Funções de Várias Variáveis

Alexandre N. Carvalho; Wagner V. L. Nunes e Sérgio L. Zani

August 1, 2003

Contents

1 Máximos e Mínimos **5**

1.1 Preliminares 5

1.2 Pontos de Máximo e de Mínimo 6

1.3 Condições necessárias para que um ponto interior seja extremante local 7

1.4 Condição Suficiente Para Que um Ponto Crítico Seja Extremante Local 8

1.4.1 Teste do Hessiano: Caso $n = 2$ 8

1.4.2 Teste do Hessiano: Caso $n = 3$ 9

1.4.3 Teste do Hessiano: Caso Geral 10

1.4.4 Exemplos 11

Chapter 1

Máximos e Mínimos

1.1 Preliminares

Antes de seguirmos com o estudo de máximos e mínimos para funções de várias variáveis vamos tratar alguns exemplos para os quais sabemos exatamente como a função se comporta em todo o seu domínio. Veremos mais tarde que estes exemplos contém toda a estrutura geométrica local dos problemas de máximos e mínimos interiores que estudaremos. Vamos apenas lidar com exemplos de funções de duas ou três variáveis mas enunciaremos os resultados para um número arbitrário de variáveis.

Exemplo 1 *Considere a função* $f(x,y) = a(x-x_0)^2 + b(y-y_0)^2 + c$. *Observe que:*

1. *Se* a *e* b *são positivos então* $f(x_0,y_0) = c$ *e* $f(x,y) \geq c$ *para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*; isto é,* c *é o menor valor que* f *assume.*
2. *Se* a *e* b *são negativos então* $f(x_0,y_0) = c$ *e* $f(x,y) \leq c$ *para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*; isto é,* c *é o maior valor que* f *assume.*
3. *Se* a *e* b *tem sinais opostos então existem pontos* (x_1,y_1) *e* (x_2,y_2) *tais que* $f(x_1,y_1) < f(x_0,y_0) < f(x_2,y_2)$.
4. *Qualquer que sejam os sinais de* a *e* b*, plano tangente ao gráfico de* f *em* (x_0,y_0,c) *é paralelo ao plano* (x,y).

Exemplo 2 *A função* $f(x,y) = a(x-x_0)^2 + 2b(x-x_0)(y-y_0) + c(y-y_0)^2 + d$ *tem comportamento exatamente análogo ao descrito acima. Se* a *e* c *não são ambos nulos e* $(h,k) = (x-x_0, y-y_0)$*, podemos escrever*

$$f(x,y) = a(h + \frac{b}{a}k)^2 + \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{a}k^2 + d$$

se $a \neq 0$ *ou*

$$f(x,y) = c(k + \frac{b}{c}h)^2 + \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{c}h^2 + d$$

se $c \neq 0$.

Observe que:

1. *Se* $a > 0$ *(ou* $c > 0$*) e* $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$ *então* $f(x_0,y_0) = c$ *e* $f(x,y) \geq d$ *para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. *Se* $a < 0$ *(ou* $c < 0$*) e* $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$ *então* $f(x_0,y_0) = c$ *e* $f(x,y) \geq d$ *para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. *Se* $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} < 0$ *então existem pontos* (x_1,y_1) *e* (x_2,y_2) *tais que* $f(x_1,y_1) < f(x_0,y_0) < f(x_2,y_2)$.
4. *Qualquer que sejam os sinais de* a *e* b*, plano tangente ao gráfico de* f *em* (x_0,y_0,c) *é paralelo ao plano* (x,y).

Exemplo 3 *Considere a função $f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + g$. Pode-se verificar facilmente que*

$$f(x,y,z) = a(x + \frac{d}{a}y + \frac{e}{a}z)^2 + \frac{\begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix}}{a}\left(y + \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix}} z \right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix}} z^2.$$

Observe que estudando os sinais dos menores principais

$$A = a, \quad B = \begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix} \quad e \quad C = \begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{vmatrix}$$

da matriz

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

podemos verificar que:

1. *Se $A > 0$, $B > 0$ e $C > 0$ então $f(x,y,z) \geq g$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.*
2. *Se $A < 0$, $B > 0$ e $C < 0$, então $f(x,y,z) \geq g$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.*
3. *Se $AB < 0$ ou $AC < 0$ ou $BC < 0$ então existem (x_1,y_1,z_1) e (z_2,y_2,z_2) tais que $f(x_1,y_1,z_1) < 0 < f(x_2,y_2,z_2)$.*

1.2 Pontos de Máximo e de Mínimo

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0,y_0) \in A$. Dizemos que (x_0,y_0) é o ponto de máximo de f em A se, para todo $(x,y) \in A$ tivermos

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0).$$

O número $f(x_0,y_0)$ é dito *valor máximo* de f em A. Dizemos ainda que (x_0,y_0) é *ponto de máximo global* de f se para todo $(x,y) \in D_f$ temos que $f(x,y) \leq f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ e neste caso dizemos que $f(x_0,y_0)$ é o valor máximo de f.

Finalmente, dizemos que $(x_0,y_0) \in D_f$ é um ponto de máximo local de f se existir uma bola aberta B de centro em (x_0,y_0) tal que

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$$

para todo $(x,y) \in B \cap D_f$.

Exercício 1 *Estabelecer definições análogas para mínimo.*

Observação 1 *Os pontos de máximo e mínimo de uma função f denominam-se extremantes de f.*

Exemplo 4 *$(0,0)$ é ponto de mínimo global de $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $f(0,0) = 0$ é o valor mínimo de f, pois $f(x,y) \geq f(0,0) = 0$, $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.*

Exemplo 5 *Seja $f(x,y) = 2x - y$ e seja A o conjunto determinado por $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 3$ e $y \geq x$. Encontrar os pontos de máximo (mínimo) e o valor máximo (mínimo) de f em A.*

Solução: Observe que $\nabla f(x,y) = (2,-1)$ e recorde que o gradiente aponta na direção de crescimento máximo da função. Geometricamente vemos que $(3/2, 3/2)$ e $(0,3)$ são os pontos de máximo e mínimo de f em A, respectivamente. Analiticamente, temos incluir figura aqui

- i) Note que
$$f(x,y) - f(3/2,3/2) = 2x - y - 3/2 = -(3/2 - x) - (y - x) \leq 0$$
e portanto $f(x,y) \leq f(3/2,3/2) = 3/2$ para todo $(x,y) \in A$.
- Note que
$$f(x,y) - f(0,3) = 2x - y + 3 = 3x + (3 - y - x) \geq 0$$
ou seja $f(x,y) \geq f(0,3) = -3$ para todo $(x,y) \in A$.

1.3 Condições necessárias para que um ponto interior seja extremante local

O teorema a seguir nos permite selecionar entres os pontos interiores de D_f, os candidatos a extremantes locais de f.

Teorema 1 *Seja (x_0,y_0) um ponto interior de D_f e suponhamos que $f_x(x_0,y_0)$ existam. Se (x_0,y_0) é um extremante local de f, temos que $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$; isto é, uma condição necessária para que (x_0,y_0) seja um extremante local de f é que $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$.*

Prova: Suponhamos que (x_0,y_0) seja um ponto de máximo local de f. Como (x_0,y_0) é ponto interior de D_f, existe uma bola aberta B centrada em (x_0,y_0) tal que $B \subset D_f$ e
$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0), \quad \forall (x,y) \in B.$$

Seja I um intervalo aberto, $x_0 \in I$, tal que $\forall x \in I$, $(x,y_0) \in B$. Consideremos a função dada por
$$g(x) = f(x,y_0), \quad x \in I.$$

incluir figuras aqui

Temos que g é derivável em x_0 ($g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$) x_0 é ponto interior de I e é ponto de máximo local de g. Daí

$$g'(x_0) = 0.$$

Portanto $f_x(x_0, y_0) = 0$. De modo análogo $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Se (x_0, y_0) é ponto de mínimo local procedmos de modo completamente análogo. ∎

Observação 2

- *Se (x_0, y_0) é um ponto interior de D_f, f é diferenciável em (x_0, y_0) e (x_0, y_0) é extremante local de f, então o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ será paralelo ao plano xy.*
- *Dizemos que (x_0, y_0) é um ponto crítico ou estacionário de f se (x_0, y_0) for interior a D_f e $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.*
- *Um ponto de fronteira de A pode ser um extremante local sem que as derivadas parciais se anulem (veja Exemplo 5) por isto devem ser analisados separadamente.*

Exemplo 6 *Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Como $D_f = \mathbb{R}^2$ é aberto, de*

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2x \\ f_y(x, y) = 2y \end{cases}$$

Segue que o único ponto que pode ser extremante local de f é $(0, 0)$. Como $f(x, y) \geq f(0, 0) = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(0, 0)$ é ponto de mínimo global de f.

Teorema 2 *Seja f de classe C^2 e (x_0, y_0) um ponto interior do domínio de f. Uma condição necessária para que (x_0, y_0) seja um ponto de máximo local de f é que (x_0, y_0) seja um ponto crítico de f e além disso $f_{xx}(x_0, y_0) \leq 0$ e $f_{yy}(x_0, y_0) \leq 0$. Adicionalmente se um tal ponto (x_0, y_0) é mínimo local ele é ponto crítico de f e além disso $f_{xx}(x_0, y_0) \geq 0$, $f_{yy}(x_0, y_0) \geq 0$.*

Prova: Basta ver que se uma das derivadas parciais, digamos $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, então $g(x) = f(x, y_0)$ tem um mínimo local em x_0 o que é absurdo. ∎

Exemplo 7 *Verifique que o ponto crítico de $f(x, y) = x^2 - y^2$ não é extremante, desenhe G_f.*

Exemplo 8 *Determine os candidatos a extremantes locais de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$. A que tipo de extremante eles são candidatos.*

1.4 Condição Suficiente Para Que um Ponto Crítico Seja Extremante Local

Seja $f(x, y)$ de classe C^2. A função H dada por

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix}$$

denomina-se Hessiano de f.

1.4.1 Teste do Hessiano: Caso $n = 2$

Teorema 3 *Sejam $f(x, y)$ de classe C^2 e (x_0, y_0) um ponto interior de D_f. Suponhamos que (x_0, y_0) seja um ponto crítico de f. Então*

a) Se $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ e $H(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) é ponto de mínimo local de f

b) Se $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ e $H(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) é ponto de máximo local de f

c) Se $H(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) não é um extremante local de f (é um ponto de sela).

d) Se $H(x_0, y_0) = 0$, nada podemos afirmar.

Prova: Observe que do fato que (x_0, y_0) é um ponto crítico temos que $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$. Segue então da expansão de Taylor de ordem 1 que

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}[f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})(y - y_0)^2]$$

fazendo $(h, k) = (x - x_0, y - y_0)$, temos

$$\begin{aligned} 2![f(x,y) - f(x_0,y_0)] &= f_{xx}(\bar{x},\bar{y})\left(h + \tfrac{f_{xy}(\bar{x},\bar{y})}{f_{xx}(\bar{x},\bar{y})}\,k\right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) & f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) \\ f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) & f_{yy}(\bar{x},\bar{y}) \end{vmatrix}}{f_{xx}(\bar{x},\bar{y})}\,k^2 \\ &= f_{xx}(\bar{x},\bar{y})\left(h + \tfrac{f_{xy}(\bar{x},\bar{y})}{f_{xx}(\bar{x},\bar{y})}\,k\right)^2 + \tfrac{H(\bar{x},\bar{y})}{f_{xx}(\bar{x},\bar{y})}\,k^2 \end{aligned}$$

Agora para provar os ítens a) e b) basta lembrar que as derivadas parciais de segunda ordem são contínuas e portanto $H(x, y)$ é uma função contínua. Seja $r > 0$ tal que $f_{xx}(x, y)$ e $H(x, y)$ tem o mesmo sinal que $f_{xx}(x_0, y_0)$ e $H(x_0, y_0)$ respectivamente, para todo $(x, y) \in B_r(x_0, y_0)$. Logo do Exemplo 2 temos que a) e b) são verdadeiros. Isto também prova c) no caso em que $f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$ ou $f_{yy}(x_0, y_0) \neq 0$.

Quando $f_{xx}(x_0, y_0) = 0$ e $f_{yy}(x_0, y_0) = 0$ a prova do caso c) é um pouco mais delicada. Note que do fato que $H(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)^2 < 0$ devemos ter $f_{xy}(x_0, y_0) \neq 0$.

Seja $r > 0$ tal que

$$|f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)| < 2|f_{xy}(x, y)| \quad \forall (x, y) \in B_r(x_0, y_0).$$

Tomando $h = (x - x_0) = (y - y_0)$ temos

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}[f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) + 2f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) + f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})]h^2$$

e $f(x, y)$ tem o mesmo sinal que $f_{xy}(x_0, y_0)$. Tomando $k = (x - x_0) = -(y - y_0)$ temos

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}[f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) - 2f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) + f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})]k^2$$

e $f(x, y)$ tem sinal oposto ao de $f_{xy}(x_0, y_0)$.

A prova de d) é facilmente obtida dos exemplos $f_1(x, y) = x^4 + y^4$, $f_2(x, y) = -x^4 - y^4$ e $f_3(x, y) = x^4 - y^4$. Em todos os casos $(0, 0)$ é o único ponto crítico e $H(0, 0) = 0$. O ponto $(0, 0)$ é um ponto de: mínimo para f_1; máximo para f_2 e sela para f_3.

1.4.2 Teste do Hessiano: Caso $n = 3$

Seja f uma função de classe C^2. Defina

$$H_1(x, y, z) = f_{xx}(x, y, z), \quad H_2(x, y, z) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y, z) & f_{xy}(x, y, z) \\ f_{xy}(x, y, z) & f_{yy}(x, y, z) \end{vmatrix}$$

e

$$H_3(x, y, z) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y, z) & f_{xy}(x, y, z) & f_{xz}(x, y, z) \\ f_{yx}(x, y, z) & f_{yy}(x, y, z) & f_{yz}(x, y, z) \\ f_{zx}(x, y, z) & f_{zy}(x, y, z) & f_{zz}(x, y, z) \end{vmatrix}.$$

Teorema 4 *Sejam $f(x, y, z)$ de classe C^2 e (x_0, y_0, z_0) um ponto interior de D_f. Suponhamos que (x_0, y_0, z_0) seja um ponto crítico de f. Então*

a) Se $A = H_1(x_0, y_0, z_0) > 0$, $B = H_2(x_0, y_0, z_0) > 0$ e $C = H_3(x_0, y_0, z_0) > 0$ então (x_0, y_0, z_0) é ponto de mínimo local de f

b) Se $A < 0$, $B > 0$ e $C < 0$, então (x_0, y_0, z_0) é ponto de máximo local de f

c) Se $B < 0$ ou $AC < 0$ ou $ABC < 0$ então existem (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) tais que $f(x_1, y_1, z_1) < f(x_0, y_0, z_0) < f(x_2, y_2, z_2)$; isto é, (x_0, y_0, z_0) é um ponto de sela.

A prova deste resultado é análoga à prova do Teste do Hesiano para $n = 2$, bastando escrever a expansão de Taylor de ordem 1 de f na forma

$$f(x,y,z) = \quad H_1(P_1)\left((x-x_0) + \tfrac{f_{xy}(P_1)}{H_1(P_1)}(y-y_0) + \tfrac{f_{xz}(P_1)}{H_1(P_1)}(z-z_0)\right)^2 +$$

$$\tfrac{H_2(P_1)}{H_1(P_1)}\left((y-y_0) + \frac{\begin{vmatrix} f_{xx}(P_1) & f_{xz}(P_1) \\ f_{xy}(P_1) & f_{yz}(P_1) \end{vmatrix}}{H_1(P_1)}(z-z_0)\right)^2 + \tfrac{H_3(P_1)}{H_2(P_1)}(z-z_0)^2.$$

onde $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$ e $P_1 = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ é um ponto interno ao segmento P_0P.

1.4.3 Teste do Hessiano: Caso Geral

Antes de enunciarmos o caso geral, relembremos o seguinte fato de Álgebra Linear:

Proposição 1 *Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz com coeficientes reais simétrica. Então A possui n autovalores reais (contados conforme a sua multiplicidade). Além do mais, podemos escolher os n autovetores de modo que formem uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Em suma, existem números reais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e vetores $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ tais que $A\vec{v_j} = \lambda_j \vec{v_j}$, e $\vec{v_i}\cdot\vec{v_j} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j, \end{cases}$ $\quad 1 \leq j \leq n$, onde $A\vec{v_j}$ deve ser entendido como o produto da matriz A pelo vetor coluna $\vec{v_j}^{\,t}$.*

Teorema 5 (Caso geral) *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que $P_0 \in A$ seja um ponto crítico de f. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores da matriz hessiana de f em P_0 e $H(P_0)$ o hessiano de f em P_0. Temos*

1. *se $\lambda_j > 0$ para todo $1 \leq j \leq n$ então P_0 é um ponto de mínimo local de f;*
2. *se $\lambda_j < 0$ para todo $1 \leq j \leq n$ então P_0 é um ponto de máximo local de f;*
3. *se existirem dois autovalores λ_i e λ_j com sinais opostos então P_0 é um ponto de sela de f;*
4. *nos demais casos, isto é,*
   (a) *$\lambda_j \geq 0$, para todo $1 \leq j \leq n$ e existe um autovalor $\lambda_i = 0$ ou*
   (b) *$\lambda_j \leq 0$, para todo $1 \leq j \leq n$ e existe um autovalor $\lambda_i = 0$*

   não podemos afirmar nada sobre a natureza do ponto crítico P_0.

Esboço da prova Ao invés de usarmos a base canônica de $\mathbb{R}^n$ usaremos a base ortonormal $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$ formada pelos autovetores da matriz hessiana de f em P_0. Considere a função $g(t) = f(P_0 + t\vec{u})$, onde $0 \leq t \leq 1$, e $\vec{u}$ é um vetor com norma suficientemente pequena. Use a regra da cadeia e confira que $g'(0) = \nabla(P_0)\cdot\vec{u} = 0$ e $g''(0) = (\mathrm{Hess}(P_0)\vec{u})\cdot\vec{u}$. O ponto a ser observado é que quando $\vec{u}$ é pequeno o bastante, o valor de $f(P)$, onde $P = P_0 + \vec{u}$, fica próximo a $f(P_0) + \frac{1}{2}(\mathrm{Hess}(P_0)\vec{u})\cdot\vec{u}$ (pense como ficaria a fórmula de Taylor para várias variáveis).

Com relação à base adotada, escrevemos $\vec{u} = h_1\vec{v_1} + \cdots + h_n\vec{v_n}$ e, deste modo,

$$\begin{aligned} 2[f(P) - f(P_0)] &\approx (\mathrm{Hess}(P_0)\vec{u})\cdot\vec{u} = (\mathrm{Hess}(P_0)(h_1\vec{v_1} + \cdots + h_n\vec{v_n}))\cdot(h_1\vec{v_1} + \cdots + h_n\vec{v_n}) \\ &= (h_1\mathrm{Hess}(P_0)\vec{v_1} + \cdots + h_n\mathrm{Hess}(P_0)\vec{v_n})\cdot(h_1\vec{v_1} + \cdots + h_n\vec{v_n}) \\ &= (h_1\lambda_1\vec{v_1} + \cdots + h_n\lambda_n\vec{v_n})\cdot(h_1\vec{v_1} + \cdots + h_n\vec{v_n}) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i h_i h_j \vec{v_i}\cdot\vec{v_j} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i h_i^2 = \lambda_1 h_1^2 + \cdots + \lambda_n h_n^2, \end{aligned}$$

pelo fato dos vetores serem ortonormais.

Agora, se $\lambda_j > 0$, para todo $1 \leq j \leq n$ temos que $\lambda_1 h_1^2 + \cdots + \lambda_n h_n^2 > 0$ se $\vec{u} = h_1\vec{v_1} + \cdots + h_n\vec{v_n} \neq \vec{0}$. Se $\lambda_j < 0$, para todo $1 \leq j \leq n$ temos que $\lambda_1 h_1^2 + \cdots + \lambda_n h_n^2 < 0$ se $\vec{u} = h_1\vec{v_1} + \cdots + h_n\vec{v_n} \neq \vec{0}$. Isto leva às conclusões *1* e *2*.

Suponha agora que existam $\lambda_i < 0$ e $\lambda_j > 0$. Tome $P_1 = P_0 + h_i\vec{v_i}$, $h_i \neq 0$ e $P_2 = P_0 + h_j\vec{v_2}$, $h_j \neq 0$. Temos

$$2[f(P_1) - f(P_0)] \approx (\mathrm{Hess}(P_0)h_1\vec{v_i})\cdot(h_1\vec{v_i}) = \lambda_i h_1^2 < 0$$

e

$$2[f(P_2) - f(P_0)] \approx (\text{Hess}(P_0)h_2\vec{v_j}) \cdot (h_2\vec{v_j}) = \lambda_j h_2^2 > 0.$$

A partir daí, segue-se *3.*

4 segue dos seguintes exemplos como no teorema do caso bidimensional. Basta considerar as funções $f(x_1, \cdots, x_n) = x_1^4 + x_2^4$, $g(x_1, \cdots, x_n) = -x_1^4 - x_2^4$ e $h(x_1, \cdots, x_n) = x_1^4 - x_2^4$ que têm a origem como ponto de mínimo, máximo e sela, respectivamente. Note que nos três casos, os autovalores são todos nulos.

O teorema a seguir, que é um resultado de Álgebra Linear, fornece uma condição necessária e suficiente para decidir se uma matriz simétrica apresenta todos os autovalores positivos ou todos negativos.

Definição 1 *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem n. O menor principal de ordem $1 \le k \le n$ da matriz é definido como o determinante da sub-matriz $A_k = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le k}}$ e denotado por $m_k(A)$.*

Teorema 6 *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz simétrica de ordem n.*

1. *A fim de que todos os autovalores de A sejam positivos é necessário e suficiente que $m_k(A) > 0$ para todo $1 \le k \le n$.*
2. *A fim de que todos os autovalores de A sejam negativos é necessário e suficiente que $m_k(A) < 0$ para todo k ímpar, $1 \le k \le n$ e $m_k(A) > 0$ para todo k par, $1 \le k \le n$.*

Obs. A parte *2.* segue de *1.* notando que $m_k(-A) = (-1)^k m_k(A)$.

1.4.4 Exemplos

Exemplo 9 *Deseja-se construir uma caixa sem tampa com a forma de um paralelepípedo retangular com um certo volume V. Determine as dimensões da caixa para que se gaste o mínimo material possível.*

Denotemos por x e z as dimensões da base da caixa e por y a sua altura. Desta forma $V = xyz$ e a área total da caixa é $A = 2yx + 2yz + xz$. Logo, como V é dado, temos

$$A(x, y) = 2xy + 2\frac{V}{x} + \frac{V}{y}.$$

Nosso problema se resume em achar o ponto de mínimo de A. Note que a região em que estamos trabalhando é $x > 0$ e $y > 0$.

Vamos procurar os pontos críticos de A :

$$\begin{cases} 2y - 2\frac{V}{x^2} = 0 \\ 2x - \frac{V}{y^2} = 0 \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{array}{l} yx^2 = V \\ 2xy^2 = V \end{array}.$$

Logo $2y = x$ e voltando às equações, obtemos $x = \sqrt[3]{2V}$, $y = \sqrt[3]{V/4}$ e $z = \sqrt[3]{2V}$.

Agora,

$$H(x, y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)} = \det \begin{pmatrix} \frac{4V}{x^3} & 2 \\ 2 & \frac{2V}{y^3} \end{pmatrix} = \frac{8V^2}{x^3y^3} - 4.$$

Assim $H(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{V/4}) = 12 > 0$ e $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{V/4}) = 2 > 0$. Logo, pelo critério do hessiano vemos que $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{V/4})$ é um ponto de mínimo local de A. Na verdade, trata-se de um mínimo global. A verificação pode ser vista da seguinte maneira. Para cada $y > 0$ fixo a função

$$A_y(x) = A(x, y) = 2xy + 2\frac{V}{x} + \frac{V}{y}$$

possui um mínimo global pois $\lim_{x \to 0+} A_y(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} A_y(x) = +\infty$ e ele ocorre em $x = \sqrt{V/y}$ (note que esta é a única solução de $\frac{\partial A}{\partial x}(x, y) = A'_y(x) = 0$). O valor mínimo é $m(y) = A_y(\sqrt{V/y}) = A(\sqrt{V/y}, y) = 4\sqrt{Vy} + V/y$. Logo,

$$A(x, y) = A_y(x) \ge m(y).$$

Por outro lado, a função $m(y)$, que representa o mínimo de A_y para cada $y > 0$ fixado, também possui um mínimo global, pois $\lim_{y\to 0+} m(y) = +\infty$ e $\lim_{y\to+\infty} m(y) = +\infty$ e este mínimo ocorre para y tal que $m'(y) = 0$, isto é, quando $2\sqrt{V/y} - V/y^2 = 0$, ou seja, quando $y = \sqrt[3]{V/4}$. Isto nos dá $x = \sqrt{V/y} = \sqrt{V/(\sqrt[3]{V/4})} = \sqrt[3]{2V}$. Assim, para todo $x > 0$ e $y > 0$, temos

$$A(x, y) = A_y(x) \geq m(y) \geq m(\sqrt[3]{V/4}) = A(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{V/4}).$$

Portanto, $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{V/4})$ é um ponto de mínimo global. Finalmente, as dimensões da caixa são

$$x = \sqrt[3]{2V}, \qquad y = \sqrt[3]{V/4} \qquad \text{e} \qquad z = \sqrt[3]{2V}.$$

Exemplo 10 *Classifique os pontos críticos da função*

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2.$$

Vamos procurar os pontos críticos de f :

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1) = 0 \\ 4y^3 - 4y = 4y(y-1)(y+1) = 0 \end{cases},$$

que nos fornece as seguintes soluções

$$\begin{array}{lll} P_1 = (0,0) & P_2 = (0,1) & P_3 = (0,-1) \\ P_4 = (1,0) & P_5 = (1,1) & P_6 = (1,-1) \\ P_7 = (-1,0) & P_8 = (-1,1) & P_9 = (-1,-1). \end{array}$$

O hessiano de f em (x, y) é dado por

$$H(x, y) = \det \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix} = 16(3x^2 - 1)(3y^2 - 1).$$

P	$H(P)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	P é	$f(P)$
P_1	16	-4	max. loc.	0
P_2	-32		sela	-1
P_3	-32		sela	-1
P_4	-32		sela	-1
P_5	64	8	min. loc.	-2
P_6	64	8	min. loc.	-2
P_7	-32		sela	-1
P_8	64	8	min. loc.	-2
P_9	64	8	min. loc.	-2

A figura (1.1) mostra os pontos críticos de f e a curva de nível -1 referente aos pontos de sela.
A figura (1.2) mostra o gráfico de f.

Observe que P_1 é apenas um ponto de máximo local pois, por exemplo $f(2, 0) = 8 > f(P_1)$. Porém, os pontos de mínimo local são na verdade pontos de mínimo global. Nestes pontos f tem o valor -2 e assim para todo (x, y) temos

$$f(x, y) + 2 = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 2 = (x^4 - 2x^2 + 1) + (y^4 - 2y^2 + 1) = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 \geq 0,$$

portanto, $f(x, y) \geq -2$.

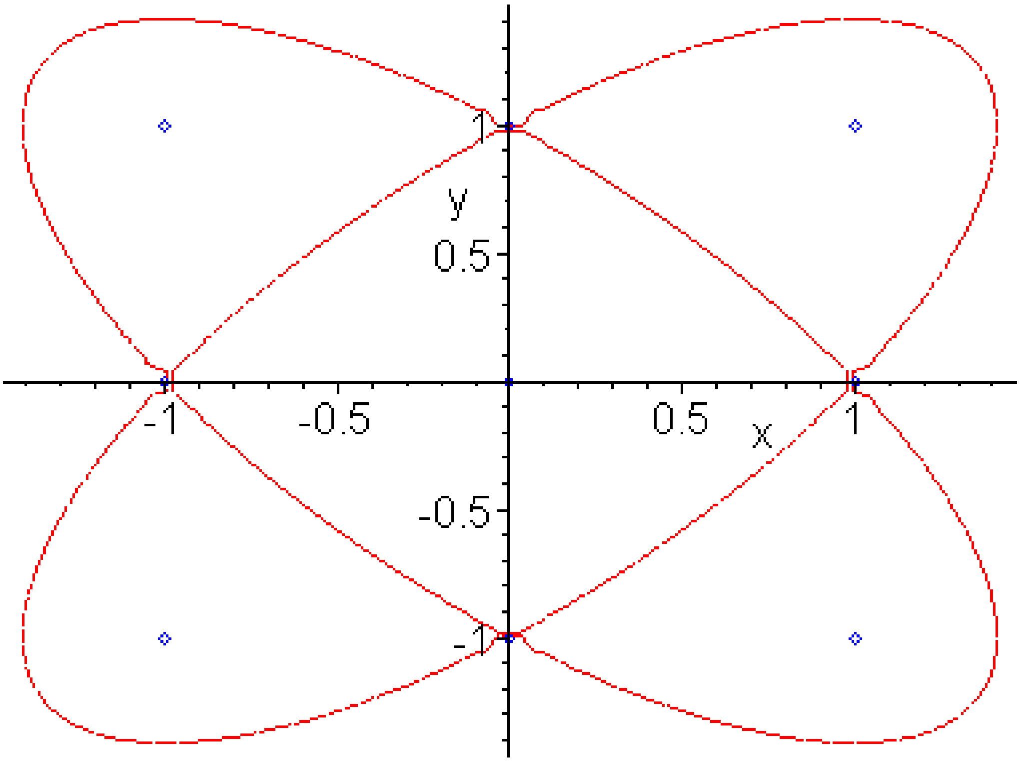

Figure 1.1: pontos críticos de f e a curva de nível -1

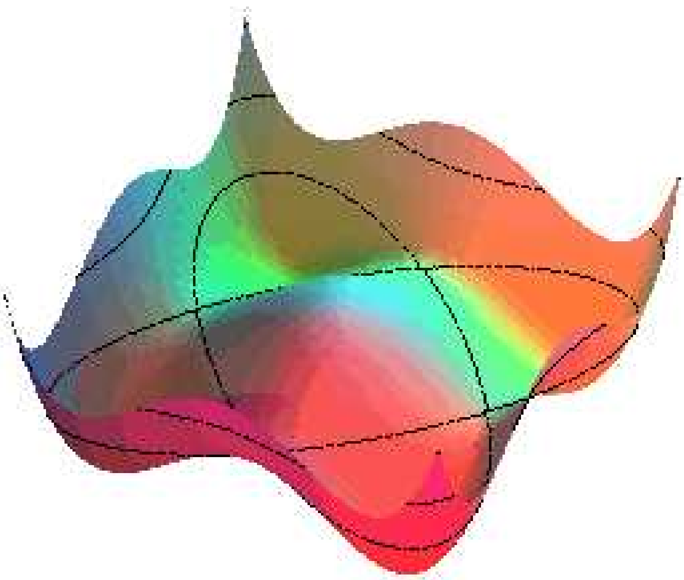

Figure 1.2: gráfico de f