Informações Essenciais e Números
SMA 0380 - Análise

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

04 de Março de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Acesso ao ambiente de aprendizado eletrônico

E-DISCIPLINAS USP

Todas as informações e material da disciplina estão disponíveis em https://edisciplinas.usp.br/acessar/

Para o seu primeiro acesso

ID do Usuário: ID or Mail USP

Senha: Sua senha

Você também poderá acessar diversas informações da disciplina em https://sites.icmc.usp.br/andcarva/sma0380/Analise_SMA0380.html

Ementa

Números (Revisão):

Números naturais, inteiros, racionais e corpos
Números reais: Cortes de Dedekind

Seqüências e séries de números reais:

Seqüências: Definição e propriedades
Convergência de seqüências
Seqüências de Cauchy e Completamento
Séries: Definição e propriedades
Séries de termos positivos
Séries de potências
Testes da raiz e da razão
Séries de rearranjadas

Continuidade:

Funções Contínuas
Limites de funções
Funções contínuas
Funções contínuas e compactos
Funções contínuas e conexos
Descontinuidades

A Diferenciabilidade:

Definição e propriedades
O Teorema do valor médio
Fórmula de Taylor
Séries de Potências e analiticidade

As integrais de Riemann-Stieltjes:

- Definição e propriedades
- Integração e Diferenciação

Seqüências e séries de funções:

- Convergência uniforme
- Convergência uniforme e continuidade
- Convergência uniforme e diferenciabilidade
- Convergência uniforme e integração
- Famílias equicontínuas
- O Teorema de Stone-Weierstrass

Provas

Provas

Prova 1 (Peso 2): 12/04 das 08:10 às 09:50hs

Prova 2 (Peso 2): 17/05 das 08:10 às 09:50hs

Prova 2 (Peso 3): 21/06 das 08:10 às 09:50hs

Prova Substitutiva (do bem): 28/06 das 08:10 às 09:50hs

Período de Recuperação: 11 a 19 de Julho de 2024

Calendário de Aulas

Horário das Aulas: 08:10–09:50hs (segunda, quarta e sexta)
Local das Aulas: Sala 5-004 - ICMC

Calendário de Aulas

Mês	Seg	Qua	Sex	Seg	Qua	Sex	Seg	Qua	Sex	Seg	Qua	Sex	Seg	Qua	Sex
Mar	04	06	08	11	13	15	18	20	22	**25**	**27**	**29**			
Abr	01	03	05	08	10	**12**	15	17	19	22	24	26	29		
Mai		**01**	03	06	08	10	13	15	**17**	20	22	24	27	29	**31**
Jun	03	05	07	10	12	14	17	19	**21**	24	26	**28**			
Jul	01														

Atendimento

Sala 3-123 - Quarta Feira das 14:00 às 16:00hs.

Entre em contato se precisar de atendimento fora desse horário.

Recuperação de Aprendizado

Você teve que perder alguma prova?

Caso necessite de recuperação de aprendizado por razões médicas ou algum outro compromisso oficial, você deverá fazer a prova substitutiva no dia 28/06 às 08:10hs.

Informe-se na Secretaria da Graduação do seu Curso para saber se você pode requerer a recuperação de aprendizado e a documentação necessária.

O período de recuperação será de 11 a 19 de Julho de 2024. A prova será marcada oportunamente.

Notação:

$\mathbb{N}$ = conjunto dos números naturais

$\mathbb{Z}$ = conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Q}$ = conjunto dos números racionais

$\mathbb{R}$ = conjunto dos números reais.

Os Números Racionais

Os números racionais são construídos tomando-se o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e identificando os pares $(a, b) \sim (c, d)$ para os quais $ad = bc$. Representamos um par (a, b) em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ por $\frac{a}{b}$.

A **soma** e o **produto** dos números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são definidas por:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad+bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}.$$

Chamamos **adição** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa sua soma $x + y \in \mathbb{Q}$ e chamamos **multiplicação** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa seu produto $x \cdot y \in \mathbb{Q}$.

A terna $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, ou seja, $\mathbb{Q}$ munido das operações "$+$" e "$\cdot$" é um corpo, isto é, satisfaz as propriedades:

Propriedades da Adição

(A1) (**associativa**) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(A2) (**comutativa**) $x + y = y + x$, $\forall\ x, y \in \mathbb{Q}$;

(A3) (**elemento neutro**) existe $0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(A4) (**oposto**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, existe $y \in \mathbb{Q}$ $(y = -x)$, tal que $x + y = 0$;

Propriedades da Adição

(A1) (**associativa**) $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(A2) (**comutativa**) $x + y = y + x$, $\forall\ x, y \in \mathbb{Q}$;

(A3) (**elemento neutro**) existe $0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(A4) (**oposto**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, existe $y \in \mathbb{Q}$ $(y = -x)$, tal que $x + y = 0$;

Mostre as propriedades acima para a adição em $\mathbb{Q}$.

Propriedades da Multiplicação

(M1) (**associativa**) $(xy)z = x(yz)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(M2) (**comutativa**) $xy = yx$, para todo $x, y \in \mathbb{Q}$;

(M3) (**elemento neutro**) existe $1 \in \mathbb{Q}$, tal que $x\,1 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(M4) (**elemento inverso**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, existe $y \in Q, \left(y = \frac{1}{x}\right)$, tal que $x \cdot y = 1$;

Propriedades da Multiplicação

(M1) (**associativa**) $(xy)z = x(yz)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(M2) (**comutativa**) $xy = yx$, para todo $x, y \in \mathbb{Q}$;

(M3) (**elemento neutro**) existe $1 \in \mathbb{Q}$, tal que $x\,1 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(M4) (**elemento inverso**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, existe $y \in Q$, $\left(y = \frac{1}{x}\right)$, tal que $x \cdot y = 1$;

Mostre as propriedades acima para a multiplicação em $\mathbb{Q}$.

Propriedade Distributiva em $\mathbb{Q}$

(D) **(distributiva da multiplicação)**
$x(y+z) = xy + xz, \ \forall \ x, y, z \in \mathbb{Q}\,.$

Propriedade Distributiva em $\mathbb{Q}$

(D) (distributiva da multiplicação)
$$x(y+z) = xy + xz, \ \forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}\,.$$

Mostre a propriedade acima em $\mathbb{Q}$.

Apenas com estas 9 propriedades podemos provar todas as operações algébricas do corpo $\mathbb{Q}$. Vamos enunciar algumas e demonstrar outras a seguir.

Proposição (Lei do Cancelamento)

Em $\mathbb{Q}$, vale

$$\boxed{x + z = y + z \implies x = y}$$

e, se $z \neq 0$

$$\boxed{x \cdot z = y \cdot z \implies x = y\,.}$$

Prova:

$$\begin{aligned} x &= x + 0 = x + (z + (-z)) = (x + z) + (-z) \\ &= (y + z) + (-z) = y + (z + (-z)) = y + 0 = y. \square \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x &= x.1 = x.(z.\frac{1}{z}) = (x.z).(\frac{1}{z}) \\ &= (y.z).(\frac{1}{z}) = y.(z.(\frac{1}{z})) = y.1 = y. \square \end{aligned}$$

Proposição

O elementos neutros da adição e da multiplicação são únicos.

As seguintes proposições seguem da Lei do Cancelamento.

Proposição

O elemento oposto e o elemento inverso são únicos.

Proposição

Para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \cdot 0 = 0$.

Proposição

Para todo $x \in \mathbb{Q}$, $-x = (-1)x$.

Ordem

Definição

Diremos que

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ é } \begin{cases} \textbf{não-negativo}, \textit{ se } a \cdot b \in \mathbb{N} \\ \textbf{positivo}, \textit{ se } a \cdot b \in \mathbb{N} \textit{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

e diremos que

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ é } \begin{cases} \textbf{não-positivo}, \textit{ se } \dfrac{a}{b} \textit{ não for positivo} \\ \textbf{negativo}, \textit{ se } \dfrac{a}{b} \textit{ não for não-negativo.} \end{cases}$$

Definição

Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$. Diremos que x é **menor do que** *y e escrevemos $x < y$, se existir $t \in \mathbb{Q}$ positivo tal que*

$$y = x + t.$$

Neste mesmo caso, poderemos dizer que y é **maior do que** *x e escrevemos $y > x$. Em particular, teremos $x > 0$ se x for positivo e $x < 0$ se x for negativo.*

Se $x < y$ ou $x = y$, então escreveremos $x \leqslant y$ e lemos "*x é menor ou igual a y*".

Da mesma forma, se $y > x$ ou $y = x$, então escreveremos $y \geqslant x$ e, neste caso, lemos "*y é maior ou igual a x*".

Escreveremos $x \geqslant 0$ se x for não-negativo e $x \leqslant 0$ se x for não-positivo.

A quádrupla $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ satisfaz as propriedades de um corpo ordenado, isto é, também valem as propriedades seguintes:

(O1) (**reflexiva**) $x \leqslant x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(O2) (**anti-simétrica**) $x \leqslant y$ e $y \leqslant x \implies x = y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$;

(O3) (**transitiva**) $x \leqslant y$, $y \leqslant z \implies x \leqslant z$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(O4) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$;

(OA) $x \leqslant y \implies x + z \leqslant y + z$;

(OM) $x \leqslant y$ e $z \geqslant 0 \implies xz \leqslant yz$.

A quádrupla $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ satisfaz as propriedades de um corpo ordenado, isto é, também valem as propriedades seguintes:

(O1) (**reflexiva**) $x \leqslant x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(O2) (**anti-simétrica**) $x \leqslant y$ e $y \leqslant x \implies x = y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$;

(O3) (**transitiva**) $x \leqslant y$, $y \leqslant z \implies x \leqslant z$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(O4) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$;

(OA) $x \leqslant y \implies x + z \leqslant y + z$;

(OM) $x \leqslant y$ e $z \geqslant 0 \implies xz \leqslant yz$.

Mostre as propriedades acima.

Proposição

Para quaisquer x, y, z, w no corpo ordenado $\mathbb{Q}$, valem

$$(a)\quad \left.\begin{array}{l} x \leqslant y \\ z \leqslant w \end{array}\right\} \implies x + z \leqslant y + w.$$

$$(b)\quad \left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant z \leqslant w \end{array}\right\} = xz \leqslant yw.$$

Prova: Vamos provar o ítem (b).

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant z \leqslant w \end{array}\right\} \overset{(OM)}{=} \left.\begin{array}{l} xz \leqslant yz \\ yz \leqslant yw \end{array}\right\} \overset{(O3)}{=} xz \leqslant yw. \square$$

Prova: Vamos provar o ítem (b).

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant z \leqslant w \end{array}\right\} \overset{(OM)}{=} \left.\begin{array}{l} xz \leqslant yz \\ yz \leqslant yw \end{array}\right\} \overset{(O3)}{=} xz \leqslant yw. \square$$

Mostre a parte a) da proposição.

Outras propriedades (exercício):

Sejam $x, y, z, w \in \mathbb{Q}$. Então valem

$$x < y \iff x + z < y + z;$$

$$z > 0 \iff \frac{1}{z} > 0;$$

$$z > 0 \iff -z < 0;$$

Se $z > 0$, então $x < y \iff xz < yz$;

Se $z < 0$, então $x < y \iff xz > yz$;

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x < y \\ 0 \leqslant z < w \end{array}\right\} = xz < yw;$$

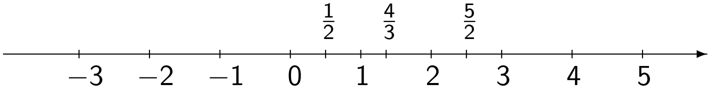
$$0 < x < y \iff 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x};$$

(**tricotomia**) $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$;

(**anulamento do produto**) $xy = 0 \iff x = 0$ ou $y = 0$.

$\mathbb{Q}$ não é completo

Os números racionais podem ser representados por pontos em uma reta horizontal ordenada, chamada reta real.

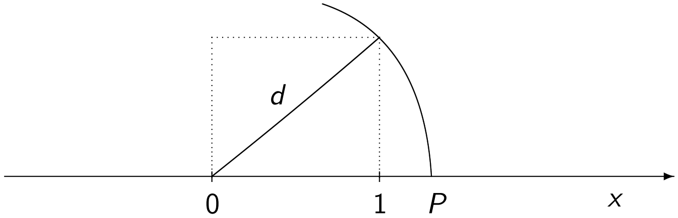


Se P for a representação de um número racional x, diremos que x é a abscissa de P. Nem todo ponto da reta real é racional.

Considere um quadrado de lado 1 e diagonal d. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Seja P a interseção do eixo x com a circunferência de centro em 0 e raio d.



Mostraremos que P é um ponto da reta com abscissa $x \notin \mathbb{Q}$.

Proposição

Seja $a \in \mathbb{Z}$. Temos

(a) Se a for ímpar, então a^2 é ímpar;

(b) Se a^2 for par, então a é par.

Prova:

(a) Se a for ímpar, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k+1$. Daí segue que

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\ell}) + 1 = 2\ell + 1,$$

onde $\ell = 2k^2 + 2k$, e portanto a^2 também será ímpar.

(b) Suponha, por redução ao absurdo, que a não é par. Logo a é ímpar. Então, pela Proposição 7 (a), a^2 também é ímpar, o que contradiz a hipótese. Portanto a é par. $\square$

Proposição

A equação $x^2 = 2$ não admite solução em $\mathbb{Q}$.

Prova: Suponhamos, por redução ao absurdo, que $x^2 = 2$ tem solução em $\mathbb{Q}$. Então podemos tomar $x = \dfrac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $\dfrac{a}{b}$ irredutível. Logo $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = 2$, ou seja, $a^2 = 2b^2$ e portanto a^2 é par. Segue da Proposição 7 (b) que a também é par. Portanto existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k$.
Mas

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= 2b^2 \\ a &= 2k \end{aligned}\right\} \implies 2b^2 = 4k^2 \implies b^2 = 2k^2 .$$

Portanto b^2 é par e, pela Proposição 7 (b), b também é par. Mas isto implica que $\dfrac{a}{b}$ é redutível (pois a e b são divisíveis por 2) o que é uma contradição. Logo não existe $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = 2$. $\square$

Exercício

Sejam $p_1, p_2, \cdots p_n$ números primos distintos. Mostre que a equação $x^2 = p_1 p_2 \cdots p_n$ não admite solução racional.

Corpos

Abstratamente, um corpo é um conjunto não vazio $\mathbb{F}$ onde estão definidas duas operações binárias

$$\begin{aligned}
&+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F} \\
&(x, y) \mapsto x + y \\
&\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F} \\
&(x, y) \mapsto x \cdot y
\end{aligned}$$

que gozam das propriedades $(A1)$ a $(A4)$, $(M1)$ a $(M4)$ e (D).

Se em $\mathbb{F}$ está definida uma relação de ordem $\leqslant$, a quádrupla $(\,\mathbb{F}\,,\,+\,,\,\cdot\,,\,\leqslant\,)$ é um corpo ordenado se além das propriedades anteriores, também valem $(O1)$ a $(O4)$, (OA) e (OM).

$(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ é um corpo ordenado.

Definição

Diremos que um subconjunto A de um corpo ordenado $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leqslant)$ é limitado superiormente se existe $L \in \mathbb{F}$ (chamado limitante superior de A) tal que $a \leqslant L$ para todo $a \in A$.

Se $A \subset \mathbb{F}$ for limitado superiormente, diremos que um número $\sup(A) \in \mathbb{F}$ é o supremo de A, se for o menor limitante superior de A; ou seja, se $a \leqslant \sup(A)$ para todo $a \in A$ e, se $\mathbb{F} \ni f < \sup(A)$, existe $a \in A$ tal que $f < a$.

Um corpo ordenado para o qual todo subconjunto limitado superiormente possui supremo é chamado um corpo ordenado completo.

Nem todo subconjunto limitado superiormente de $\mathbb{Q}$ tem supremo; ou seja, $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado que não é completo.

Construção dos Números Reais - Cortes de Dedekind

O que são os números reais?

Como definir adição, multiplicação de números reais?

O conjunto dos números reais com a adição e multiplicação é um corpo?

Como definir relação de ordem para números reais?

O corpo ordenado dos números reais é completo?

A idéia que queremos usar para construir (a partir de $\mathbb{Q}$) o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é:

"O conjuntos dos números reais preenche toda a reta real."

Os elementos de $\mathbb{R}$ serão os subconjuntos de $\mathbb{Q}$ à esquerda de um ponto da reta real e serão chamados cortes.

Definição (Cortes de Dedekind-1872)

Um corte é um subconjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ com as seguintes propriedades

- $\alpha \neq \varnothing$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$,
- *Se $p \in \alpha$ e $\mathbb{Q} \ni q < p$, então $q \in \alpha$ e*
- *Se $p \in \alpha$, existe $r \in \alpha$ com $p < r$.*

Observação

Os cortes foram inventados em 1872 pelo matemático alemão chamado Julius Wilhelm Richard Dedekind que viveu de 06.10.1831 a 12.02.1916)

Exemplo

- *Se* $q \in \mathbb{Q}$ *definimos* $q^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < q\}$*. Então* q^* *é um corte que chamamos de racional. Os cortes que não são racionais serão chamados irracionais.*
- $\sqrt{2} = \{t \in \mathbb{Q} : t \leqslant q$ *para algum* $q \in \mathbb{Q}$ *com* $q^2 < 2\}$ *é irracional.*

Observação

Note que:

- *Se α é um corte, $p \in \alpha$ e $q \notin \alpha$,*

Observação

Note que:

- *Se* α *é um corte,* $p \in \alpha$ *e* $q \notin \alpha$*, então* $p < q$.
- *Se* α *é um corte,* $r \notin \alpha$ *e* $r < s$,

Observação

Note que:

- *Se α é um corte, p $\in \alpha$ e q $\notin \alpha$,então p $<$ q.*
- *Se α é um corte, r $\notin \alpha$ e r $<$ s, então s $\notin \alpha$.*

Definição

Diremos que $\alpha < \beta$ se $\alpha \subsetneq \beta$

Proposição

Se α, β, γ são cortes

- $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ *implica que* $\alpha < \gamma$.
- *Exatamente uma das seguintes relações é válida:* $\alpha < \beta$ *ou* $\alpha = \beta$ *ou* $\beta < \alpha$.
- *Todo subconjunto não vazio e limitado superiormente de* $\mathbb{R}$ *tem supremo.*

Definição

- *Se* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *definimos* $\alpha + \beta$ *como o conjunto de todos os racionais da forma* $r + s$ *com* $r \in \alpha$ *e* $s \in \beta$.
- $0^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 0\}$

Definição

- *Se* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *definimos* $\alpha + \beta$ *como o conjunto de todos os racionais da forma* $r + s$ *com* $r \in \alpha$ *e* $s \in \beta$.
- $0^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 0\}$

Mostre que $\alpha + \beta$ and 0^* são cortes.

Claramente a adição é comutativa e associativa e $\alpha + 0^* = \alpha$ para todo corte α.

Definição

- *Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definimos $\alpha + \beta$ como o conjunto de todos os racionais da forma $r + s$ com $r \in \alpha$ e $s \in \beta$.*
- $0^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 0\}$

Mostre que $\alpha + \beta$ and 0^* são cortes.

Claramente a adição é comutativa e associativa e $\alpha + 0^* = \alpha$ para todo corte α.

Proposição

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ existe um único $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha + \beta = 0^*$. O corte β é dado por

$$\beta = \{-p \in \mathbb{Q} : p - r \notin \alpha \text{ para algum } r \in \mathbb{Q},\ r > 0\}$$

e é denotado por $-\alpha$.

Prova: De fato:

- Se $p \notin \alpha$ então $s = p + 1 \notin \alpha$ e $-s \in -\alpha$, logo $-\alpha \neq \varnothing$. Da definição de $-\alpha$, se $p \in \alpha$ então $-p \notin -\alpha$, logo $-\alpha \neq \mathbb{Q}$.
- Se $-p \in -\alpha$ e $-q < -p$ então existe $\mathbb{Q} \ni r > 0$ tal que $q > q - r > p - r \notin \alpha$ e portanto $-q \in -\alpha$.
- Agora, se $-p \in -\alpha$ existe $\mathbb{Q} \ni 2r > 0$ tal que $p - 2r \notin \alpha$ e portanto $p - r \notin \alpha$ e $-p < -p + r \in -\alpha$.

Resta mostrar que $\alpha + (-\alpha) = 0^*$. Se $r \in \alpha$ e $s \in -\alpha$ então $-s \notin \alpha$ e $r < -s$, ou seja, $r + s < 0$. Segue que $\alpha + (-\alpha) \subset 0^*$. Por outro lado, se $-2r \in 0^*$ com $r > 0$, existe um inteiro n tal que $nr \in \alpha$ e $(n+1)r \notin \alpha$. Escolha $p = -(n+2)r \in -\alpha$ e escreva $-2r = nr + p$. Isto conclui a demonstração.$\square$

Denotamos o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$. Temos $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ e todo número real que não é racional é dito **irracional** ($\sqrt{2}$ é irracional).

Teorema

A quádrupla $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ *satisfaz as condições (A1) a (A4), (M1) a (M4), (D), (O1) a (O4), (OA) e (OM) como na seção anterior e portanto é um corpo ordenado. Além disso* $\mathbb{R}$ *é completo.*

Denotamos o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$. Temos $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ e todo número real que não é racional é dito **irracional** ($\sqrt{2}$ é irracional).

Teorema

A quádrupla $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ satisfaz as condições (A1) a (A4), (M1) a (M4), (D), (O1) a (O4), (OA) e (OM) como na seção anterior e portanto é um corpo ordenado. Além disso $\mathbb{R}$ é completo.

Mostre o teorema acima.