Seqüências de Números Reais - Aula 04

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

11 de Março de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Subseqüências e Seqüências de Cauchy

Definição (Subseqüência)

Seja $\{a_n\}$ *uma seqüência de números reais. Diremos que* $\{b_n\}$ *é uma subseqüência de* $\{a_n\}$ *se existir uma função estritamente crescente* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que* $b_k = a_{s(k)}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Definição (Seqüências de Cauchy)

Seja $\{a_n\}$ *uma seqüência de números reais. Diremos que* $\{a_n\}$ *é de Cauchy se, dado* $\epsilon > 0$ *existir um número natural* $N = N(\epsilon)$ *tal que* $|a_n - a_m| < \epsilon$ *sempre que* $n, m \geqslant N$.

Propriedades

Teorema

a) Uma seqüência $\{a_n\}$ é convergente se, e somente se, toda subseqüência de $\{a_n\}$ é convergente (com mesmo limite).

b) Toda seqüência convergente é de Cauchy.

c) Toda seqüência limitada tem subseqüência convergente.

d) Toda seqüência de Cauchy é limitada.

e) Toda seqüência de Cauchy que tem uma subseqüência convergente é convergente.

f) Toda seqüência de Cauchy é convergente.

g) Toda seqüência crescente e limitada é convergente.

h) Toda seqüência decrescente e limitada é convergente.

a) Uma seqüência $\{a_n\}$ é convergente se, e somente se, toda subseqüência de $\{a_n\}$ é convergente (com mesmo limite).

De fato: Se toda subseqüência de $\{a_n\}$ é convergente como $\{a_n\}$ é uma particular subseqüência dela mesma segue o resultado.

Reciprocamente, se $\{a_n\}$ é convergente com limite a,

dado $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \epsilon$, $\forall\ n \geqslant N$.

Se $\{b_n\}$ é uma subseqüência de $\{a_n\}$, seja $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função estritamente crescente e tal que $b_n = a_{s(n)}$.

Claramente $s(n) \geqslant n$ e portanto $|b_n - a| = |a_{s(n)} - a| < \epsilon$, $\forall n \geqslant N$. Isto mostra que $\{b_n\}$ é convergente com limite a.

b) Toda seqüência convergente é de Cauchy.

De fato: Se $\{a_n\}$ é convergente com limite a,

dado $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall\ n \geqslant N$.

Assim

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,\ \forall n \geqslant N.$$

c) Toda seqüência limitada tem subseqüência convergente.

De fato: Se $\{a_n\}$ é limitada o conjunto $I = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ dos valores da seqüência é limitado e pode ser finito ou infinito.

Se I é finito, para algum elemento $a \in I$, $a_n = a$ para infinitos n. Seja $\mathbb{N}' = \{n : a_n = a\}$ e tomemos $s(0) =$menor elemento de $\mathbb{N}'$. Uma vez construídos $s(0), s(1), \cdots, s(n-1)$ seja $s(n)$ o menor elemento de $\mathbb{N}' \backslash \{s(0), s(1), \cdots, s(n-1)\}$. Segue que $\{b_n\}$, $b_n = a_{s(n)} = a$, é uma subseqüência convergente de $\{a_n\}$.

Se I é infinito, do Teorema de Bolzano-Weierstrass, I tem um ponto de acumulação a. Seja $\mathbb{N}_0=\{n: a_n\in(a-1,a+1), a_n\neq a\}$ e $s(0)$ o seu menor elemento. Seja $\epsilon_1=\frac{|a_{s(0)}-a|}{2}$, $\mathbb{N}_1=\{n: a_n\in(a-\epsilon_1,a+\epsilon_1), a_n\neq a\}$ e $s(1)$ o menor elemento de $\mathbb{N}_1$.

Construídos $s(0), s(1), \cdots, s(n-1)$ e $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{n-1}$ seja $\epsilon_n = \frac{|a_{s(n-1)}-a|}{2}$ e $s(n)$ o menor elemento de $\mathbb{N}_n=\{n: a_n\in(a-\epsilon_n,a+\epsilon_n), a_n\neq a\}$.

Claramente $\mathbb{N}_1 \supsetneqq \mathbb{N}_2 \supsetneqq \mathbb{N}_3 \supsetneqq \cdots$ e $\{b_n\}$, com $b_n = a_{s(n)}$, é uma subseqüência de $\{a_n\}$. Além disso, dado $\epsilon > 0$, se $N \in \mathbb{N}$ é tal que $\epsilon_N < \epsilon$. Assim, $s(n) \in \mathbb{N}_N$ e $|a_{s(n)} - a| < \epsilon_n < \epsilon$, $\forall\ n \geqslant N$. Isto mostra que $\{a_{s(n)}\}$ é uma subseqüência convergente (com limite a) de $\{a_n\}$. Observe ainda que todos os elementos da subseqüência $\{a_{s(n)}\}$ são distintos.

d) Toda seqüência de Cauchy é limitada.

De fato: Se $\{a_n\}$ de Cauchy existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < 1$, $\forall\ n \geqslant N$. Se $M = \max\{|a_1|, \cdots, |a_{N-1}|, |a_N + 1|, |a_N - 1|\}$, $a_n \in [-M, M]$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

e) Toda seqüência de Cauchy que tem uma subseqüência convergente é convergente.

De fato: Se $\{a_n\}$ de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall\ n \geqslant N_1$. Se $\{b_n\} = \{a_{s(n)}\}$ é uma subseqüência convergente (com limite a) de $\{a_n\}$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{s(n)} - a| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall\ n \geqslant N_2$. Seja $N = \max\{N_2, N_1\}$ e $n \geqslant N$. Logo

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{s(n)}| + |a_{s(n)} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isto mostra que $\{a_n\}$ converge para a.

f) Toda seqüência de Cauchy é convergente.

De fato: Isto segue diretamente de d), c) e e).

Exercício

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência. Dado $p \in \mathbb{N}$, mostre que e $\{a_n\}$ é convergente (de Cauchy) se, e somente se, $\{a_{n+p}\}$ é convergente (de Cauchy).

g) Toda seqüência crescente e limitada é convergente.

De fato: Seja $\{a_n\}$ uma seqüência crescente e limitada e $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Da definição de sup e do fato que $\{a_n\}$ é crescente, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < a_N \leqslant a_n \leqslant a$. Logo $|a_n - a| < \epsilon$, $\forall\ n \geqslant N$, e $\{a\}$ é convergente com limite a.

h) Toda seqüência decrescente e limitada é convergente.

Exercício: Mostre h).

Exemplo

Mostre que

- $\{a, a, a, \cdots\}$, $a \in \mathbb{R}$, é convergente
- $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots\}$ não é convergente.
- $\{n\}$ não é convergente.

Exemplo

Se $\mathbb{R} \ni a \geqslant 0$ mostre que a seqüência $\{a^n\}$ é convergente se $0 \leqslant a \leqslant 1$ e divergente se $a > 1$.

De fato: Se $a > 1$, $a = 1 + h$ com $h > 0$. Logo

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k > 1 + nh.$$

Da propriedade arquimediana da reta, a seqüência $\{a^n\}$ é ilimitada e portanto divergente.

Se $0 \leqslant a < 1$ $\{a^n\}$ é decrescente e limitada inferiormente por 0. Segue de h) que $\{a^n\}$ é convergente com limite $\ell \in [0,1)$. Ainda $a^{2n} = a^n \cdot a^n$. Logo, de a) e das propriedade do produto de seqüências convergentes $\ell = \ell^2$. Segue que $\ell = 0$.

Se $a = 1$, $a^n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto $\{a^n\}$ é convergente.

Exemplo

Mostre que, se $a \neq 1$, $1 + a + a^2 + \cdots a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ e que a seqüência $\{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\}$ é convergente se $0 \leqslant a < 1$ e divergente se $a > 1$.

De fato: Note que , se $s_n = 1 + a + a^2 + \cdots a^n$, $(1-a)s_n = 1 - a^{n+1}$ e $s_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, sempre que $a \neq 1$. O resultado agora segue do exemplo anterior.

Exemplo

Mostre que, a seqüência $\{a_n\}$ com $a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é convergente.

De fato: É claro que $\{a_n\}$ é crescente e que $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$, para $n \geqslant 2$. Logo $a_n \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} < 3$. Segue que $\{a_n\}$ é convergente. Denotaremos o seu limite por e.

Exemplo

Mostre que a seqüência $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ é convergente.

De fato: Em primeiro lugar note que

$b_n = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k}$ ou seja

$$b_n = 1 + \binom{n}{1} n^{-1} + \overbrace{\binom{n}{2}}^{=\frac{n(n-1)}{2!}} n^{-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} n^{-n+1} + \overbrace{\binom{n}{n} n^{-n}}^{=\frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}}$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots\underbrace{(1-\frac{n-1}{n})}_{=n^{-1}}$$

$$\leqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} = a_n < e$$

Como cada termo da soma que define b_n é crescente obtemos que b_n é crescente. Segue que $\{b_n\}$ é convergente com limite $\ell = \sup\{b_n : n \in N\} \leqslant e$.

Exemplo

Mostre que a seqüência $\{a^{\frac{1}{n}}\}$, com $a > 0$, é convergente.

De fato: Recorde que $a^{\frac{1}{n}}$ é o único número real positivo x tal que $x^n = a$. Logo se $x = a^{\frac{1}{n}}$ e $y = a^{\frac{1}{n+1}}$ temos $x^{n+1} = y^{n+1} \cdot x$ e portanto,

- Se $0 < a < 1$, então $x < 1$ e $\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = x < 1$ e $x < y$.
- Se $a > 1$, então $x > 1$ e $\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = x > 1$ e $x > y$.

Logo, se $a < 1$, $\{a^{\frac{1}{n}}\}$ é crescente e limitada superiormente por 1 portanto convergente e, se $a > 1$, $\{a^{\frac{1}{n}}\}$ é decrescente e limitada inferiormente por 1. Em qualquer dos casos é convergente com limite $\ell > 0$. Note que $a^{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n+1}}}$ e, de a) e das propriedades do quociente de seqüências, $\ell = 1$.

Exemplo

Mostre que a seqüência $\{c_n\}$ com $c_0 = 1$ e $c_n = n^{\frac{1}{n}}$, $n \geqslant 1$, é convergente.

De fato: Recorde que, para $n \geqslant 3$, $n > b_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Logo, para $n \geqslant 3$, $n^{n+1} > (n+1)^n$ e, consequentemente, $n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}}$.

Isto mostra que $\{n^{\frac{1}{n}}\}$ é decrescente e limitada inferiormente por 1. Segue de h) que $\{c_n\}$ é convergente com limite $\ell \geqslant 1$. Ainda $(2n)^{\frac{1}{2n}}(2n)^{\frac{1}{2n}} = (2n)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{n}}$ e portanto, de a) e do exemplo anterior, $\ell^2 = \ell$ e $\ell = 1$.

Teorema

Se $\{a_n\}$ é limitada e $\{b_n\}$ é infinitésima, então $\{a_n \cdot b_n\}$ é infinitésima.

Prova: Como $\{a_n\}$ é limitada seja $M > 0$ tal que $|a_n| \leqslant M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{b_n\}$ é infinitésima, dado $\epsilon > 0$ seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n| < \frac{\epsilon}{M}$, para todo $n \geqslant N$. Segue que

$$|a_n \cdot b_n| \leqslant M|b_n| < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon, \ \forall n \geqslant N.$$

Isto prova que $\{a_n \cdot b_n\}$ converge para 0 e conclui a demonstração.

Exemplo

Mostre que $\{\frac{n+\cos n}{n+1}\}$ é convergente.

Comparação e Confronto

Teorema (Comparação)

Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$ e existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geqslant N$, $a_n \leqslant b_n$, então $a \leqslant b$.

Prova: Dado $\epsilon > 0$ existe $N_1 \geqslant N$ tal que, para todo $n \geqslant N_1$,

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \quad \text{e} \quad b - \epsilon < b_n < b + \epsilon.$$

Logo, $\forall\ n \geqslant N_1$,

$$a - \epsilon < a_n \leqslant b_n < b + \epsilon.$$

Disto segue que $a - b < 2\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ e, portanto, $a - b \leqslant 0$.

Teorema (do Confronto)

Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$, $c_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ *e existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que, para todo* $n \geqslant N$, $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, *então* $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Prova: Dado $\epsilon > 0$ existe $N_1 \geqslant N$ tal que, para todo $n \geqslant N_1$,

$$\ell - \epsilon < a_n < \ell + \epsilon \ \text{ e } \ \ell - \epsilon < c_n < \ell + \epsilon.$$

Logo, $\forall\ n \geqslant N_1$,

$$\ell - \epsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < \ell + \epsilon.$$

Disto segue que $|b_n - \ell| < \epsilon$, $\forall\ n \geqslant N_1$ e que $\{b_n\}$ é convergente com limite ℓ.

Exemplo.

$$e := \lim_{n\to\infty} \overbrace{(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!})}^{a_n} = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}^{b_n} =: \ell$$

De fato: Como $a_n \geqslant b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, do Teorema (Comparação), $e \geqslant \ell$. Por outro lodo, se $n \geqslant p \geqslant 2$,

$$b_n \geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{p!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{p-1}{n})$$

do Teorema (Comparação) $\ell = \lim_{n\to\infty} b_n \geqslant a_p$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Segue que $\ell = \lim_{n\to\infty} b_n \geqslant \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty} a_n = e$. Isto mostra que $\ell = e$.