Números - Aula 02

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

06 de Março de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Cortes de Dedekind

Definição (Cortes de Dedekind-1872)

Um corte é um subconjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ com as seguintes propriedades

- $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$,
- *Se $p \in \alpha$ e $\mathbb{Q} \ni q < p$, então $q \in \alpha$ e*
- *Se $p \in \alpha$, existe $r \in \alpha$ com $p < r$.*

Observação

Note que:

- *Se α é um corte, $p \in \alpha$ e $q \notin \alpha$, então $p < q$.*
- *Se α é um corte, $r \notin \alpha$ e $r < s$, então $s \notin \alpha$.*

Definição

Diremos que $\alpha < \beta$ *se* $\alpha \subsetneq \beta$

Proposição

Se α, β, γ *são cortes*

- $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ *implica que* $\alpha < \gamma$.
- *Exatamente uma das seguintes relações é válida:* $\alpha < \beta$ *ou* $\alpha = \beta$ *ou* $\beta < \alpha$.
- *Todo subconjunto não vazio e limitado superiormente de* $\mathbb{R}$ *tem supremo.*

Definição (Soma)

- *Se* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *definimos* $\alpha + \beta$ *como o conjunto de todos os racionais da forma* $r + s$ *com* $r \in \alpha$ *e* $s \in \beta$*.*
- $0^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 0\}$

Definição (Soma)

- *Se* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *definimos* $\alpha + \beta$ *como o conjunto de todos os racionais da forma* $r + s$ *com* $r \in \alpha$ *e* $s \in \beta$*.*
- $0^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 0\}$

Mostre que $\alpha + \beta$ e 0^* são cortes.

Claramente a adição é comutativa e associativa e $\alpha + 0^* = \alpha$ para todo corte α.

Definição (Soma)

- *Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definimos $\alpha + \beta$ como o conjunto de todos os racionais da forma $r + s$ com $r \in \alpha$ e $s \in \beta$.*
- $0^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 0\}$

Mostre que $\alpha + \beta$ e 0^* são cortes.

Claramente a adição é comutativa e associativa e $\alpha + 0^* = \alpha$ para todo corte α.

Proposição

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ existe um único $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha + \beta = 0^*$. O corte β é dado por

$$\beta = \{-p \in \mathbb{Q} : p - r \notin \alpha \text{ para algum } r \in \mathbb{Q},\ r > 0\}$$

e é denotado por $-\alpha$.

Prova: De fato:

- Se $p \notin \alpha$ então $s = p + 1 \notin \alpha$ e $-s \in -\alpha$, logo $-\alpha \neq \varnothing$. Da definição de $-\alpha$, se $p \in \alpha$ então $-p \notin -\alpha$, logo $-\alpha \neq \mathbb{Q}$.
- Se $-p \in -\alpha$ e $-q < -p$ então existe $\mathbb{Q} \ni r > 0$ tal que $q > q - r > p - r \notin \alpha$ e portanto $-q \in -\alpha$.
- Agora, se $-p \in -\alpha$ existe $\mathbb{Q} \ni 2r > 0$ tal que $p - 2r \notin \alpha$ e portanto $p - r \notin \alpha$ e $-p < -p + r \in -\alpha$.

Resta mostrar que $\alpha + (-\alpha) = 0^*$. Se $r \in \alpha$ e $s \in -\alpha$ então $-s \notin \alpha$ e $r < -s$, ou seja, $r + s < 0$. Segue que $\alpha + (-\alpha) \subset 0^*$. Por outro lado, se $-2r \in 0^*$ com $r > 0$, existe um inteiro n tal que $nr \in \alpha$ e $(n+1)r \notin \alpha$. Escolha $p = -(n+2)r \in -\alpha$ e escreva $-2r = nr + p$. Isto conclui a demonstração.$\square$

Observação

Se $\alpha = q^*$ podemos definir $-\alpha = (-q)^*$. Com esta definição $-\alpha$ é um corte. Além disso, se $r < q$ e $s < -q$ então $r + s < 0$ e, se $-2t < 0$, $-(q+t) + (q-t) = -2t$ provando que $\alpha + (-\alpha) = 0^*$.

Definição (Produto)

- *Se α, β são cortes,*

$$\alpha\cdot\beta = \begin{cases} \alpha \cdot 0^* = 0^*, \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ \{p \in \mathbb{Q} : \exists\ 0 < r \in \alpha \text{ e } 0 < s \in \beta \text{ tais que } p \leqslant rs\}, \ \alpha, \beta > 0^* \\ (-\alpha)(-\beta) \text{ se } \alpha, \beta < 0^* \\ -[(-\alpha)\beta] \text{ se } \alpha < 0^* \text{ e } \beta > 0^* \\ -[\alpha(-\beta)] \text{ se } \alpha > 0^* \text{ e } \beta < 0^* \end{cases}$$

- $1^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 1\}$.

Mostre que $\alpha \cdot \beta$ é um corte.

$\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo.

Denotamos o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$. Temos $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ e todo número real que não é racional é dito **irracional** ($\sqrt{2}$ é irracional).

Teorema

A quádrupla $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ satisfaz as condições (A1) a (A4), (M1) a (M4), (D), (O1) a (O4), (OA) e (OM) como na seção anterior e portanto é um corpo ordenado. Além disso $\mathbb{R}$ é completo.

$\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo.

Denotamos o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$. Temos $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ e todo número real que não é racional é dito **irracional** ($\sqrt{2}$ é irracional).

Teorema

A quádrupla $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ *satisfaz as condições (A1) a (A4), (M1) a (M4), (D), (O1) a (O4), (OA) e (OM) como na seção anterior e portanto é um corpo ordenado. Além disso* $\mathbb{R}$ *é completo.*

Mostre o teorema acima.

Módulo de um Número Real

Definição

Seja $x \in \mathbb{R}$. O **módulo** *ou valor absoluto de x é dado por*

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Disto segue que $|x| \geqslant 0$ e $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo

Mostre que $|x|^2 = x^2$, *ou seja, o quadrado de um número real não muda quando se troca seu sinal.*

Exemplo

A equação $|x| = r$, *com* $r > 0$, *tem como soluções os elementos do conjunto* $\{r, -r\}$.

Distância

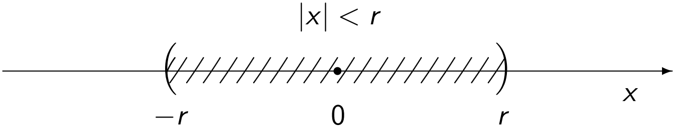
Sejam P e Q dois pontos da reta real de abscissas x e y respectivamente. Então a **distância** de P a Q (ou de x a y) é definida por $|x - y|$. Assim $|x - y|$ é a **medida** do segmento PQ. Em particular, como $|x| = |x - 0|$, então $|x|$ é a distância de x a 0.

O próximo exemplo diz que a distância de x a 0 é menor do que r, com $r > 0$, se e somente se x estiver entre $-r$ e r.

Exemplo

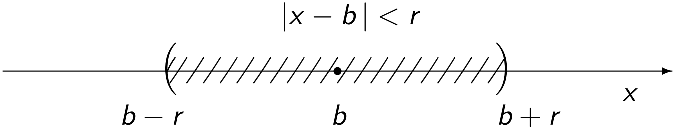
Seja com $r > 0$. *Então* $\quad |x| < r \quad \Longleftrightarrow \quad -r < x < r$.

A seguinte figura ilustra o significado geométrico do exemplo.



O intervalo $(-r, r)$ é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}$ que distam de 0 menos que r (‘bola’ de raio r em torno de 0).

Analogamente $|x-b|<r$, $r>0$, se e somente se, $b-r<x<b+r$. Geometricamente,



Exemplo

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, *vale*

$$\boxed{|xy| = |x|\,|y|\,.}$$

Exemplo (Desigualdade triangular)

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, *vale*

$$\boxed{|x+y| \leqslant |x| + |y|\,.}$$

Resolução: Somando $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ e $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$ obtemos $-|x| - |y| \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|.$ $\square$

Definição

Um **intervalo** *em* $\mathbb{R}$ *é um subconjunto de* $\mathbb{R}$ *que tem uma das seguintes formas:*

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ **Intervalo fechado**,
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ **Intervalo aberto**,
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$,
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$,
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$,
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$,
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$,
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Limitação de Subconjuntos de $\mathbb{R}$

Definição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ *será dito* **limitado**, *se existir* $L > 0$ *tal que* $|x| \leqslant L$, *para todo* $x \in A$.

Proposição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ *será limitado se, e somente se, existir* $L > 0$ *tal que* $A \subset [-L, L]$.

Exemplo

(a) $A = [0,1]$ *é limitado*

(b) $\mathbb{N}$ *não é limitado (será mostrado mais tarde)*

(c) $B = \left\{ \dfrac{2^n - 1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ *é limitado*

(d) $C = \left\{ \dfrac{2n - 1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$ *é limitado.*

Definição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será dito **ilimitado**, *se ele não for limitado.*

Proposição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será ilimitado se, e somente se, para todo $L > 0$, existir $x \in A$ tal que $|x| > L$.

Limitante Superior e Inferior

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$.

- *A será dito* **limitado superiormente**, *se existir $L \in \mathbb{R}$ tal que $x \leqslant L$, para todo $x \in A$.*
  Neste caso, L será chamado **limitante superior** *de A.*

- *A será dito* **limitado inferiormente**, *se existir ℓ tal que $x \geqslant \ell$, para todo $x \in A$.*
  Neste caso, ℓ será chamado **limitante inferior** *de A.*

Segundo a definição acima, podemos notar que $A \subset \mathbb{R}$ será limitado se, e somente se, A for limitado superiormente e inferiormente.

Supremo

Definição (Supremo)

Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente, $A \neq \varnothing$. Diremos que $\bar{L} \in \mathbb{R}$ é o supremo de A (escreveremos $\bar{L} = \sup A$) se for um limitante superior de A e para qualquer limitante superior L de A, tivermos $\bar{L} \leqslant L$.

- Quando $\bar{L} = \sup A \in A$, $\bar{L}$ será chamado **máximo** de A e escreveremos $\bar{L} = \max A$.
- Vimos que todo subconjunto não vazio e limitado superiormente de $\mathbb{R}$ tem **supremo**.

Ínfimo

Definição (Ínfimo)

Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente, $A \neq \varnothing$. Diremos que $\bar{\ell} \in \mathbb{R}$ é o ínfimo de A (escreveremos $\bar{\ell} = \inf A$) se for um limitante inferior de A e para qualquer limitante inferior ℓ de A, tivermos $\bar{\ell} \geqslant \ell$.

- Quando $\bar{\ell} = \inf A \in A$, $\bar{\ell}$ será chamado **mínimo** de A e escreveremos $\bar{\ell} = \min A$.
- Veremos que todo subconjunto não vazio e limitado inferiormente de $\mathbb{R}$ tem **ínfimo**.

Proposição (1)

Dado $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ *limitado superiormente,* $L = \sup A$ *se, e somente se,*

(a) *L for limitante superior de A e,*

(b) *para todo $\varepsilon > 0$, existir $a \in A$ tal que $a > L - \varepsilon$.*

Analogamente temos

Proposição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ *limitado inferiormente,* $A \neq \varnothing$*. Então* $L = \inf A$ *se, e somente se,*

(a) L *for limitante inferior de* A*.*

(b) *Para todo* $\varepsilon > 0$*, existir* $a \in A$ *tal que* $a < L + \varepsilon$*.*

Teorema (Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$)

O conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ será ilimitado sempre que $x \neq 0$.

Prova: Se $x > 0$. Suponhamos, por absurdo, que A seja limitado e seja $L = \sup A$. Como $x > 0$, se $q \in \mathbb{Q}$ e $0 < q < x$, da definição de sup existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $L - q < mx$ e $L = \sup A < mx + q < (m+1)x$, o que é uma contradição.

A prova do caso $x < 0$ é análoga e será deixada como exercício. □

Exemplo

(a) *Considere* $A = [0, 1)$*. Então* -2 *e* 0 *são limitantes inferiores de A enquanto 1,* π *e 101 são limitantes superiores de A.*

(b) $\mathbb{N}$ *não é limitado (porque?) mas é limitado inferiormente por 0, pois* $0 \leqslant x$*, para todo* $x \in \mathbb{N}$*.*

(c) $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \leqslant \sqrt{2}\}$ *não é limitado (porque?), mas é limitado superiormente por L, onde* $L \geqslant \sqrt{2}$*.*

Corolário (1)

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \frac{1}{n\sqrt{2}} < \varepsilon \quad e \quad 2^{-n} < \varepsilon.$$

Já sabemos (por construção) que, entre dois números reais distintos existe um número racional.

Provemos que entre dois números reais distintos existe um número irracional.

De fato: Sejam a e b reais distintos. Se $a<b$ e $\epsilon=b-a>0$, do Corolário (1), escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n\sqrt{2}} < \frac{1}{n} < \epsilon$.

- Se $a \in \mathbb{Q}$, $r = a + \frac{1}{n\sqrt{2}} \in \mathbb{I}$ e $a < r < b$.
- Se $a \in \mathbb{I}$, $r = a + \frac{1}{n} \in \mathbb{I}$ e $a < r < b$.

Assim, entre dois números reais quaisquer, existe um número irracional.

Corolário

Qualquer intervalo aberto e não-vazio contém infinitos números racionais e infinitos números irracionais.

Corolário

$$\textit{Se } A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}, \textit{ então } \inf A = 0.$$

Exemplo

(a) Seja $A = (0, 1]$. *Então* $0 = \inf A$ *e* $1 = \max A$.

(b) $\sqrt{2} = \{r \in \mathbb{Q} : r \leqslant 0\} \cup \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$ *é um corte.*

(c) Seja $C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. *Então* $\sqrt{2} = \sup C$ *e* $-\sqrt{2} = \inf C$. *Note que* $-\sqrt{2}$ *e* $\sqrt{2}$ *não pertencem a* C.

Vamos provar que $\sqrt{2}$ é um corte. De fato, se $0 < r \in \mathbb{Q}$ e $r^2 < 2$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[2r + 1]\frac{1}{n} < 2 - r^2$ e $(r + \frac{1}{n})^2 < 2$. Todas as demais propriedades de corte estão satisfeitas trivialmente.

Vamos provar que $\sqrt{2} = \sup C$. Como todos os elementos x de C são racionais que satisfazem $x^2 < 2$, $\sqrt{2}$ é um limitante superior para C. Agora, se $0 < L < \sqrt{2}$, existe um racional $r \in (L, \sqrt{2})$ e $L^2 < r^2 < 2$. Logo $r \in C$, e L não é limitante superior para C e prova o resultado.

Proposição

Se $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ for limitado inferiormente (superiormente), então $-A = \{-x : x \in A\}$ será limitado superiormente (inferiormente) e $\inf A = -\sup(-A)$ $(\sup A = -\inf(-A))$.

De fato: Se A for limitado inferiormente,

- $\inf(A) \leqslant x$, para todo $x \in A$ e, dado $\epsilon > 0$, deve existir $a \in A$ tal que $a < \inf(A) + \epsilon$, ou (trocando o sinal),
- $-\inf(A) \geqslant -x$, para todo $-x \in -A$ e, dado $\epsilon > 0$, deve existir $b = -a \in -A$ tal que $-a > -\inf(A) - \epsilon$.

Agora, da Proposição (1), $-A$ será limitado superiormente e $\sup(-A) = -\inf(A)$.

Deixaremos, como exercício, a prova a outra afirmativa.

Corolário

Todo $A \neq \varnothing$ e limitado inferiormente de $\mathbb{R}$ tem ínfimo.

Corolário

Todo subconjunto limitado e não vazio de $\mathbb{R}$ tem ínfimo e supremo.

Vizinhança, Pontos Isolados e Pontos de Acumulação

Definição (Vizinhança)

Uma **vizinhança** *de* $a \in \mathbb{R}$ *é qualquer intervalo aberto da reta contendo* a *.*

Exemplo (δ-vizinhança)

Se $\delta > 0$, $V_\delta(a) := (a - \delta\,,\ a + \delta)$ *é uma vizinhança de* $a \in \mathbb{R}$ *que será chamada* $\delta-$*vizinhança de* a*.*

Definição (Ponto de Acumulação)

Sejam $A \subset \mathbb{R}$ *e* $b \in \mathbb{R}$*. Se, para todo* $\delta > 0$*, existir* $a \in V_\delta(b) \cap A$*,* $a \neq b$*, então* b *será dito um* **ponto de acumulação** *de* A*.*

Exemplo

(a) O conjunto dos pontos de acumulação de (a, b) é $[a, b]$.

(b) Seja $B = \mathbb{Z}$. Então B não tem pontos de acumulação.

(c) Subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$ não têm pontos de acumulação.

d) O conjunto dos pontos de acumulação de $\mathbb{Q}$ é $\mathbb{R}$.

Definição (Ponto isolado)

Seja $B \subset \mathbb{R}$. Um ponto $b \in B$ será dito um **ponto isolado** *de B, se existir $\delta > 0$ tal que $V_\delta(b)$ não contém pontos de B distintos de b.*

Exemplo

(a) *Seja* $B = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$. *Então o conjunto dos pontos de acumulação de* B *é* $\{0\}$ *e o conjunto dos pontos isolados de* B *é o próprio conjunto* B.

(b) *O conjunto* $\mathbb{Z}$ *possui apenas pontos isolados.*

Observação:

- Existem conjuntos infinitos que não possuem pontos de acumulação (por exemplo $\mathbb{Z}$).
- Todo conjunto infinito e limitado possui ao menos um ponto de acumulação (veja proposição a seguir).

Proposição (Bolzano-Weierstrass)

Se A é um subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{R}$ então, A possui pelo menos um ponto de acumulação.

Prova: Se $A \subset [-L, L]$ e $[a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$ escolhidos de modo que: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, $b_0 = -a_0 = L$, $b_n - a_n = 2L/2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $[a_n, b_n]$ contém infinitos elementos de A. Seja $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Note que $[a_n, b_n] \subset [a_j, b_j]$, $j \leqslant n$ e $[a_j, b_j] \subset [a_n, b_n]$, $j > n$. Em qualquer dos casos $a_n \leqslant b_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo $a \leqslant b_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Segue que $a_n \leqslant a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $a \in \bigcap_{n \geqslant 1} [a_n, b_n]$.

Dado $\delta > 0$ escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $2L/2^n < \delta$. Seque que $a \in [a_n, b_n] \subset (a - \delta, a + \delta) = V_\delta(a)$ e a é ponto de acumulação de A. $\square$