2\geqslant n_1>k_1$ tal que $a_{k_2}\in(a-\frac{r}{2},a+\frac{r}{2})$.

Tendo construído $a_{k_1}\cdots a_{k_p}$ com $a_{k_p}\in(a-\frac{r}{p},a+\frac{r}{p})$ tomamos $n_{p+1}>k_p\geqslant N$ tal que $inf_{k\geqslant n_{p+1}}a_k\in(a-\frac{r}{p+1},a+\frac{r}{p+1})$ e existe $k_{p+1}\geqslant n_{p+1}>k_p$ tal que $a_{k_{p+1}}\in(a-\frac{r}{p+1},a+\frac{r}{p+1})$. A seqüência $\{a_{k_n}\}$ é convergente com limite a, mostrando o resultado.

Exercício

Mostre que o $b=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n$ *é um valor de aderência*

Segue dos Teoremas da Comparação e do Confronto que

Teorema

Se a é um valor de aderência da seqüência $\{a_n\}$ *então*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant a \leqslant \limsup_{n\to\infty} .$$

Além disso, uma seqüência é convergente se, e somente se, $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty}$.

Corolário

Uma seqüência $\{a_n\}$ *é convergente se e, somente se,*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n .$$

Em seguida apresentamos o método das aproximações sucessivas

Teorema (Aproximações Sucessivas)

Se $\kappa \in [0,1)$*,* $\{a_n\}$ *é uma seqüência tal que, para todo* $n \in \mathbb{N}$*,* $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqslant \kappa |a_{n+1} - a_n|$*, então* $\{a_n\}$ *é de Cauchy.*

Prova: Se $m > n$ são naturais, $m = n + p$ para algum $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &\leqslant |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\ &\leqslant \kappa^{n+p-1}|a_1 - a_0| + \cdots + \kappa^n |a_1 - a_0| \\ &\leqslant \kappa^n [\kappa^{p-1} + \cdots + 1]|a_1 - a_0| \\ &\leqslant \frac{\kappa^n}{1-\kappa}|a_1 - a_0|. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$ escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\kappa^N}{1-\kappa}|a_1 - a_0| < \epsilon$. Segue que, se $m, n \geqslant N$, $|a_m - a_n| < \epsilon$ e $\{a_n\}$ é de Cauchy.

Exemplo: Seja $a > 0$ e $\{a_n\}$ a sequência definida por $a_0 = c > 0$ e $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$. Mostre que $\{a_n\}$ é convergente com limite $\sqrt{a}$.

De fato: Note que

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{2\, a_n\, a_{n+1}}\right)(a_{n+1} - a_n) \end{aligned}$$

Note que, para todo $t > 0$, $\frac{1}{2}\left(t + \frac{a}{t}\right) > \sqrt{\frac{a}{2}}$. Logo $a_n > \sqrt{\frac{a}{2}}$, para todo $n \geqslant 1$. Disto segue que $2\, a_n\, a_{n+1} > a$ e que

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{a}{2\, a_n\, a_{n+1}}\right| < \frac{1}{2}.$$

Logo, do Método das aproximações sucessivas $\{a_n\}$ é convergente e o limite ℓ deve satisfazer $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$, ou seja $\ell^2 = a$.

Seqüências divergentes para $+\infty$ ou $-\infty$.

Recorde que

Definição

Diremos que a seqüência $\{a_n\}$ diverge para $+\infty$ $(-\infty)$ se, dado $M > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geqslant M$ $(a_n \leqslant -M)$ para todo $n \geqslant N$. Escreveremos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty(-\infty)$ ou $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty(-\infty)$.

Diremos que a seqüência $\{a_n\}$ é eventualmente positiva (negativa) se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > 0$ $(a_n < 0)$, para todo $n \geqslant N$.

Valores de Aderência, Limite Superior e Limite Inferior

Teorema

a) *Se* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *e* $\{b_n\}$ *é limitada inferiormente, então* $a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

b) *Se* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *e* $\liminf\limits_{n\to\infty} b_n > 0$, *então* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_m = +\infty$.

c) *Seja* $\{a_n\}$ *uma seqüência com* $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $\{a_n\}$ *é eventualmente positiva e* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *se, e somente se,* $\dfrac{1}{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

d) *Sejam* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *são eventualmente positivas,* $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

d_1) *Se* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n > 0$ *e* $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *então* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$.

d_2) *Se* $\{a_n\}$ *é limitada e* $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, *então* $\dfrac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

a) Se $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\{b_n\}$ é limitada inferiormente, então $a_n + b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

De fato: Como $\{b_n\}$ é limitada inferiormente existe um número real $\ell > 0$ tal que $b_n \geqslant -\ell$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, dado $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geqslant M + \ell$, $\forall n \geqslant N$. Logo

$$a_n + b_n \geqslant M + \ell - \ell = M, \ \forall n \geqslant N.$$

Isto mostra que $a_n + b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

b) Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\liminf\limits_{n\to\infty} b_n > 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_m = +\infty$.

De fato: Como $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\liminf\limits_{n\to\infty} b_n = r > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\inf_{k\geqslant n} b_n \geqslant \frac{r}{2}$ para todo $n \geqslant N_1$. Como $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, dado $M > 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > \frac{2M}{r}$ para todo $n \geqslant N_2$. Disto segue que, para $n \geqslant N = \max\{N_1, N_2\}$

$$a_n \cdot b_n \geqslant \frac{2M}{r} \cdot \frac{r}{2} = M,\ \forall n \geqslant N.$$

c) Seja $\{a_n\}$ uma seqüência com $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $\{a_n\}$ é eventualmente positiva e $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ se, e somente se, $\dfrac{1}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.

De fato: Se $\{a_n\}$ é infinitésima e eventualmente positiva, dado $M > 0$ seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 < a_n < \frac{1}{M}$, $\forall n \geqslant N$. Logo $\frac{1}{a_n} > M, \forall n \geqslant N$, mostrando que $\dfrac{1}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$.
Reciprocamente, se $\dfrac{1}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, dado $\epsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\epsilon}$, $\forall n \geqslant N$. Segue que $0 < a_n < \epsilon$, $\forall n \geqslant N$. Isto prova o resultado.

d) Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ eventualmente positivas, $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

d_1) Se $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n > 0$ e $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$.

d_2) Se $\{a_n\}$ é limitada e $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, então $\dfrac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

De fato:

d_1) Se $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = r > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geqslant \frac{r}{2}$, $\forall n \geqslant N_1$, dado $M > 0$ seja $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < b_n < \frac{r}{2M}$, $\forall n \geqslant N_2$. Logo $\frac{a_n}{b_n} > \frac{r}{2} \cdot \frac{2M}{r} = M, \forall n \geqslant N = \max\{N_1, N_2\}$, mostrando que $\dfrac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

d_2) Seja $L > 0$ tal que $|a_n| \leq L$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $b_n > \frac{L}{\epsilon}$ (ou $\frac{1}{b_n} < \frac{\epsilon}{L}$), $\forall n \geqslant N$. Logo,

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - 0 \right| < L.\frac{\epsilon}{L} = \epsilon, \ \forall n \geqslant N. \text{ Mostrando que } \frac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Se $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ nada podemos afirmar de $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$.

Neste caso tudo pode ocorrer, $\{a_n + b_n\}$ pode convergir para qualquer número real, pode divergir para $+\infty$ or $-\infty$ ou pode oscialar.

Exemplo

Se $a_n = \sqrt{n+1}$ e $b_n = -\sqrt{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é fácil ver que $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Para ver o que ocorre com a seqüência $\{a_n + b_n\}$ observe que

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Segue de d_2) que $\{a_n + b_n\}$ é infinitésima.

Exemplo

Se $a > 1$, então a seqüência $\{a_n\}$ com $a_n = \frac{a^n}{n}$ diverge para $+\infty$.

De fato: Basta ver que $a = 1 + h$ com $h > 0$ e escrever

$$\frac{a^n}{n} = \frac{(1+h)^n}{n} = \frac{1}{n} + h + (n-1)\frac{h^2}{2!} + s_n.$$

O resultado segue aplicando a).

Mostre que, se $a > 1$, $a_n = \frac{a^n}{n^p}$ diverge para $+\infty$ para todo $p \in \mathbb{N}$.

Exemplo

Se $a > 1$, então a seqüência $\{a_n\}$ com $a_n = \frac{n!}{a^n}$ diverge para $+\infty$.

De fato: Basta escolher n_0 tal que $\frac{n_0}{a} > 2$ e escrever, para $n \geqslant n_0$, $a_n = \frac{n_0!}{a^{n_0}} \frac{n!}{n_0!} \frac{1}{a^{n-n_0}}$. Se $r = \frac{n_0!}{a^{n_0}}$ temos que

$$a_n = r\frac{n(n-1)\cdots(n_0+1)}{a^{n-n_0}} = r2^{n-n_0} + s_n = r(n+1-n_0) + \tilde{s}_n.$$

O resultado segue aplicando a).

Exemplo

Seja $\{a_n\}$ construída indutivamente por $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $n \geq 2$. Mostre que $\{a_n\}$ é convergente com limite 2.

Vamos inicialmente verificar que $\{a_n\}$ é crescente. De fato:

(i) $a_1 < a_2$

(ii) Suponhamos válido para $n-1$, isto é: $a_{n-1} < a_n$

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} < \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1} \ .$$

Assim $a_n < a_{n+1}$, portanto $\{a_n\}$ é crescente.

A seguir vamos verificar que 3 é limitante superior para o conjunto dos valores da seqüência $\{a_n\}$:

(i) $a_1 = \sqrt{2} < 3$

(ii) Suponhamos $a_{n-1} < 3$. Então

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} < \sqrt{2+3} < \sqrt{9} = 3.$$

Como $\{a_n\}$ é crescente e limitada superiormente segue que ela é convergente. Se ℓ é tal que $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$, como $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, temos

$$a_{n+1}^2 = 2 + a_n \ \text{ e } \ \ell^2 = 2 + \ell \ .$$

Isto nos dá $\ell = 2$ ou $\ell = -1$. Como $\ell > 0$ segue que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Exercício

a) *Se* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ *e* $\{b_n\}$ *é limitada superiormente, então* $a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

b) *Se* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ *e* $\liminf\limits_{n\to\infty} b_n > 0$, *então* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_m = -\infty$.

c) *Seja* $\{a_n\}$ *uma seqüência com* $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $\{a_n\}$ *é eventualmente negativa e* $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *se, e somente se,* $\dfrac{1}{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

d) *Sejam* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *são eventualmente negativas,* $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

d_1) *Se* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n < 0$ *e* $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *então* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$.

d_2) *Se* $\{a_n\}$ *é limitada e* $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, *então* $\dfrac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

e) *No item* d) *analise a situação em que* $\{a_n\}$ *é eventualmente positiva e* $\{b_n\}$ *é eventualmente negativa.*