Números - Aula 03

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

08 de Março de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Teorema (Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$)

O conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ *será ilimitado sempre que* $x \neq 0$.

Prova: Se $x > 0$. Suponhamos, por absurdo, que A seja limitado e seja $L = \sup A$. Como $x > 0$, se $q \in \mathbb{Q}$ e $0 < q < x$, da definição de sup existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $L - q < mx$ e $L = \sup A < mx + q < (m+1)x$, o que é uma contradição.
A prova do caso $x < 0$ é análoga e será deixada como exercício. $\square$

Exemplo

(a) *Considere* $A = [0,1)$. *Então* -2 *e* 0 *são limitantes inferiores de* A *enquanto 1,* π *e 101 são limitantes superiores de* A.

(b) $\mathbb{N}$ *não é limitado (porque?) mas é limitado inferiormente por 0, pois* $0 \leqslant x$, *para todo* $x \in \mathbb{N}$.

(c) $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \leqslant \sqrt{2}\}$ *não é limitado (porque?), mas é limitado superiormente por* L, *onde* $L \geqslant \sqrt{2}$.

Corolário (1)

Para todo $\varepsilon > 0$, *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \frac{1}{n\sqrt{2}} < \varepsilon \quad e \quad 2^{-n} < \varepsilon.$$

Já sabemos (por construção) que, entre dois números reais distintos existe um número racional.

Provemos que entre dois números reais distintos existe um número irracional.

De fato: Sejam a e b reais distintos. Se $a < b$ e $\epsilon = b - a > 0$, do Corolário (1), escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n\sqrt{2}} < \frac{1}{n} < \epsilon$.

- Se $a \in \mathbb{Q}$, $r = a + \frac{1}{n\sqrt{2}} \in \mathbb{I}$ e $a < r < b$.
- Se $a \in \mathbb{I}$, $r = a + \frac{1}{n} \in \mathbb{I}$ e $a < r < b$.

Assim, entre dois números reais quaisquer, existe um número irracional.

Corolário

Qualquer intervalo aberto e não-vazio contém infinitos números racionais e infinitos números irracionais.

Corolário

Se $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$, *então* $\inf A = 0$.

Exemplo

(a) *Seja* $A = (0, 1]$. *Então* $0 = \inf A$ *e* $1 = \max A$.

(b) $\sqrt{2} = \{r \in \mathbb{Q} : r \leqslant s$ *para algum* $s \in \mathbb{Q}$ *tal que* $s^2 < 2\}$ *é um corte.*

(c) *Seja* $C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. *Então* $\sqrt{2} = \sup C$ *e* $-\sqrt{2} = \inf C$. *Note que* $-\sqrt{2}$ *e* $\sqrt{2}$ *não pertencem a* C.

Vamos provar que $\sqrt{2}$ é um corte. De fato, se $0 < r \in \mathbb{Q}$ e $r^2 < 2$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[2r + 1]\frac{1}{n} < 2 - r^2$ e $(r + \frac{1}{n})^2 < 2$. Todas as demais propriedades de corte estão satisfeitas trivialmente.

Vamos provar que $\sqrt{2} = \sup C$. Como todos os elementos x de C são racionais que satisfazem $x^2 < 2$, $\sqrt{2}$ é um limitante superior para C. Agora, se $0 < L < \sqrt{2}$, existe um racional $r \in (L, \sqrt{2})$ e $L^2 < r^2 < 2$. Logo $r \in C$, e L não é limitante superior para C e prova o resultado.

Proposição

Se $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ for limitado inferiormente (superiormente), então $-A = \{-x : x \in A\}$ será limitado superiormente (inferiormente) e $\inf A = -\sup(-A)$ ($\sup A = -\inf(-A)$).

De fato: Se A for limitado inferiormente,

- $\inf(A) \leqslant x$, para todo $x \in A$ e, dado $\epsilon > 0$, deve existir $a \in A$ tal que $a < \inf(A) + \epsilon$, ou (trocando o sinal),
- $-\inf(A) \geqslant -x$, para todo $-x \in -A$ e, dado $\epsilon > 0$, deve existir $b = -a \in -A$ tal que $-a > -\inf(A) - \epsilon$.

Agora, da Proposição (1), $-A$ será limitado superiormente e $\sup(-A) = -\inf(A)$.

Deixaremos, como exercício, a prova a outra afirmativa.

Corolário

Todo $A \neq \varnothing$ *e limitado inferiormente de* $\mathbb{R}$ *tem ínfimo.*

Corolário

Todo subconjunto limitado e não vazio de $\mathbb{R}$ *tem ínfimo e supremo.*

Vizinhança, Pontos Isolados e Pontos de Acumulação

Definição (Vizinhança)

Uma **vizinhança** *de $a \in \mathbb{R}$ é qualquer intervalo aberto da reta contendo a.*

Exemplo (δ-vizinhança)

Se $\delta > 0$, $V_\delta(a) := (a - \delta\,,\, a + \delta)$ é uma vizinhança de $a \in \mathbb{R}$ que será chamada $\delta-$vizinhança de a.

Definição (Ponto de Acumulação)

Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Se, para todo $\delta > 0$, existir $a \in V_\delta(b) \cap A$, $a \neq b$, então b será dito um **ponto de acumulação** *de A.*

Exemplo

(a) *O conjunto dos pontos de acumulação de* (a, b) *é* $[a, b]$.

(b) *Seja* $B = \mathbb{Z}$. *Então* B *não tem pontos de acumulação.*

(c) *Subconjuntos finitos de* $\mathbb{R}$ *não têm pontos de acumulação.*

d) *O conjunto dos pontos de acumulação de* $\mathbb{Q}$ *é* $\mathbb{R}$.

Definição (Ponto isolado)

Seja $B \subset \mathbb{R}$. *Um ponto* $b \in B$ *será dito um* **ponto isolado** *de* B, *se existir* $\delta > 0$ *tal que* $V_\delta(b)$ *não contém pontos de* B *distintos de* b.

Exemplo

(a) *Seja* $B = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$. *Então o conjunto dos pontos de acumulação de* B *é* $\{0\}$ *e o conjunto dos pontos isolados de* B *é o próprio conjunto* B.

(b) *O conjunto* $\mathbb{Z}$ *possui apenas pontos isolados.*

Observação:

- Existem conjuntos infinitos que não possuem pontos de acumulação (por exemplo $\mathbb{Z}$).
- Todo conjunto infinito e limitado possui ao menos um ponto de acumulação (veja proposição a seguir).

Proposição (Bolzano-Weierstrass)

Se A é um subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{R}$ então, A possui pelo menos um ponto de acumulação.

Prova: Se $A\subset[-L,L]$ e $[a_n,b_n], n\in\mathbb{N}$ escolhidos de modo que: $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$, $n\in\mathbb{N}$, $b_0=-a_0=L$, $b_n-a_n=2L/2^n$, $n\in\mathbb{N}^*$ e $[a_n,b_n]$ contém infinitos elementos de A. Seja $a=\sup\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$.

Note que $[a_n,b_n]\subset[a_j,b_j]$, $j\leqslant n$ e $[a_j,b_j]\subset[a_n,b_n]$, $j>n$. Em qualquer dos casos $a_n\leqslant b_j$ para todo $n,j\in\mathbb{N}$. Logo $a\leqslant b_j$, $j\in\mathbb{N}$.

Segue que $a_n\leqslant a=\sup\{a_n:n\in\mathbb{N}\}\leqslant b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, e $a\in\bigcap_{n\geqslant 1}[a_n,b_n]$.

Dado $\delta>0$ escolha $n\in\mathbb{N}$ tal que $2L/2^n<\delta$. Seque que $a\in[a_n,b_n]$ $\subset(a-\delta,a+\delta)=V_\delta(a)$ e a é ponto de acumulação de A. $\square$

Seqüências

Definição

Uma seqüência é uma função definida no conjunto dos números naturais, que a cada $n \in \mathbb{N}$ associa um número $a_n \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n \end{array}$$

Notações: $\left\{ \begin{array}{l} \{a_n\} \\ \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \end{array} \right.$

Exemplos:

Sendo $a_n = \dfrac{1}{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos a seqüência $\left\{1\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,, \cdots\right\}$

Sendo $a_n = 6$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos a seqüência constante:

$$\{6\,,\ 6\,,\ \ldots 6\,,\ \ldots\}$$

Sendo $\{a_n\}$ onde

$$\begin{aligned} &a_{2n+1} = 7,\ \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e} \\ &a_{2n} = 4,\ \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1}$$

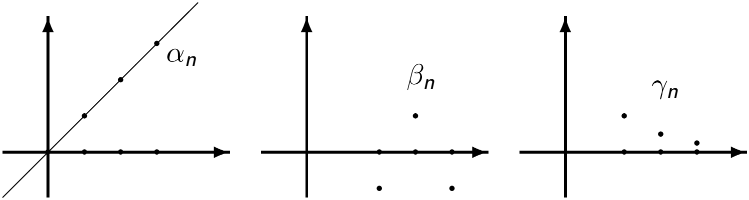
temos

$$\{4, 7,\ 4,\ 7,\ 4,\ \ldots\}$$

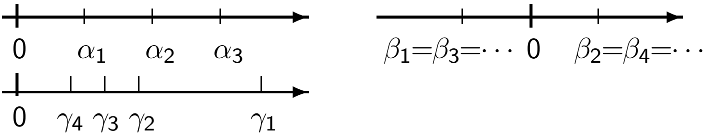
Consideremos as seqüências:

$$\alpha_n = n\,; \quad \beta_n = (-1)^n \quad \text{e} \quad \gamma_n = \frac{1}{n+1}\,.$$

Como funções eles podem ter os seus gráficos traçados, mas estes geralmente são pouco significativos.



Uma representação para seqüências que pode ser mais conveniente é obtida colocando-se os pontos a_1, a_2, a_3, ... sobre uma reta.



Esta representação pode mostrar para onde a seqüência "tende".

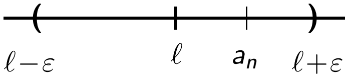
A seqüência (α_n) "diverge" para infinito, a seqüência (β_n) é dita "oscilante" e a seqüência (γ_n) "converge para 0".

Todas estas frases podem ser definidas precisamente, e é o que faremos a seguir.

Definição

A seqüência $\{a_n\}$ é dita **convergente com limite ℓ** *se para cada $\varepsilon > 0$ dado, $\exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ $|a_n - \ell| < \varepsilon$.*

Note que: $|a_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$.



A partir de um certo N todos os a_n estão no intervalo $(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$.

Da arbitrariedade do ε os a_n vão se juntando em torno de ℓ .

Notação: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ ou $a_n \to \ell$ ou $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell$.

Observação 1. Note que a definição anterior é extatamente a mesma que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$, vista no cálculo para funções definidas em conjuntos que não são limitados superiormente no caso em que este domínio é $\mathbb{N}$.

Observação 2. Quando uma seqüência tem limite 0 ela será dita, frequentemente, **infinitésima**.

Exemplos:

- $\dfrac{1}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

  De fato: Dado $\varepsilon > 0$, da propriedade Arquimediana da reta, existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $N\epsilon > 1$. Logo, para todo $n \geq N$ temos

  $$0 - \varepsilon < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < 0 + \varepsilon.$$

- $\dfrac{n}{n+1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

  De fato: Dado $\varepsilon > 0$.

  Queremos encontrar $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $n > N \Rightarrow \left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$

  mas $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$ e, da propriedade Archimediana da reta, existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $(N+1)\epsilon > 1$. Logo, se $n \geq N$

  $$1 - \epsilon < \frac{n}{n+1} < 1 + \epsilon.$$

Definição

Uma seqüência $\{a_n\}$ *será* **divergente** *quando ela* **não** *for convergente.*

(I) **Seqüência divergente para $+\infty$**
Uma seqüência $\{a_n\}$ é dita divergente para $+\infty$ quando dado $K > 0$, arbitrário, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow a_n > K$.

(II) **Seqüência divergente para $-\infty$**
Uma seqüência $\{a_n\}$ é dita divergente para $-\infty$ quando dado $K > 0$, arbitrário, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow a_n < -K$.

(III) **Seqüência oscilante**
Uma seqüência $\{a_n\}$ é dita oscilante quando diverge, mas não diverge para $+\infty$ e nem para $-\infty$.

Observação: Como seqüências são funções elas podem ser multiplicadas por uma constante e duas seqüências podem ser somadas ou multiplicadas.

Operações com Seqüências

Assim, dadas duas seqüências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ e um número real c, definimos:

- $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$
- $c \cdot \{a_n\} = \{c \cdot a_n\}$
- $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$
- e se $b_n \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}.$

Definição

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números reais. Diremos que $\{a_n\}$ é limitada se sua imagem for um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$.

Teorema

Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números reais.

a) $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \Leftrightarrow$ toda vizinhança de a contém todos exceto possivelmente um número finito dos a_n's.

b) O limite é único.

c) $\{a_n\}$ é convergente, então $\{a_n\}$ é limitada (não vale a volta).

d) Se $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > 0$, $\forall n \geq N$.

e) Se $A \subset \mathbb{R}$ e a é um ponto de acumulação de A, então existe uma seqüência $\{a_n\}$ de elementos de A que converge para a.

Teorema

Seja $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, $b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} b$ *e* $c \in \mathbb{R}$, *então*

a) $a_n + b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a + b$.

b) $c.a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} c.a$

c) $a_n.b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a.b$.

d) Se $b \neq 0$ *e* $b_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $a_n/b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a/b$.

Subseqüências e Seqüências de Cauchy

Definição (Subseqüência)

Seja $\{a_n\}$ *uma seqüência de números reais. Diremos que* $\{b_n\}$ *é uma subseqüência de* $\{a_n\}$ *se existir uma função estritamente crescente* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que* $b_k = a_{s(k)}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Definição (Seqüências de Cauchy)

Seja $\{a_n\}$ *uma seqüência de números reais. Diremos que* $\{a_n\}$ *é de Cauchy se, dado* $\epsilon > 0$ *existir um número natural* $N = N(\epsilon)$ *tal que* $|a_n - a_m| < \epsilon$ *sempre que* $n, m \geqslant N$.

Propriedades

Teorema

a) Uma seqüência $\{a_n\}$ é convergente se, e somente se, toda subseqüência de $\{a_n\}$ é convergente (com mesmo limite).

b) Toda seqüência convergente é de Cauchy.

c) Toda seqüência limitada tem subseqüência convergente.

d) Toda seqüência de Cauchy é limitada.

e) Toda seqüência de Cauchy que tem subseqüência convergente é convergente.

f) Toda seqüência de Cauchy é convergente.

g) Toda seqüência crescente e limitada é convergente.

h) Toda seqüência decrescente e limitada é convergente.

a) Uma seqüência $\{a_n\}$ é convergente se, e somente se, toda subseqüência de $\{a_n\}$ é convergente (com mesmo limite).

De fato: Se toda subseqüência de $\{a_n\}$ é convergente como $\{a_n\}$ é uma particular subseqüência dela mesma segue o resultado.

Reciprocamente, se $\{a_n\}$ é convergente com limite a,

dado $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \epsilon$, $\forall\ n \geqslant N$.

Se $\{b_n\}$ é u ma subseqüência de $\{a_n\}$, seja $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função estritamente crescente e tal que $b_n = a_{s(n)}$.

Claramente $s(n) \geqslant n$ e portanto $|b_n - a| = |a_{s(n)} - a| < \epsilon$, $\forall n \geqslant N$. Isto mostra que $\{b_n\}$ é convergente com limite a.

b) Toda seqüência convergente é de Cauchy.

De fato: Se $\{a_n\}$ é convergente com limite a,

dado $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall\ n \geqslant N$.

Assim

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,\ \forall n \geqslant N.$$

c) Toda seqüência limitada tem subseqüência convergente.

De fato: Se $\{a_n\}$ é limitada o conjunto $I = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ dos valores da seqüência pode ser finito ou infinito.

Se I é finito teremos, para alum elemento $a \in I$, $a_n = a$ para intinitos n. Seja $\mathbb{N}' = \{n : a_n = a\}$ e tomemos $s(0) =$menor elemento de $\mathbb{N}'$. Uma vez construídos $s(0), s(1), \cdots, s(n-1)$ seja $s(n)$ o menor elemento de $\mathbb{N}' \backslash \{s(0), s(1), \cdots, s(n-1)\}$. Segue que $\{b_n\}$, $b_n = a_{s(n)} = a$, é uma subseqüência convergente de $\{a_n\}$.

Se I é infinito, do Teorema de Bolzano-Weierstrass, I tem um ponto de acumulação a. Seja $\mathbb{N}_0 = \{n : a_n \in (a-1, a+1), a_n \neq a\}$ e $s(0)$ o seu menor elemento. Seja $\epsilon_1 = \frac{|a_{s(0)}-a|}{2}$, $\mathbb{N}_1 = \{n : a_n \in (a-\epsilon_1, a+\epsilon_1), a_n \neq a\}$ e $s(1)$ o menor elemento de $\mathbb{N}_1$.

Construídos $s(0), s(1), \cdots, s_{n-1}$ e $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{n-1}$ seja $\epsilon_n = \frac{|a_{s(n-1)}-a|}{2}$ e $s(n)$ o menor elemento de $\mathbb{N}_n = \{n : a_n \in (a-\epsilon_n, a+\epsilon_n), a_n \neq a\}$.

Claramente $\mathbb{N}_1 \supsetneqq \mathbb{N}_2 \supsetneqq \mathbb{N}_3 \supsetneqq \cdots$ e $\{b_n\}$, com $b_n = a_{s(n)}$, é uma subseqüência de $\{a_n\}$. Além disso, dado $\epsilon > 0$, se $N \in \mathbb{N}$ é tal que $\epsilon_N < \epsilon$, $s(n) \in \mathbb{N}_N$ e $|a_{s(n)} - a| < \epsilon_N < \epsilon$, $\forall\ n \geqslant N$. Isto mostra que $\{a_{s(n)}\}$ é uma subseqüência convergente (com limite a) de $\{a_n\}$. Observe ainda que todos os elementos da subseqüência $\{a_{s(n)}\}$ são distintos.

d) Toda seqüência de Cauchy é limitada.

De fato: Se $\{a_n\}$ de Cauchy existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < 1$, $\forall\ n \geqslant N$. Se $M = \max\{|a_1|, \cdots, |a_{N-1}|, |a_N + 1|, |a_N - 1|\}$, $a_n \in [-M, M]$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

e) Toda seqüência de Cauchy que tem subseqüência convergente é convergente.

De fato: Se $\{a_n\}$ de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall\ n \geqslant N_1$. Se $\{b_n\} = \{a_{s(n)}\}$ é uma subseqüência convergente (com limite a) de $\{a_n\}$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{s(n)} - a| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall\ n \geqslant N_2$. Seja $N = \max\{N_2, N_1\}$ e $n \geqslant N$. Logo

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{s(n)}| + |a_{s(n)} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isto mostra que $\{a_n\}$ converge para a.

f) Toda seqüência de Cauchy é convergente.

De fato: Isto segue diretamente de d), c) e e).

g) Toda seqüência crescente e limitada é convergente.

De fato: Seja $\{a_n\}$ uma seqüência crescente e limitada e $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Da definição de sup e do fato que $\{a_n\}$ é crescente, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < a_N \leqslant a_n \leqslant a$ para todo $n \geqslant N$. Logo $|a_n - a| < \epsilon$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ e $\{a\}$ é convergente com limite a.

h) Toda seqüência decrescente e limitada é convergente.

Exercício: Mostre h).