

Notas de Aula
SMA-0380 Análise

Alexandre Nolasco de Carvalho

07 de Julho de 2023

Contents

1	Os Números	8
1.1	Os Números Naturais	8
1.2	Os Números Inteiros	12
1.3	Números Racionais	12
1.3.1	Outras propriedades:	16
1.4	\mathbb{Q} não é completo	16
2	Corpos	18
3	Números Reais	20
4	Módulo de um Número Real	23
4.1	Distância	23
5	Limitação de Subconjuntos de \mathbb{R}	25
5.1	Vizinhança, Pontos Isolados e Pontos de Acumulação	29
6	Seqüências e Séries	31
6.1	Seqüências	31
6.2	Operações com Seqüências	34
6.3	Propriedades	35
6.4	Comparação e Confronto	42
6.5	Limite Superior e Limite Inferior	45
6.6	Seqüências divergentes para $+\infty$ ou $-\infty$	47
7	Séries	51
7.1	O que é uma série?	52
7.2	CrITÉRIOS de convergência para séries	58
7.3	Séries de Potência	64
7.4	Séries rearranjadas	66

8	Funções - Limites e Continuidade	69
8.1	Critério negativo para existência de limites	70
8.2	Limites Laterais	71
8.3	Propriedades do Limite	73
8.4	Limites Superior e Inferior	77
9	Continuidade	80
9.1	Funções - Limites e Continuidade	80
9.2	Propriedades do Limite	80
9.3	Funções contínuas: Resultados fundamentais	81
9.4	O Teorema da Conservação do Sinal	82
9.5	O Teorema do Anulamento	82
9.6	O Teorema do Valor Intermediário	83
9.7	O Teorema de Weierstrass e Aplicações	83
10	Topologia da Reta	85
10.1	Abertos, Fechados, Compactos e Conexos	85
10.2	Coberturas e Compactos	89
10.3	Medida Exterior	91
10.4	O Lema do Recobrimento de Vitali	93
11	Funções - Limites e Continuidade	95
11.1	Critério negativo para existência de limites	96
11.2	Limites Laterais	97
11.3	Propriedades do Limite	99
11.4	Limites Superior e Inferior	103
12	Continuidade	107
12.1	Propriedades da Continuidade	107
12.2	Funções contínuas: Resultados fundamentais	109
12.2.1	O Teorema da Conservação do Sinal	109
12.2.2	O Teorema do Anulamento	110
12.2.3	O Teorema do Valor Intermediário	110

12.2.4	O Teorema de Weierstrass e Aplicações	111
12.3	Continuidade e Abertos	113
12.4	Continuidade e conexos	114
12.5	Continuidade e Compactos	114
12.6	Continuidade Uniforme	116
12.7	Descontinuidades	118
12.8	Semicontinuidade Superior e Inferior	119
13	Derivadas	121
13.1	A função derivada	122
13.2	Derivadas de Ordens Superiores	123
13.3	Fórmulas e Regras de Derivação	123
13.4	Propriedades da Derivada	125
13.5	A Regra da Cadeia	126
13.6	Derivada da Função Inversa	127
13.7	Funções deriváveis em intervalos	131
14	O Teorema do Valor Médio e suas Conseqüências	136
14.1	Regra de L'Hospital	137
14.2	Teorema de Taylor	139
15	Funções Convexas e Funções analíticas	141
15.1	Funções Convexas	141
15.2	Funções Analíticas e Séries de Taylor	142
16	Funções de Variação Limitada (BV)	144
16.1	Funções de Variação Limitada (BV)	144
16.2	Funções Monótonas e Lipschitzianas são BV	144
16.3	Monotonicidade e Diferenciabilidade	145
16.4	Lipschitz Continuidade e Diferenciabilidade	147
17	A integral de Riemann-Stieltjes	150
17.1	Introdução: A integral de Riemann	150

17.2	Integral de Riemann-Stieltjes: Definição e caracterização . . .	152
17.3	Classes de Funções Riemann-Stieltjes Integráveis	157
17.4	Propriedades	159
17.5	Mudança de variável	164
17.6	Teorema fundamental do cálculo e Integração por partes . . .	167
17.7	Caracterização de Funções Riemann Integráveis	168
18	Seqüências e séries de funções	172
18.1	Convergência pontual de seqüências e séries	172
18.2	Convergência uniforme de seqüências e séries	175
18.3	Convergência uniforme e continuidade	177
18.4	Convergência uniforme e integração	180
19	Famílias equicontínuas de funções	181
20	O Teorema de Stone-Weierstrass	188
20.1	O Teorema de Aproximação de Weierstrass	188
20.2	O Teorema de Stone-Weierstrass	190
21	Séries de potências	192
22	Funções Analíticas	197
23	Apêndice	201
23.1	Seqüência dupla	201
23.2	Produto de Cauchy séries	202
23.3	Lema do Sol Nascente - Rising sun lemma	204

1 Os Números

Os Números

Faremos uma apresentação sucinta do conjunto dos números naturais, inteiros, racionais e reais e suas construções para servir como base para o que será desenvolvido posteriormente. Faremos também algumas formalizações que ajudam na compreensão dos conceitos que serão desenvolvidos posteriormente.

Escreveremos

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \text{Conjunto dos números naturais,}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \text{Conjunto dos números inteiros,}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}, b > 0 \right\} = \text{Conjunto dos números racionais.}$$

1.1 Os Números Naturais

Os Números Naturais

Os números naturais são os que utilizamos para contar objetos e são caracterizados pelos **Axiomas de Peano**:

1. Todo número natural tem um único sucessor.
2. Números naturais diferentes tem sucessores diferentes.
3. Existe um único natural, chamado **zero** (denotado por 0), que não é sucessor de nenhum número natural.
4. Seja $X \subset \mathbb{N}$ tal que $0 \in X$ e, se $n \in X$, seu sucessor (denotado por $n+1$) também pertence a X . Então $X = \mathbb{N}$.

A **adição** é definida por: $n+0 := n, n \in \mathbb{N}$, e $n+(p+1) := (n+p)+1, n, p \in \mathbb{N}$, (sabendo somar p sabemos somar $p+1$).

A **multiplicação** é definida por: $n \cdot 0 = 0$ e $n \cdot (p+1) := n \cdot p + n, n, p \in \mathbb{N}$.

Prova por Indução

O quarto Axioma de Peano é conhecido como axioma de indução e é frequentemente utilizado em demonstrações matemáticas.

Prova por Indução: Dado que uma proposição $P(n)$, definida para todo $n \in \mathbb{N}$, pode ser verdadeira ou falsa, para verificar que a mesma é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ basta verificar que:

- $P(0)$ é verdadeira e
- Se $n \in \mathbb{N}$ é tal que $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é.

De fato: Se X denota o conjunto dos números naturais n para os quais $P(n)$ é verdadeira, então $0 \in X$ e, se $n \in X$, então $n+1 \in X$. Logo $X = \mathbb{N}$ pelo quarto Axioma de Peano.

Exercício: Mostre que $n \cdot 1 = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e que a adição e multiplicação definidas acima são comutativas e associativas.

Vamos provar a comutatividade e associatividade da adição:

Lema 1 (1). Para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 + n = n + 1$ e $0 + n = n + 0$.

Prova: Faremos ambas as provas ao mesmo tempo. Note que o resultado é válido para $n = 0$. Suponha que o resultado seja válido para $n = k$ e mostremos que vale também para $n = k + 1$. De fato, da hipótese da indução (h) e da definição de adição (d),

$$\begin{aligned} 1 + (k + 1) &\stackrel{(d)}{=} (1 + k) + 1 \stackrel{(h)}{=} (k + 1) + 1 \\ 0 + (k + 1) &\stackrel{(d)}{=} (0 + k) + 1 \stackrel{(h)}{=} (k + 0) + 1 \stackrel{(d)}{=} k + 1 \stackrel{(d)}{=} (k + 1) + 0 \end{aligned}$$

Segue que o resultado vale para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Agora mostremos a associatividade.

Lema 2 (Associatividade). Para todo $n, p, r \in \mathbb{N}$, $(n + p) + r = n + (p + r)$.

Prova: Note que o resultado é válido trivialmente para $r = 0$ e para $r = 1$. Suponha que o resultado seja válido para $r = k$ e mostremos que vale também para $r = k + 1$. De fato, da hipótese da indução (h) e da definição de adição (d),

$$\begin{aligned} n + (p + (k + 1)) &\stackrel{(d)}{=} n + ((p + k) + 1) \stackrel{(d)}{=} (n + (p + k)) + 1 \\ &\stackrel{(h)}{=} ((n + p) + k) + 1 \stackrel{(d)}{=} (n + p) + (k + 1). \end{aligned}$$

Segue que o resultado vale para todo $r \in \mathbb{N}$. \square

Por fim provamos a comutatividade

Lema 3 (Comutatividade). *Para todo $n, p \in \mathbb{N}$, $n + p = p + n$.*

Prova: Note que o resultado é válido para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $p = 0$ ou $p = 1$ (Lemma (1)). Suponha que o resultado seja válido para $p = k$ e mostremos que vale também para $p = k + 1$. De fato, da hipótese da indução (h), da definição de adição (d), do Lema (1) (11) e do Lema (Associatividade) (1a),

$$\begin{aligned} n + (k + 1) &\stackrel{(d)}{=} (n + k) + 1 \stackrel{(h)}{=} (k + n) + 1 \\ &\stackrel{(11)}{=} 1 + (k + n) \stackrel{(1a)}{=} (1 + k) + n \stackrel{(11)}{=} (k + 1) + n. \end{aligned}$$

Segue que o resultado vale para todo $p \in \mathbb{N}$. \square

Lema 4 (Lei do Cancelamento). *Para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$, $m + n = m + p$ implica $n = p$.*

Prova: Primeiramente mostremos que, $0 \neq p$ para todo natural p não nulo. Se $p \neq 0$, p é sucessor de um natural (denotado por $p-1$) e $0 + p = 0 + ((p-1) + 1) = (0 + (p-1)) + 1 = (p-1) + 1$. Logo, como 0 não é o sucessor de nenhum número natural, $0 + 0 = 0 + p$ implica $p = 0$. Se $k + 0 = k + p$ implica $p = 0$, temos que

$$\begin{aligned} (k + 1) + 0 &= k + (1 + 0) = k + (0 + 1) = (k + 0) + 1 \\ &\stackrel{||}{=} \overbrace{(k + 1) + p} = k + (1 + p) = k + (p + 1) = (k + p) + 1 \end{aligned}$$

Como números naturais distintos tem sucessores distintos segue que $k + 0 = k + p$ e portanto $p = 0$. O restante da prova é deixada como exercício. \square

Ordem

De maneira natural definimos uma ordem em \mathbb{N} . Diremos que $m \leq n$ se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.

Esta relação tem as seguintes propriedades:

- O_1 : *Reflexiva*: Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leq n$.
- O_2 : *Antissimétrica*: Se $m \leq n$ e $n \leq m$, então $m = n$.
- O_3 : *Transitiva*: Se $m \leq n$ e $n \leq p$, então $m \leq p$.
- O_4 : Dados $m, n \in \mathbb{N}$ temos que ou $m \leq n$ ou $n \leq m$.
- O_5 : Se $m \leq n$ e $p \in \mathbb{N}$, então $m + p \leq n + p$ e $mp \leq np$.

Mostre as propriedades acima.

Exercício 1 (Mostre que:). • *Todo subconjunto não vazio de \mathbb{N} tem um menor elemento.*

- $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.
- *Todo natural maior que 1 é 'produto' de fatores primos.*

De fato: *Sejam $S = \{n \in \mathbb{N}^* : n \text{ é primo ou produto de fatores primos}\}$ e $A = \{n \in \mathbb{N}^* : n \neq 1 \text{ e } n \notin S\}$. Note que o produto de elementos de S é um elemento de S . Se $A \neq \emptyset$, então A tem um primeiro elemento a . Como $a \notin S$ devemos ter que $a = m \cdot n$ com $m, n \in \mathbb{N}^*$ distintos de 1. Note que $n < a$ e $m < a$ e ao menos um deles pertence a A . Isto é uma contradição pois a é o menor elemento de A . Segue que $A = \emptyset$.*

1.2 Os Números Inteiros

Os Números Inteiros

A maneira usual de fazer a construção dos inteiros a partir dos naturais consiste em tomar os pares ordenados de números naturais com a seguinte identificação $(a, b) \sim (c, d)$ se $a + d = b + c$.

Desta forma, podemos representar $\mathbb{N} = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), \dots\}$ e $-\mathbb{N}^* = \{\dots, (0, 3), (0, 2), (0, 1)\}$.

Tomar o sucessor significa somar 1 à primeira coordenada e, para os inteiros negativos, voltar a identificar $(1, n)$ com $(0, n-1)$.

1.3 Números Racionais

Os números racionais são construídos tomando-se o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e identificando os pares $(a, b) \sim (c, d)$ para os quais $ad = bc$. Representamos um par (a, b) em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ por $\frac{a}{b}$.

Chamamos **adição** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa sua soma $x + y \in \mathbb{Q}$ e chamamos **multiplicação** a operação que a cada par $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ associa seu produto $x \cdot y \in \mathbb{Q}$.

A **soma** e o **produto** em \mathbb{Q} são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &:= \frac{ad + bc}{bd} \\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &:= \frac{ac}{bd}.\end{aligned}$$

A terna $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, ou seja, \mathbb{Q} munido das operações “+” e “ \cdot ” satisfaz as propriedades de um **corpo**. Isto quer dizer que valem as propriedades seguintes:

Propriedades da Adição em \mathbb{Q}

(A1) (associativa) $(x+y)+z = x+(y+z), \forall x, y, z \in \mathbb{Q};$

(A2) (comutativa) $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{Q};$

(A3) (**elemento neutro**) existe $0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(A4) (**oposto**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, existe $y \in \mathbb{Q}$ ($y = -x$), tal que $x + y = 0$;

Mostre as propriedades acima.

Propriedades da Multiplicação em \mathbb{Q}

(M1) (**associativa**) $(xy)z = x(yz)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$;

(M2) (**comutativa**) $xy = yx$, para todo $x, y \in \mathbb{Q}$;

(M3) (**elemento neutro**) existe $1 \in \mathbb{Q}$, tal que $x1 = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;

(M4) (**elemento inverso**) para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, existe $y \in \mathbb{Q}$, ($y = \frac{1}{x}$), tal que $x \cdot y = 1$;

Mostre as propriedades acima.

Propriedade Distributiva em \mathbb{Q}

(D) (**distributiva da multiplicação**) $x(y + z) = xy + xz$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Mostre a propriedade acima.

Apenas com estas 9 propriedades podemos provar todas as operações algébricas com o corpo \mathbb{Q} . Vamos enunciar algumas e demonstrar outras a seguir.

Proposição 1 (Lei do Cancelamento). *Em \mathbb{Q} , vale*

$$\boxed{x + z = y + z \implies x = y}$$

e, se $z \neq 0$

$$\boxed{x \cdot z = y \cdot z \implies x = y.}$$

Prova:

$$\begin{aligned}x &= x + 0 = x + (z + (-z)) = (x + z) + (-z) \\ &= (y + z) + (-z) = y + (z + (-z)) = y + 0 = y. \square\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}x &= x \cdot 1 = x \cdot (z \cdot \frac{1}{z}) = (x \cdot z) \cdot (\frac{1}{z}) \\ &= (y \cdot z) \cdot (\frac{1}{z}) = y \cdot (z \cdot (\frac{1}{z})) = y \cdot 1 = y. \square\end{aligned}$$

Proposição 2. *O elementos neutros da adição e da multiplicação são únicos.*

As seguintes proposições seguem da Lei do Cancelamento.

Proposição 3. *O elemento oposto e o elemento inverso são únicos.*

Proposição 4. *Para todo $x \in \mathbb{Q}$, $x \cdot 0 = 0$.*

Proposição 5. *Para todo $x \in \mathbb{Q}$, $-x = (-1)x$.*

Definição 1. *Diremos que*

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ é } \begin{cases} \text{n\~{a}o-negativo, se } a \cdot b \in \mathbb{N} \\ \text{positivo, se } a \cdot b \in \mathbb{N} \text{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

e diremos que

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ é } \begin{cases} \text{n\~{a}o-positivo, se } \frac{a}{b} \text{ n\~{a}o for positivo} \\ \text{negativo, se } \frac{a}{b} \text{ n\~{a}o for n\~{a}o-negativo.} \end{cases}$$

Definição 2. *Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$. Diremos que x é **menor do que** y e escrevemos $x < y$, se existir $t \in \mathbb{Q}$ positivo tal que*

$$y = x + t.$$

*Neste mesmo caso, poderemos dizer que y é **maior do que** x e escrevemos $y > x$. Em particular, teremos $x > 0$ se x for positivo e $x < 0$ se x for negativo.*

Se $x < y$ ou $x = y$, então escreveremos $x \leq y$ e lemos “ x é menor ou igual a y ”.

Da mesma forma, se $y > x$ ou $y = x$, então escreveremos $y \geq x$ e, neste caso, lemos “ y é maior ou igual a x ”.

Escreveremos $x \geq 0$ se x for não-negativo e $x \leq 0$ se x for não-positivo.

A quádrupla $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ satisfaz as propriedades de um corpo ordenado, isto é, também valem as propriedades seguintes:

- (O1) (reflexiva) $x \leq x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;
- (O2) (anti-simétrica) $x \leq y$ e $y \leq x \implies x = y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$;
- (O3) (transitiva) $x \leq y$, $y \leq z \implies x \leq z$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Q}$;
- (O4) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$, $x \leq y$ ou $y \leq x$;
- (OA) $x \leq y \implies x + z \leq y + z$;
- (OM) $x \leq y$ e $z \geq 0 \implies xz \leq yz$.

Mostre as propriedades acima.

Proposição 6. Para quaisquer x, y, z, w no corpo ordenado \mathbb{Q} , valem

$$(a) \left. \begin{array}{l} x \leq y \\ z \leq w \end{array} \right\} \implies x + z \leq y + w.$$

$$(b) \left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq z \leq w \end{array} \right\} = xz \leq yw.$$

Prova: Vamos provar o ítem (b).

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq z \leq w \end{array} \right\} \stackrel{(OM)}{=} \left. \begin{array}{l} xz \leq yz \\ yz \leq yw \end{array} \right\} \stackrel{(O3)}{=} xz \leq yw. \square$$

Mostre a parte a) da proposição.

Outras propriedades:

1.3.1 Outras propriedades:

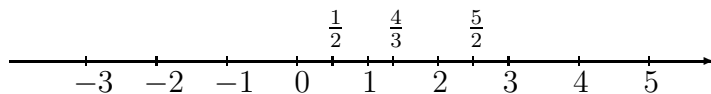
Sejam $x, y, z, w \in \mathbb{Q}$. Então valem

- $x < y \iff x + z < y + z$;
- $z > 0 \iff \frac{1}{z} > 0$;
- $z > 0 \iff -z < 0$;
- Se $z > 0$, então $x < y \iff xz < yz$;
- Se $z < 0$, então $x < y \iff xz > yz$;
- $\left. \begin{array}{l} 0 \leq x < y \\ 0 \leq z < w \end{array} \right\} = xz < yw$;
- $0 < x < y \iff 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$;
- (**tricotomia**) $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$;
- (**anulamento do produto**) $xy = 0 \iff x = 0$ ou $y = 0$.

1.4 \mathbb{Q} não é completo

\mathbb{Q} não é completo

Os números racionais podem ser representados por pontos em uma reta horizontal ordenada, chamada reta real.

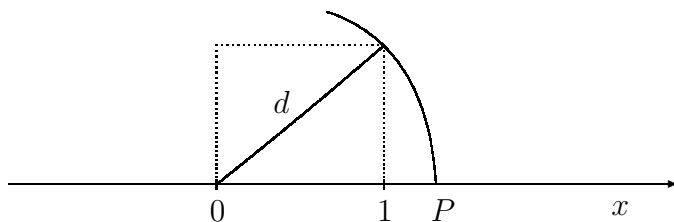


Se P for a representação de um número racional x , diremos que x é a abscissa de P . Nem todo ponto da reta real é racional.

Considere um quadrado de lado 1 e diagonal d . Pelo Teorema de Pitágoras,

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Seja P a interseção do eixo x com a circunferência de centro em 0 e raio d .



Mostraremos que P é um ponto da reta com abscissa $x \notin \mathbb{Q}$.

Proposição 7. *Seja $a \in \mathbb{Z}$. Temos*

(a) *Se a for ímpar, então a^2 é ímpar;*

(b) *Se a^2 for par, então a é par.*

Prova:

(a) Se a for ímpar, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k + 1$. Daí segue que

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\ell}) + 1 = 2\ell + 1,$$

onde $\ell = 2k^2 + 2k$, e portanto a^2 também será ímpar.

(b) Suponha, por redução ao absurdo, que a não é par. Logo a é ímpar. Então, pela Proposição 7 (a), a^2 também é ímpar, o que contradiz a hipótese. Portanto a é par. \square

Proposição 8. *A equação $x^2 = 2$ não admite solução em \mathbb{Q} .*

Prova: Suponhamos, por redução ao absurdo, que $x^2 = 2$ tem solução em \mathbb{Q} . Então podemos tomar $x = \frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $\frac{a}{b}$ irredutível. Logo $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$, ou seja, $a^2 = 2b^2$ e portanto a^2 é par. Segue da Proposição 7 (b) que a também é par. Portanto existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k$.

Mas

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 2b^2 \\ a = 2k \end{array} \right\} \implies 2b^2 = 4k^2 \implies b^2 = 2k^2.$$

Portanto b^2 é par e, pela Proposição 7 (b), b também é par. Mas isto implica que $\frac{a}{b}$ é redutível (pois a e b são divisíveis por 2) o que é uma contradição. Logo não existe $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$. \square

Exercício 2. *Sejam p_1, p_2, \dots, p_n números primos distintos. Mostre que a equação $x^2 = p_1 p_2 \dots p_n$ não admite solução racional.*

2 Corpos

Vimos que os números racionais com a sua adição, multiplicação e relação de ordem é um corpo ordenado.

Estaremos também interessados no corpo dos números reais \mathbb{R} e no corpo dos números complexos \mathbb{C} . Abstratamente, um corpo é um conjunto não vazio \mathbb{F} onde estão definidas duas operações binárias

$$\begin{aligned} + : \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\rightarrow \mathbb{F} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\rightarrow \mathbb{F} \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

que gozam das seguintes propriedades

Propriedades de um Corpo - Adição

(A1) (associativa) $(x+y)+z = x+(y+z), \forall x, y, z \in \mathbb{F}$;

(A2) (comutativa) $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{F}$;

(A3) (elemento neutro) existe $0 \in \mathbb{F}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbb{F}$;

(A4) (oposto) para todo $x \in \mathbb{F}$, existe $y \in \mathbb{F}$ ($y = -x$), tal que $x + y = 0$;

Propriedades de um Corpo - Multiplicação

(M1) (associativa) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall x, y, z \in \mathbb{F}$;

(M2) (comutativa) $x \cdot y = y \cdot x$, para todo $x, y \in \mathbb{F}$;

(M3) (elemento neutro) existe $1 \in \mathbb{F}$, tal que $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{F}$;

(M4) (elemento inverso) para todo $x \in \mathbb{F}, x \neq 0$, existe $y \in \mathbb{F}, (y = \frac{1}{x})$, tal que $x \cdot y = 1$;

Propriedades de um Corpo - Distributiva

(D) (distributiva da multiplicação) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \forall x, y, z \in \mathbb{F}$.

Se no corpo \mathbb{F} está definida uma relação de ordem \leq , a quádrupla $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ é um corpo ordenado se além das propriedades anteriores, também valem as propriedades:

(O1) (reflexiva) $x \leq x$, para todo $x \in \mathbb{F}$;

(O2) (anti-simétrica) $x \leq y$ e $y \leq x \implies x = y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}$;

(O3) (transitiva) $x \leq y, y \leq z \implies x \leq z$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{F}$;

(O4) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{F}, x \leq y$ ou $y \leq x$;

(OA) $x \leq y \implies x + z \leq y + z$;

(OM) $x \leq y$ e $z \geq 0 \implies x \cdot z \leq y \cdot z$.

Definição 3. • Diremos que um subconjunto A de um corpo ordenado $(\mathbb{F}, +, \cdot, \leq)$ é limitado superiormente se existe $L \in \mathbb{F}$ (chamado *limitante superior de A*) tal que $a \leq L$ para todo $a \in A$.

- Se $A \subset \mathbb{F}$ for limitado superiormente, diremos que um número $\sup(A) \in \mathbb{F}$ é o supremo de A , se for o menor limitante superior de A ; ou seja, se $a \leq \sup(A)$ para todo $a \in A$ e, se $\mathbb{F} \ni f < \sup(A)$, existe $a \in A$ tal que $f < a$.
- Um corpo ordenado para o qual todo subconjunto limitado superiormente possui supremo é chamado um corpo ordenado completo.

Nem todo subconjunto limitado superiormente de \mathbb{Q} tem supremo; ou seja, \mathbb{Q} é um corpo ordenado que não é completo.

3 Números Reais

A idéia que queremos usar para construir (a partir de \mathbb{Q}) o conjunto dos números reais \mathbb{R} é:

“O conjunto dos números reais preenche toda a reta real.”

Os elementos de \mathbb{R} serão os subconjuntos de \mathbb{Q} à esquerda de um ponto da reta real e serão chamados cortes.

Definição 4 (Cortes de Dedekind-1872). *Um corte é um subconjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ com as seguintes propriedades*

- $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$,
- Se $p \in \alpha$ e $\mathbb{Q} \ni q < p$, então $q \in \alpha$ e
- Se $p \in \alpha$, existe $r \in \alpha$ com $p < r$.

Exemplo 1. • Se $q \in \mathbb{Q}$ definimos $q^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < q\}$. Então q^* é um corte que chamamos de racional. Os cortes que não são racionais serão chamados irracionais.

- $\sqrt{2} = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\} \cup \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$ é irracional.

Observação 1. Note que:

- Se α é um corte, $p \in \alpha$ e $q \notin \alpha$, então $p < q$.
- Se α é um corte, $r \notin \alpha$ e $r < s$, então $s \notin \alpha$.

Definição 5. Diremos que $\alpha < \beta$ se $\alpha \subsetneq \beta$

Proposição 9. Se α, β, γ são cortes

- $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$ implica que $\alpha < \gamma$.
- Exatamente uma das seguintes relações é válida: $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$ ou $\beta < \alpha$.
- Todo subconjunto não vazio e limitado superiormente de \mathbb{R} tem supremo.

Definição 6. • Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definimos $\alpha + \beta$ como o conjunto de todos os racionais da forma $r + s$ com $r \in \alpha$ e $s \in \beta$.

- $0^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 0\}$

Mostre que $\alpha + \beta$ and 0^* são cortes.

Claramente a adição é comutativa e associativa e $\alpha + 0^* = \alpha$ para todo corte α .

Proposição 10. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ existe um único $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha + \beta = 0^*$. O corte β é dado por

$$\beta = \{-p \in \mathbb{Q} : p - r \notin \alpha \text{ para algum } r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$$

e é denotado por $-\alpha$.

Prova: De fato:

- Se $p \notin \alpha$ então $s = p + 1 \notin \alpha$ e $-s \in -\alpha$, logo $-\alpha \neq \emptyset$.
Da definição de $-\alpha$, se $p \in \alpha$ então $-p \notin -\alpha$, logo $-\alpha \neq \mathbb{Q}$.

- Se $-p \in -\alpha$ e $-q < -p$ então existe $\mathbb{Q} \ni r > 0$ tal que $q > q - r > p - r \notin \alpha$ e portanto $-q \in -\alpha$.
- Agora, se $-p \in -\alpha$ existe $\mathbb{Q} \ni 2r > 0$ tal que $p - 2r \notin \alpha$ e portanto $p - r \notin \alpha$ e $-p < -p + r \in -\alpha$.

Resta mostrar que $\alpha + (-\alpha) = 0^*$. Se $r \in \alpha$ e $s \in -\alpha$ então $-s \notin \alpha$ e $r < -s$, ou seja, $r + s < 0$. Segue que $\alpha + (-\alpha) \subset 0^*$. Por outro lado, se $-2r \in 0^*$ com $r > 0$, **existe um inteiro n tal que $nr \in \alpha$ e $(n+1)r \notin \alpha$** . Escolha $p = -(n+2)r \in -\alpha$ e escreva $-2r = nr + p$. Isto conclui a demonstração. \square

Definição 7 (Produto). *Se α, β são cortes,*

-

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} \alpha \cdot 0^* = 0^*, \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ \{p \in \mathbb{Q} : \exists 0 < r \in \alpha \text{ e } 0 < s \in \alpha \text{ tais que } p \leq rs\}, \alpha, \beta > 0^* \\ (-\alpha)(-\beta) \text{ se } \alpha, \beta < 0^* \\ - [(-\alpha)\beta] \text{ se } \alpha < 0^* \text{ e } \beta > 0^* \\ - [\alpha(-\beta)] \text{ se } \alpha > 0^* \text{ e } \beta < 0^* \end{cases}$$

- $1^* = \{s \in \mathbb{Q} : s < 1\}$.

\mathbb{R} é um corpo ordenado completo.

Denotamos o conjunto dos números reais por \mathbb{R} . Temos $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ e todo número real que não é racional é dito **irracional** ($\sqrt{2}$ é irracional).

Teorema 1. *A quádrupla $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ satisfaz as condições (A1) a (A4), (M1) a (M4), (D), (O1) a (O4), (OA) e (OM) como na seção anterior e portanto é um corpo ordenado. Além disso \mathbb{R} é completo.*

Mostre o teorema acima.

4 Módulo de um Número Real

Definição 8. Seja $x \in \mathbb{R}$. O **módulo** ou *valor absoluto* de x é dado por

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Disto segue que $|x| \geq 0$ e $-|x| \leq x \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2. Mostre que $|x|^2 = x^2$, ou seja, o quadrado de um número real não muda quando se troca seu sinal.

Exemplo 3. A equação $|x| = r$, com $r > 0$, tem como soluções os elementos do conjunto $\{r, -r\}$.

4.1 Distância

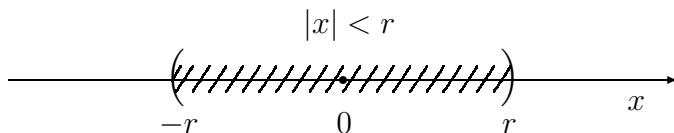
Distância

Sejam P e Q dois pontos da reta real de abscissas x e y respectivamente. Então a **distância** de P a Q (ou de x a y) é definida por $|x - y|$. Assim $|x - y|$ é a **medida** do segmento PQ . Em particular, como $|x| = |x - 0|$, então $|x|$ é a distância de x a 0 .

O próximo exemplo diz que a distância de x a 0 é menor do que r , com $r > 0$, se e somente se x estiver entre $-r$ e r .

Exemplo 4. Seja com $r > 0$. Então $|x| < r \iff -r < x < r$.

A seguinte figura ilustra o significado geométrico do exemplo.



5 Limitação de Subconjuntos de \mathbb{R}

Definição 10. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será dito **limitado**, se existir $L > 0$ tal que $|x| \leq L$, para todo $x \in A$.

Proposição 11. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será limitado se, e somente se, existir $L > 0$ tal que $A \subset [-L, L]$.

Exemplo 7.

(a) $A = [0, 1]$ é limitado

(b) \mathbb{N} não é limitado (será mostrado mais tarde)

(c) $B = \left\{ \frac{2^n - 1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ é limitado

(d) $C = \left\{ \frac{2n - 1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$ é limitado.

Definição 11. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será dito **ilimitado**, se ele não for limitado.

Proposição 12. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será ilimitado se, e somente se, para todo $L > 0$, existir $x \in A$ tal que $|x| > L$.

Limitante Superior e Inferior

Definição 12. Seja $A \subset \mathbb{R}$.

- A será dito **limitado superiormente**, se existir $L \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq L$, para todo $x \in A$.

Neste caso, L será chamado **limitante superior** de A .

- A será dito **limitado inferiormente**, se existir ℓ tal que $x \geq \ell$, para todo $x \in A$.

Neste caso, ℓ será chamado **limitante inferior** de A .

Segundo a definição acima, podemos notar que $A \subset \mathbb{R}$ será limitado se, e somente se, A for limitado superiormente e inferiormente.

Supremo

Definição 13 (Supremo). *Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente, $A \neq \emptyset$. Diremos que $\bar{L} \in \mathbb{R}$ é o supremo de A (escreveremos $\bar{L} = \sup A$) se for um limitante superior de A e para qualquer limitante superior L de A , tivermos $\bar{L} \leq L$.*

- Quando $\bar{L} = \sup A \in A$, \bar{L} será chamado **máximo** de A e escreveremos $\bar{L} = \max A$.
- Vimos que todo subconjunto não vazio e limitado superiormente de \mathbb{R} tem **supremo**.

Ínfimo

Definição 14 (Ínfimo). *Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente, $A \neq \emptyset$. Diremos que $\bar{\ell} \in \mathbb{R}$ é o ínfimo de A (escreveremos $\bar{\ell} = \inf A$) se for um limitante inferior de A e para qualquer limitante inferior ℓ de A , tivermos $\bar{\ell} \geq \ell$.*

- Quando $\bar{\ell} = \inf A \in A$, $\bar{\ell}$ será chamado **mínimo** de A e escreveremos $\bar{\ell} = \min A$.
- Veremos que todo subconjunto não vazio e limitado inferiormente de \mathbb{R} tem **ínfimo**.

Proposição 13 (1). *Dado $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente, $L = \sup A$ se, e somente se,*

- L for limitante superior de A e,*
- para todo $\varepsilon > 0$, existir $a \in A$ tal que $a > L - \varepsilon$.*

Analogamente temos

Proposição 14. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente, $A \neq \emptyset$. Então $L = \inf A$ se, e somente se,*

(a) *L for limitante inferior de A .*

(b) *Para todo $\varepsilon > 0$, existir $a \in A$ tal que $a < L + \varepsilon$.*

Teorema 2 (Propriedade Arquimediana de \mathbb{R}). *O conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ será ilimitado sempre que $x \neq 0$.*

Prova: Se $x > 0$. Suponhamos, por absurdo, que A seja limitado e seja $L = \sup A$. Como $x > 0$, da definição de \sup , deve existir $m \in \mathbb{N}$ tal que $L - x < mx$ e $L = \sup A < (m + 1)x$, o que é uma contradição.

A prova do caso $x < 0$ é análoga e será deixada como exercício. \square

Exemplo 8. (a) *Considere $A = [0, 1)$. Então -2 e 0 são limitantes inferiores de A enquanto 1 , π e 101 são limitantes superiores de A .*

(b) *\mathbb{N} não é limitado (porque?) mas é limitado inferiormente por 0 , pois $0 \leq x$, para todo $x \in \mathbb{N}$.*

(c) *$B = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq \sqrt{2}\}$ não é limitado (porque?), mas é limitado superiormente por L , onde $L \geq \sqrt{2}$.*

Corolário 1 (1). *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \frac{1}{n\sqrt{2}} < \varepsilon \quad e \quad 2^{-n} < \varepsilon.$$

Já sabemos (por construção) que, entre dois números reais distintos existe um número racional.

Provemos que entre dois números reais distintos existe um número irracional.

De fato: Sejam a e b reais distintos. Se $a < b$ e $\varepsilon = b - a > 0$, do Corolário (1), escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n\sqrt{2}} < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

- Se $a \in \mathbb{Q}$, $r = a + \frac{1}{n\sqrt{2}} \in \mathbb{I}$ e $a < r < b$.
- Se $a \in \mathbb{I}$, $r = a + \frac{1}{n} \in \mathbb{I}$ e $a < r < b$.

Assim, entre dois números reais quaisquer, existe um número irracional.

Corolário 2. *Qualquer intervalo aberto e não-vazio contém infinitos números racionais e infinitos números irracionais.*

Corolário 3. *Se $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$, então $\inf A = 0$.*

Exemplo 9. (a) *Seja $A = (0, 1]$. Então $0 = \inf A$ e $1 = \max A$.*

(b) $\sqrt{2} = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 0\} \cup \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$ é um corte.

(c) *Seja $C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. Então $\sqrt{2} = \sup C$ e $-\sqrt{2} = \inf C$. Note que $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ não pertencem a C .*

Vamos provar que $\sqrt{2}$ é um corte. De fato, se $0 < r \in \mathbb{Q}$ e $r^2 < 2$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[2r + 1]\frac{1}{n} < 2 - r^2$ e $(r + \frac{1}{n})^2 < 2$. Todas as demais propriedades de corte estão satisfeitas trivialmente.

Vamos provar que $\sqrt{2} = \sup C$. Como todos os elementos x de C são racionais que satisfazem $x^2 < 2$, $\sqrt{2}$ é um limitante superior para C . Agora, se $0 < L < \sqrt{2}$, existe um racional $r \in (L, \sqrt{2})$ e $L^2 < r^2 < 2$. Logo $r \in C$, e L não é limitante superior para C e prova o resultado.

Proposição 15. *Se $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ for limitado inferiormente (superiormente), então $-A = \{-x : x \in A\}$ será limitado superiormente (inferiormente) e $\inf A = -\sup(-A)$ ($\sup A = -\inf(-A)$).*

De fato: Se A for limitado inferiormente,

- $\inf(A) \leq x$, para todo $x \in A$ e, dado $\epsilon > 0$, deve existir $a \in A$ tal que $a < \inf(A) + \epsilon$, ou (trocando o sinal),

- $-\inf(A) \geq -x$, para todo $-x \in -A$ e, dado $\epsilon > 0$, deve existir $b = -a \in -A$ tal que $-a > -\inf(A) - \epsilon$.

Agora, da Proposição (1), $-A$ será limitado superiormente e $\sup(-A) = -\inf(A)$.

Deixaremos, como exercício, a prova a outra afirmativa.

Corolário 4. *Todo $A \neq \emptyset$ e limitado inferiormente de \mathbb{R} tem ínfimo.*

Corolário 5. *Todo subconjunto limitado e não vazio de \mathbb{R} tem ínfimo e supremo.*

5.1 Vizinhança, Pontos Isolados e Pontos de Acumulação

Definição 15 (Vizinhança). *Uma vizinhança de $a \in \mathbb{R}$ é qualquer intervalo aberto da reta contendo a .*

Exemplo 10 (δ -vizinhança). *Se $\delta > 0$, $V_\delta(a) := (a - \delta, a + \delta)$ é uma vizinhança de $a \in \mathbb{R}$ que será chamada δ -vizinhança de a .*

Definição 16 (Ponto de Acumulação). *Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Se, para todo $\delta > 0$, existir $a \in V_\delta(b) \cap A$, $a \neq b$, então b será dito um **ponto de acumulação** de A .*

Exemplo 11. (a) *O conjunto dos pontos de acumulação de (a, b) é $[a, b]$.*

(b) *Seja $B = \mathbb{Z}$. Então B não tem pontos de acumulação.*

(c) *Subconjuntos finitos de \mathbb{R} não têm pontos de acumulação.*

d) *O conjunto dos pontos de acumulação de \mathbb{Q} é \mathbb{R} .*

Definição 17 (Ponto isolado). *Seja $B \subset \mathbb{R}$. Um ponto $b \in B$ será dito um **ponto isolado** de B , se existir $\delta > 0$ tal que $V_\delta(b)$ não contém pontos de B distintos de b .*

Exemplo 12. (a) Seja $B = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$. Então o conjunto dos pontos de acumulação de B é $\{0\}$ e o conjunto dos pontos isolados de B é o próprio conjunto B .

(b) O conjunto \mathbb{Z} possui apenas pontos isolados.

Observação:

- Existem conjuntos infinitos que não possuem pontos de acumulação (por exemplo \mathbb{Z}).
- Todo conjunto infinito e limitado possui ao menos um ponto de acumulação (veja proposição a seguir).

Proposição 16 (Bolzano-Weierstrass). *Se A é um subconjunto infinito e limitado de \mathbb{R} então, A possui pelo menos um ponto de acumulação.*

Prova: Se $A \subset [-L, L]$ e $[a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$ escolhidos de modo que: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}, b_0 = -a_0 = L, b_n - a_n = 2L/2^n, n \in \mathbb{N}^*$ e $[a_n, b_n]$ contém infinitos elementos de A . Seja $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Note que $[a_n, b_n] \subset [a_j, b_j], j \leq n$ e $[a_j, b_j] \subset [a_n, b_n], j > n$. Em qualquer dos casos $a_n \leq b_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo $a \leq b_j, j \in \mathbb{N}$.

Segue que $a_n \leq a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, e $a \in \bigcap_{n \geq 1} [a_n, b_n]$.

Dado $\delta > 0$ escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $2L/2^n < \delta$. Seque que $a \in [a_n, b_n] \subset (a - \delta, a + \delta) = V_\delta(a)$ e a é ponto de acumulação de A . \square

6 Seqüências e Séries

6.1 Seqüências

Definição 18. *Uma seqüência é uma função definida no conjunto dos números naturais, que a cada $n \in \mathbb{N}$ associa um número $a_n \in \mathbb{R}$.*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto a_n$$

Notações: $\left\{ \begin{array}{l} \{a_n\} \\ \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \end{array} \right.$

Exemplos:

- Sendo $a_n = \frac{1}{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos a seqüência $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$
- Sendo $a_n = 6$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos a seqüência constante:

$$\{6, 6, \dots, 6, \dots\}$$

- Sendo $\{a_n\}$ onde

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= 7, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e} \\ a_{2n} &= 4, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1}$$

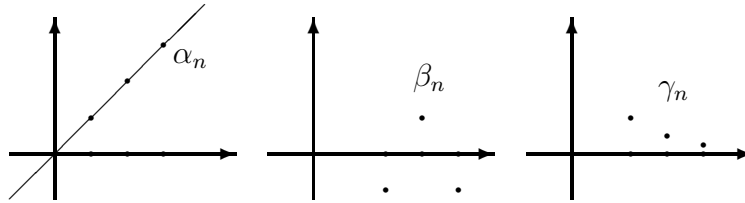
temos

$$\{4, 7, 4, 7, 4, \dots\}$$

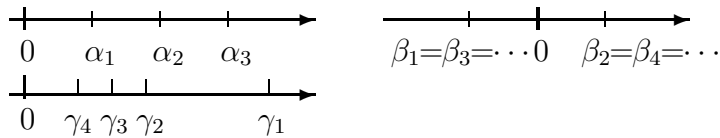
Consideremos as seqüências:

$$\alpha_n = n; \quad \beta_n = (-1)^n \quad \text{e} \quad \gamma_n = \frac{1}{n+1}.$$

Como funções eles podem ter os seus gráficos traçados, mas estes geralmente são pouco significativos.



Uma representação para seqüências que pode ser mais conveniente é obtida colocando-se os pontos a_1, a_2, a_3, \dots sobre uma reta.



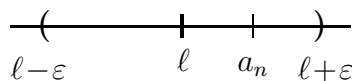
Esta representação pode mostrar para onde a seqüência “tende”.

A seqüência (α_n) “diverge” para infinito, a seqüência (β_n) é dita “oscilante” e a seqüência (γ_n) “converge para 0”.

Todas estas frases podem ser definidas precisamente, e é o que faremos.

Definição 19. A seqüência $\{a_n\}$ é dita **convergente com limite l** se para cada $\varepsilon > 0$ dado, $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \implies |a_n - l| < \varepsilon$.

Note que: $|a_n - l| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \iff l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$.



A partir de um certo N todos os a_n estão no intervalo $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.

Da arbitrariedade do ε os a_n vão se juntando em torno de ℓ .

Notação: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ ou $a_n \rightarrow \ell$ ou $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$.

Observação 1. Note que a definição anterior é exatamente a mesma que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$, vista no cálculo para funções definidas em conjuntos que não são limitados superiormente no caso em que este domínio é \mathbb{N} .

Observação 2. Quando uma seqüência tem limite 0 ela será dita, frequentemente, **infinitésima**.

Exemplos:

- $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

De fato: Dado $\varepsilon > 0$, da propriedade Arquimediana da reta, existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $N\varepsilon > 1$. Logo, para todo $n \geq N$ temos

$$0 - \varepsilon < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < 0 + \varepsilon.$$

- $\frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

De fato: Dado $\varepsilon > 0$.

Queremos encontrar $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $n > N \Rightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$

mas $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}$ e, da propriedade Archimediana da reta, existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $(N+1)\varepsilon > 1$. Logo, se $n \geq N$

$$1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1} < 1 + \varepsilon.$$

Definição 20. Uma seqüência $\{a_n\}$ será **divergente** quando ela **não** for convergente.

(I) **Seqüência divergente para $+\infty$**

Uma seqüência $\{a_n\}$ é dita divergente para $+\infty$ quando dado $K > 0$, arbitrário, $\exists N \in \mathbb{N}$ Tal que $n > N \rightarrow a_n > K$.

(II) **Seqüência divergente para $-\infty$**

Uma seqüência $\{a_n\}$ é dita divergente para $-\infty$ quando dado $K > 0$, arbitrário, $\exists N \in \mathbb{N}$ Tal que $n > N \rightarrow a_n < -K$.

(III) **Seqüência oscilante**

Uma seqüência $\{a_n\}$ é dita oscilante quando diverge, mas não diverge para $+\infty$ e nem para $-\infty$.

6.2 Operações com Seqüências

Observação: Como seqüências são funções elas podem ser multiplicadas por uma constante e duas seqüências podem ser somadas ou multiplicadas.

Operações com Seqüências

Assim, dadas duas seqüências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ e um número real c , definimos:

- $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$
- $c \cdot \{a_n\} = \{c \cdot a_n\}$
- $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$
- e se $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$.

Definição 21. *Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números reais. Diremos que $\{a_n\}$ é limitada se sua imagem for um subconjunto limitado de \mathbb{R} .*

Teorema 3. *Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números reais.*

- a) $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \Leftrightarrow$ toda vizinhança de a contém todos exceto possivelmente um número finito dos a_n 's.

- b) O limite é único.
- c) $\{a_n\}$ é convergente, então $\{a_n\}$ é limitada (não vale a volta).
- d) Se $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > 0, \forall n \geq N$.
- e) Se $A \subset \mathbb{R}$ e a é um ponto de acumulação de A , então existe uma seqüência $\{a_n\}$ de elementos de A que converge para a .

Teorema 4. Seja $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ e $c \in \mathbb{R}$, então

- a) $a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$.
- b) $c \cdot a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \cdot a$
- c) $a_n \cdot b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \cdot b$.
- d) Se $b \neq 0$ e $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n/b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a/b$.

6.3 Propriedades

Definição 22 (Subseqüência). Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números reais. Diremos que $\{b_n\}$ é uma subseqüência de $\{a_n\}$ se existir uma função estritamente crescente $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $b_k = a_{s(k)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definição 23 (Seqüências de Cauchy). Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números reais. Diremos que $\{a_n\}$ é de Cauchy se, dado $\epsilon > 0$ existir um número natural $N = N(\epsilon)$ tal que $|a_n - a_m| < \epsilon$ sempre que $n, m \geq N$.

Teorema 5.

- a) Uma seqüência $\{a_n\}$ é convergente se, e somente se, toda subseqüência de $\{a_n\}$ é convergente (com mesmo limite).
- b) Toda seqüência convergente é de Cauchy.

- c) *Toda seqüência limitada tem subsequência convergente.*
- d) *Toda seqüência de Cauchy é limitada.*
- e) *Toda seqüência de Cauchy que tem uma subsequência convergente é convergente.*
- f) *Toda seqüência de Cauchy é convergente.*
- g) *Toda seqüência crescente e limitada é convergente.*
- h) *Toda seqüência decrescente e limitada é convergente.*
- a) Uma seqüência $\{a_n\}$ é convergente se, e somente se, toda subsequência de $\{a_n\}$ é convergente (com mesmo limite).

De fato: Se toda subsequência de $\{a_n\}$ é convergente como $\{a_n\}$ é uma particular subsequência dela mesma segue o resultado.

Reciprocamente, se $\{a_n\}$ é convergente com limite a ,

dado $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \epsilon, \forall n \geq N$.

Se $\{b_n\}$ é uma subsequência de $\{a_n\}$, seja $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uma função estritamente crescente e tal que $b_n = a_{s(n)}$.

Claramente $s(n) \geq n$ e portanto $|b_n - a| = |a_{s(n)} - a| < \epsilon, \forall n \geq N$. Isto mostra que $\{b_n\}$ é convergente com limite a .

- b) Toda seqüência convergente é de Cauchy.

De fato: Se $\{a_n\}$ é convergente com limite a ,

dado $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, \forall n \geq N$.

Assim

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \forall n \geq N.$$

- **c)** Toda seqüência limitada tem subsequência convergente.

De fato: Se $\{a_n\}$ é limitada o conjunto $I = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ dos valores da seqüência pode ser finito ou infinito.

Se I é finito, para algum elemento $a \in I$, $a_n = a$ para infinitos n . Seja $\mathbb{N}' = \{n : a_n = a\}$ e tomemos $s(0)$ =menor elemento de \mathbb{N}' . Uma vez construídos $s(0), s(1), \dots, s(n-1)$ seja $s(n)$ o menor elemento de $\mathbb{N}' \setminus \{s(0), s(1), \dots, s(n-1)\}$. Segue que $\{b_n\}, b_n = a_{s(n)} = a$, é uma subsequência convergente de $\{a_n\}$.

Se I é infinito, do Teorema de Bolzano-Weierstrass, I tem um ponto de acumulação a . Seja $\mathbb{N}_0 = \{n : a_n \in (a-1, a+1), a_n \neq a\}$ e $s(0)$ o seu menor elemento. Seja $\epsilon_1 = \frac{|a_{s(0)} - a|}{2}$, $\mathbb{N}_1 = \{n : a_n \in (a-\epsilon_1, a+\epsilon_1), a_n \neq a\}$ e $s(1)$ o menor elemento de \mathbb{N}_1 .

Construídos $s(0), s(1), \dots, s(n-1)$ e $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}$ seja $\epsilon_n = \frac{|a_{s(n-1)} - a|}{2}$ e $s(n)$ o menor elemento de $\mathbb{N}_n = \{n : a_n \in (a-\epsilon_n, a+\epsilon_n), a_n \neq a\}$.

Claramente $\mathbb{N}_1 \supseteq \mathbb{N}_2 \supseteq \mathbb{N}_3 \supseteq \dots$ e $\{b_n\}$, com $b_n = a_{s(n)}$, é uma subsequência de $\{a_n\}$. Além disso, dado $\epsilon > 0$, se $N \in \mathbb{N}$ é tal que $\epsilon_N < \epsilon$. Assim, $s(n) \in \mathbb{N}_N$ e $|a_{s(n)} - a| < \epsilon_n < \epsilon, \forall n \geq N$. Isto mostra que $\{a_{s(n)}\}$ é uma subsequência convergente (com limite a) de $\{a_n\}$. Observe ainda que todos os elementos da subsequência $\{a_{s(n)}\}$ são distintos.

- **d)** Toda seqüência de Cauchy é limitada.

De fato: Se $\{a_n\}$ de Cauchy existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < 1, \forall n \geq N$. Se $M = \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N + 1|, |a_N - 1|\}$, $a_n \in [-M, M], \forall n \in \mathbb{N}$.

- **e)** Toda seqüência de Cauchy que tem uma subsequência convergente é convergente.

De fato: Se $\{a_n\}$ de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall n \geq N_1$. Se $\{b_n\} = \{a_{s(n)}\}$ é uma subsequência convergente (com limite a) de $\{a_n\}$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{s(n)} - a| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall n \geq N_2$. Seja $N = \max\{N_2, N_1\}$ e $n \geq N$. Logo

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{s(n)}| + |a_{s(n)} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isto mostra que $\{a_n\}$ converge para a .

- **f)** Toda seqüência de Cauchy é convergente.

De fato: Isto segue diretamente de $d)$, $c)$ e $e)$.

Exercício 3. *Seja $\{a_n\}$ uma seqüência. Dado $p \in \mathbb{N}$, mostre que $\{a_n\}$ é convergente (de Cauchy) se, e somente se, $\{a_{n+p}\}$ é convergente (de Cauchy).*

- **g)** Toda seqüência crescente e limitada é convergente.

De fato: Seja $\{a_n\}$ uma seqüência crescente e limitada e $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Da definição de sup e do fato que $\{a_n\}$ é crescente, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < a_N \leq a_n \leq a$. Logo $|a_n - a| < \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\{a_n\}$ é convergente com limite a .

- **h)** Toda seqüência decrescente e limitada é convergente.

Exercício: Mostre $h)$.

Exemplo

Mostre que

- $\{a, a, a, \dots\}$, $a \in \mathbb{R}$, é convergente
- $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$ não é convergente.

- $\{n\}$ não é convergente.

Exemplo

Se $\mathbb{R} \ni a \geq 0$ mostre que a seqüência $\{a^n\}$ é convergente se $0 \leq a \leq 1$ e divergente se $a > 1$.

De fato: Se $a > 1$, $a = 1 + h$ com $h > 0$. Logo

$$a^n = (1 + h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k > 1 + nh.$$

Da propriedade Archimediana da reta, a seqüência $\{a^n\}$ é ilimitada e portanto divergente.

Se $0 \leq a < 1$, $\{a^n\}$ é decrescente e limitada inferiormente por 0. Segue de h) que $\{a^n\}$ é convergente com limite $\ell \in [0, 1)$. Ainda $a^{2n} = a^n \cdot a^n$. Logo, de a) e das propriedade do produto de seqüências convergentes $\ell = \ell^2$. Segue que $\ell = 0$.

Exemplo

Mostre que, se $a \neq 1$, $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ e que a seqüência $\{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\}$ é convergente se $0 \leq a < 1$ e divergente se $a > 1$.

De fato: Note que, se $s_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$, $(1-a)s_n = 1 - a^{n+1}$ e $s_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, sempre que $a \neq 1$. O resultado agora segue do exemplo anterior.

Exemplo

Mostre que, a seqüência $\{a_n\}$ com $a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é convergente.

De fato: É claro que $\{a_n\}$ é crescente e que $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, para $n \geq 2$. Logo $a_n \leq 1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} < 3$. Segue que $\{a_n\}$ é convergente. Denotaremos o seu limite por e .

Exemplo

Mostre que a seqüência $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ é convergente.

De fato: Em primeiro lugar note que $b_n = \{(1 + \frac{1}{n})^n\} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^{-k}$ ou seja

$$\begin{aligned}
b_n &= 1 + \binom{n}{1} n^{-1} + \overbrace{\binom{n}{2} n^{-2}}^{=\frac{n(n-1)}{2!}} + \cdots + \binom{n}{n-1} n^{-n+1} + \overbrace{\binom{n}{n} n^{-n}}^{=\frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \underbrace{\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}_{=n^{-1}} \\
&\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = a_n < e
\end{aligned}$$

Como cada termo da **soma** que define b_n é crescente obtemos que b_n é crescente. Segue que $\{b_n\}$ é convergente com limite $\ell = \sup\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \leq e$.

Exemplo

Mostre que a seqüência $\{a^{\frac{1}{n}}\}$, com $a > 0$, é convergente.

De fato: Recorde que $a^{\frac{1}{n}}$ é o único número real positivo x tal que $x^n = a$. Logo se $x = a^{\frac{1}{n}}$ e $y = a^{\frac{1}{n+1}}$ temos $x^{n+1} = y^{n+1} \cdot x$ e portanto,

- Se $0 < a < 1$, então $x < 1$ e $\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = x < 1$ e $x < y$.
- Se $a > 1$, então $x > 1$ e $\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = x > 1$ e $x > y$.

Logo, se $a < 1$, $\{a^{\frac{1}{n}}\}$ é crescente e limitada superiormente por 1 portanto convergente e, se $a > 1$, $\{a^{\frac{1}{n}}\}$ é decrescente e limitada inferiormente por 1. Em qualquer dos casos é convergente com limite $\ell > 0$. Note que $a^{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n+1}}}$ e, de a) e das propriedades do quociente de seqüências, $\ell = 1$.

Exemplo

Mostre que a seqüência $\{c_n\}$ com $c_0 = 1$ e $c_n = n^{\frac{1}{n}}$, $n \geq 1$, é convergente.

De fato: Recorde que, para $n \geq 3$, $n > b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Logo, para $n \geq 3$, $n^{n+1} > (n+1)^n$ e, conseqüentemente, $n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}}$.

Isto mostra que $\{n^{\frac{1}{n}}\}$ é decrescente e limitada inferiormente por 1. Segue de h) que $\{c_n\}$ é convergente com limite $\ell \geq 1$. Ainda $(2n)^{\frac{1}{2n}} (2n)^{\frac{1}{2n}} = (2n)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{n}}$ e portanto, de a) e do exemplo anterior, $\ell^2 = \ell$ e $\ell = 1$.

Teorema 6. Se $\{a_n\}$ é limitada e $\{b_n\}$ é infinitésima, então $\{a_n \cdot b_n\}$ é infinitésima.

Prova: Como $\{a_n\}$ é limitada seja $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{b_n\}$ é infinitésima, dado $\epsilon > 0$ seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n| < \frac{\epsilon}{M}$, para todo $n \geq N$. Segue que

$$|a_n \cdot b_n| \leq M|b_n| < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Isto prova que $\{a_n \cdot b_n\}$ converge para 0 e conclui a demonstração.

Exemplo

Mostre que $\{\frac{n+\cos n}{n+1}\}$ é convergente.

Teorema 7 (Comparação). Se $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ e existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, $a_n \leq b_n$, então $a \leq b$.

Prova: Dado $\epsilon > 0$ existe $N_1 \geq N$ tal que, para todo $n \geq N_1$,

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \quad \text{e} \quad b - \epsilon < b_n < b + \epsilon.$$

Logo, $\forall n \geq N_1$,

$$a - \epsilon < a_n \leq b_n < b + \epsilon.$$

Disto segue que $a - b < 2\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ e, portanto, $a - b \leq 0$.

Teorema 8 (Sanduíche). Se $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$, $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$ e existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, $a_n \leq b_n \leq c_n$, então $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$.

Prova: Dado $\epsilon > 0$ existe $N_1 \geq N$ tal que, para todo $n \geq N_1$,

$$\ell - \epsilon < a_n < \ell + \epsilon \quad \text{e} \quad \ell - \epsilon < c_n < \ell + \epsilon.$$

Logo, $\forall n \geq N_1$,

$$\ell - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \epsilon.$$

Disto segue que $|b_n - \ell| < \epsilon$, $\forall n \geq N_1$ e que $\{b_n\}$ é convergente com limite ℓ .

Exemplo.

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)}^{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}^{b_n} =: \ell$$

De fato: Como $a_n \geq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, do Teorema (Comparação), $e \geq \ell$. Por outro lado, se $n \geq p \geq 2$,

$$b_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{p!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right)$$

do Teorema (Comparação) $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq a_p$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Segue que $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$. Isto mostra que $\ell = e$.

6.4 Comparação e Confronto

Teorema 9 (Comparação). *Se $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ e existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, $a_n \leq b_n$, então $a \leq b$.*

Prova: Dado $\epsilon > 0$ existe $N_1 \geq N$ tal que, para todo $n \geq N_1$,

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \quad \text{e} \quad b - \epsilon < b_n < b + \epsilon.$$

Logo, $\forall n \geq N_1$,

$$a - \epsilon < a_n \leq b_n < b + \epsilon.$$

Disto segue que $a - b < 2\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ e, portanto, $a - b \leq 0$.

Teorema 10 (Confronto). *Se $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$, $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$ e existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, $a_n \leq b_n \leq c_n$, então $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$.*

Prova: Dado $\epsilon > 0$ existe $N_1 \geq N$ tal que, para todo $n \geq N_1$,

$$\ell - \epsilon < a_n < \ell + \epsilon \quad \text{e} \quad \ell - \epsilon < c_n < \ell + \epsilon.$$

Logo, $\forall n \geq N_1$,

$$\ell - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \epsilon.$$

Disto segue que $|b_n - \ell| < \epsilon$, $\forall n \geq N_1$ e que $\{b_n\}$ é convergente com limite ℓ .

Exemplo.

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)}^{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}^{b_n} =: \ell$$

De fato: Como $a_n \geq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, do Teorema (Comparação), $e \geq \ell$. Por outro lado, se $n \geq p \geq 2$,

$$b_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{p!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right)$$

do Teorema (Comparação) $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq a_p$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Segue que $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$. Isto mostra que $\ell = e$.

Definição 24. *Seja $\{a_n\}$ uma seqüência. Um número real a é um valor de aderência de $\{a_n\}$ se a seqüência $\{a_n\}$ possui uma subseqüência convergente com limite a .*

Já vimos que o conjunto dos valores de aderência de uma seqüência limitada é não vazio.

Definição 25. *Seja $\{a_n\}$ uma seqüência limitada. Definimos o limite superior $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ (limite inferior $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$) da seqüência $\{a_n\}$ por*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k$$

Também escreveremos $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ ou $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ para denotar o limite inferior e o limite superior.

Teorema 11. Se $\{a_n\}$ é uma seqüência limitada, então $a = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ e $b = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ são valores de aderência de $\{a_n\}$.

Para provar o teorema acima basta verificar que, dada uma vizinhança V_a de a (ou V_b de b) temos que $a_n \in V_a$ ($a_n \in V_b$) para infinitos índices n e proceder como antes para construir a subsequência.

De fato: Dada vizinhança V_a de a e $r > 0$ tal que $(a-r, a+r) \subset V_a$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $\inf_{k \geq n} a_k \in (a-r, a+r)$ para todo $n \geq N$. Logo, existe $k_1 \geq n$ tal que $a_{k_1} \in (a-r, a+r)$. Tomando $n_1 \geq N$ e $n_1 > k_1$ temos que $\inf_{k \geq n_1} a_k \in (a-r, a+r)$ e portanto existe $k_2 \geq n_1 > k_1$ tal que $a_{k_2} \in (a-r, a+r)$, tendo construído $a_{k_1} \cdots a_{k_p}$ tomamos $n_{p+1} \geq N$ e $n_{p+1} > k_p$ e portanto $\inf_{k \geq n_{p+1}} a_k \in (a-r, a+r)$ e existe $k_{p+1} \geq n_{p+1} > k_p$ tal que $a_{k_{p+1}} \in (a-r, a+r)$. A seqüência $\{a_{k_n}\}$ está inteiramente contida em V_a mostrando o resultado.

Exercício 4. Mostre que $b = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ é um valor de aderência

Segue to Teorema (Confronto) que

Teorema 12. Se a é um valor de aderência da seqüência $\{a_n\}$ então

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n .$$

Além disso, uma seqüência é convergente se, e somente se, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Corolário 6. Uma seqüência $\{a_n\}$ é convergente se e, somente se,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n .$$

Em seguida apresentamos o método das aproximações sucessivas

Teorema 13 (Aproximações Sucessivas). Se $\kappa \in [0, 1)$, $\{a_n\}$ é uma seqüência tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \kappa |a_{n+1} - a_n|$, então $\{a_n\}$ é de Cauchy.

Prova: Se $m > n$ são naturais, $m = n + p$ para algum $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &\leq |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\ &\leq \kappa^{n+p-1}|a_1 - a_0| + \cdots + \kappa^n|a_1 - a_0| \\ &\leq \kappa^n[\kappa^{p-1} + \cdots + 1]|a_1 - a_0| \\ &\leq \frac{\kappa^n}{1 - \kappa}|a_1 - a_0|. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$ escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\kappa^n}{1-\kappa}|a_1 - a_0| < \epsilon$. Segue que, se $m, n \geq N$, $|a_m - a_n| < \epsilon$ e $\{a_n\}$ é de Cauchy.

Exemplo: Seja $a > 0$ e $\{a_n\}$ a sequência definida por $a_0 = c > 0$ e $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right)$. Mostre que $\{a_n\}$ é convergente com limite \sqrt{a} .

De fato: Note que

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) + \frac{a}{2} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{2 a_n a_{n+1}} \right) (a_{n+1} - a_n) \end{aligned}$$

Note que, para todo $t > 0$, $\frac{1}{2} \left(t + \frac{a}{t} \right) > \sqrt{\frac{a}{2}}$. Logo $a_n > \sqrt{\frac{a}{2}}$, para todo $n \geq 1$. Disto segue que $2 a_n a_{n+1} > a$ e que

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{a}{2 a_n a_{n+1}} \right| < \frac{1}{2}.$$

Logo, do Método das aproximações sucessivas $\{a_n\}$ é convergente e o limite ℓ deve satisfazer $\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{a}{\ell} \right)$, ou seja $\ell^2 = a$.

6.5 Limite Superior e Limite Inferior

Definição 26. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência. Um número real a é um valor de aderência de $\{a_n\}$ se a sequência $\{a_n\}$ possui uma subsequência convergente com limite a .*

Já vimos que o conjunto dos valores de aderência de uma sequência limitada é não vazio.

Vimos também que se a é um ponto de acumulação do conjunto $I = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ dos valores da seqüência $\{a_n\}$ então a é um valor de aderência da seqüência $\{a_n\}$.

Definição 27. *Seja $\{a_n\}$ uma seqüência limitada. Definimos o limite superior $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ (limite inferior $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$) da seqüência $\{a_n\}$ por*

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k\end{aligned}$$

Também escreveremos $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ ou $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ para denotar o limite inferior e o limite superior.

Teorema 14. *Se $\{a_n\}$ é uma seqüência limitada, então $a = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ e $b = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ são valores de aderência de $\{a_n\}$.*

Para provar o teorema acima basta verificar que, dada uma vizinhança V_a de a (ou V_b de b) temos que $a_n \in V_a$ ($a_n \in V_b$) para infinitos índices n e proceder como antes para construir a subseqüência.

De fato: Dada vizinhança V_a de a e $r > 0$ tal que $(a-r, a+r) \subset V_a$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $\inf_{k \geq n} a_k \in (a-r, a+r)$ para todo $n \geq N$. Logo, existe $k_1 \geq N$ tal que $a_{k_1} \in (a-r, a+r)$.

Tomando $n_1 \geq N$ e $n_1 > k_1$ segue que $\inf_{k \geq n_1} a_k \in (a-r, a+r)$ e portanto existe $k_2 \geq n_1 > k_1$ tal que $a_{k_2} \in (a-r, a+r)$.

Tendo construído $a_{k_1} \cdots a_{k_p}$ tomamos $n_{p+1} \geq N$ e $n_{p+1} > k_p$. Segue que $\inf_{k \geq n_{p+1}} a_k \in (a-r, a+r)$ e existe $k_{p+1} \geq n_{p+1} > k_p$ tal que $a_{k_{p+1}} \in (a-r, a+r)$.

A seqüência $\{a_{k_n}\}$ está inteiramente contida em V_a mostrando que V_a contém a_n para infinitos índices n .

Exercício 5. Use isto para mostrar que a é um valor de aderência de $\{a_n\}$ e mostre que $b = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ também é um valor de aderência de $\{a_n\}$.

Segue to Teorema (Compação) que

Teorema 15. Se a é um valor de aderência da seqüência $\{a_n\}$ então

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Além disso, uma seqüência é convergente se, e somente se, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Segue to Teorema (Confronto) que

Corolário 7. Uma seqüência $\{a_n\}$ é convergente se e, somente se,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

6.6 Seqüências divergentes para $+\infty$ ou $-\infty$.

Recorde que

Definição 28. Diremos que a seqüência $\{a_n\}$ diverge para $+\infty$ ($-\infty$) se, dado $M > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq M$ ($a_n \leq -M$) para todo $n \geq N$. Escreveremos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ($-\infty$) ou $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n \rightarrow \infty} +\infty$ ($-\infty$).

Diremos que a seqüência $\{a_n\}$ é eventualmente positiva (negativa) se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > 0$ ($a_n < 0$), para todo $n \geq N$.

Teorema 16. a) Se $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n \rightarrow \infty} \infty$ e $\{b_n\}$ é limitada inferiormente, então $a_n + b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n \rightarrow \infty} \infty$.

b) Se $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n \rightarrow \infty} \infty$ e $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n > 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = +\infty$.

c) Seja $\{a_n\}$ uma seqüência com $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. $\{a_n\}$ é eventualmente positiva e $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n \rightarrow \infty} 0$ se, e somente se, $\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n \rightarrow \infty} +\infty$.

d) Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são eventualmente positivas, $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

d₁) Se $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$ e $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

d₂) Se $\{a_n\}$ é limitada e $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, então $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

a) Se $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $\{b_n\}$ é limitada inferiormente, então $a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

De fato: Como $\{b_n\}$ é limitada inferiormente existe um número real $\ell > 0$ tal que $b_n \geq -\ell, \forall n \in \mathbb{N}$. Como $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, dado $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq M + \ell, \forall n \geq N$. Logo

$$a_n + b_n \geq M + \ell - \ell = M, \forall n \geq N.$$

Isto mostra que $a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

b) Se $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n > 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = +\infty$.

De fato: Como $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = r > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\inf_{k \geq n} b_k \geq \frac{r}{2}$ para todo $n \geq N_1$. Como $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, dado $M > 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > \frac{2M}{r}$ para todo $n \geq N_2$. Disto segue que, para $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$

$$a_n \cdot b_n \geq \frac{2M}{r} \cdot \frac{r}{2} = M, \forall n \geq N.$$

c) Seja $\{a_n\}$ uma seqüência com $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. $\{a_n\}$ é eventualmente positiva e $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ se, e somente se, $\frac{1}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

De fato: Se $\{a_n\}$ é infinitésima e eventualmente positiva, dado $M > 0$ seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 < a_n < \frac{1}{M}, \forall n \geq N$. Logo $\frac{1}{a_n} > M, \forall n \geq N$, mostrando que $\frac{1}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

Reciprocamente, se $\frac{1}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, dado $\epsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\epsilon}, \forall n \geq N$. Segue que $0 < a_n < \epsilon, \forall n \geq N$. Isto prova o resultado.

d) Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são eventualmente positivas, $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

d₁) Se $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$ e $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

d₂) Se $\{a_n\}$ é limitada e $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, então $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

De fato:

d₁) Se $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = r > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq \frac{r}{2}, \forall n \geq N_1$, dado $M > 0$ seja $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < b_n < \frac{r}{2M}, \forall n \geq N_2$. Logo $\frac{a_n}{b_n} > \frac{r}{2} \cdot \frac{2M}{r} = M, \forall n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$, mostrando que $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

d₂) Seja $L > 0$ tal que $|a_n| \leq L, \forall n \in \mathbb{N}$. Como $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $b_n > \frac{L}{\epsilon}$ (ou $\frac{1}{b_n} < \frac{\epsilon}{L}$), $\forall n \geq N$. Logo,

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - 0 \right| < L \cdot \frac{\epsilon}{L} = \epsilon, \forall n \geq N. \text{ Mostrando que } \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Se $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ nada podemos afirmar de $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$.

Neste caso tudo pode ocorrer, $\{a_n\} + \{b_n\}$ pode convergir para qualquer número real, pode divergir para $+\infty$ or $-\infty$ ou pode oscilar.

Exemplo 13. Se $a_n = \sqrt{n+1}$ e $b_n = -\sqrt{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é fácil ver que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ e $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$. Para ver o que ocorre com a seqüência $\{a_n\} + \{b_n\}$ observe que

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Segue de d₂) que $\{a_n\} + \{b_n\}$ é infinitésima.

Exemplo 14. Se $a > 1$, então a seqüência $\{a_n\}$ com $a_n = \frac{a^n}{n}$ diverge para $+\infty$.

De fato: Basta ver que $a = 1 + h$ com $h > 0$ e escrever

$$\frac{a^n}{n} = \frac{(1+h)^n}{n} = \frac{1}{n} + h + (n-1) \frac{h^2}{2!} + s_n.$$

O resultado segue aplicando a).

Exemplo 15. Se $a > 1$, então a seqüência $\{a_n\}$ com $a_n = \frac{n!}{a^n}$ diverge para $+\infty$.

De fato: Basta escolher n_0 tal que $\frac{n_0}{a} > 2$ e escrever, para $n \geq n_0$, $a_n = \frac{n_0!}{a^{n_0}} \frac{n!}{n_0! a^{n-n_0}}$. Se $r = \frac{n_0!}{a^{n_0}}$ temos que

$$a_n = r \frac{n(n-1)\cdots(n_0+1)}{a^{n-n_0}} = r2^{n-n_0} + s_n = r(n+1-n_0) + \tilde{s}_n.$$

O resultado segue aplicando a).

Exemplo 16. Seja $\{a_n\}$ construída indutivamente por $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $n \geq 2$. Mostre que $\{a_n\}$ é convergente com limite 2.

Vamos inicialmente verificar que $\{a_n\}$ é crescente. De fato:

(i) $a_1 < a_2$

(ii) Suponhamos válido para $n-1$, isto é: $a_{n-1} < a_n$

$$a_n = \sqrt{2+a_{n-1}} < \sqrt{2+a_n} = a_{n+1}.$$

Assim $a_n < a_{n+1}$, portanto $\{a_n\}$ é crescente.

A seguir vamos verificar que 3 é limitante superior para o conjunto dos valores da seqüência $\{a_n\}$:

(i) $a_1 = \sqrt{2} < 3$

(ii) Suponhamos $a_{n-1} < 3$. Então

$$a_n = \sqrt{2+a_{n-1}} < \sqrt{2+3} < \sqrt{9} = 3.$$

Como $\{a_n\}$ é crescente e limitada superiormente segue que ela é convergente. Se ℓ é tal que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$, como $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, temos

$$a_{n+1}^2 = 2 + a_n \quad \text{e} \quad \ell^2 = 2 + \ell.$$

Isto nos dá $\ell=2$ ou $\ell=-1$. Como $\ell > 0$ segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

- Exercício 6.** a) Se $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ e $\{b_n\}$ é limitada superiormente, então $a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$.
- b) Se $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ e $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n > 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = -\infty$.
- c) Seja $\{a_n\}$ uma seqüência com $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. $\{a_n\}$ é eventualmente negativa e $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ se, e somente se, $\frac{1}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$.
- d) Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são eventualmente negativas, $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
- d₁) Se $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n < 0$ e $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.
- d₂) Se $\{a_n\}$ é limitada e $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$, então $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- e) No item d) analise a situação em que $\{a_n\}$ é eventualmente positiva e $\{b_n\}$ é eventualmente negativa.

7 Séries

Exemplo 17. • Considere $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Prove que $\{s_n\} \rightarrow \infty$.

Resolução: Como $\{s_n\}$ é crescente, basta mostrar que é ilimitada:

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2}, \quad s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3},$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{4 \cdot \frac{1}{8}} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 5 \cdot \frac{1}{2}.$$

Pode-se mostrar, por indução, que $s_{2^k} > (k+2) \cdot \frac{1}{2}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Assim $\{s_n\}$ não é limitada superiormente, portanto: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$.

7.1 O que é uma série?

Consideremos a seqüência $\{a_n\}$.

A partir da seqüência $\{a_n\}$ vamos construir a seqüência $\{s_n\}$ (das somas parciais) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}s_1 &= a_1 \\s_2 &= a_1 + a_2 \\s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\&\vdots \\s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \\&\vdots\end{aligned}$$

Definição 29. A seqüência $\{s_n\}$ das somas parciais é chamada *série associada* à seqüência $\{a_n\}$. Cada s_n é chamado **soma parcial ou reduzida de ordem n**. Os termos a_n são chamados os **termos da série**.

Notação:

$$\sum_{n \geq 1} a_n \quad \text{ou} \quad \sum a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ou} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots .$$

Observação: As vezes consideraremos séries que começam com a_{n_0} em lugar de a_1 . Neste caso escreveremos $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, por exemplo.

Exemplos:

- $\{a_n\} = \{(-1)^{n+1}\}$.

Construímos a seqüência das somas parciais (série):

$$\begin{aligned}s_1 &= a_1 = 1 \\s_2 &= a_1 + a_2 = 0 \\s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\&\vdots\end{aligned}$$

- $\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$.

Construimos a seqüência das somas parciais (série):

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ &\vdots \\ s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &\vdots \end{aligned}$$

• $\{a_n\} = \left\{ \frac{6}{10^n} \right\}.$

Construimos a seqüência das somas parciais (série):

$$\begin{aligned} s_1 &= 0,6 \\ s_2 &= 0,6 + 0,06 = 0,66 \\ s_3 &= 0,66 + 0,006 = 0,666 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observe que $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3}.$

Escrevemos

$$\frac{2}{3} = 0,6 + 0,06 + 0,006 + \cdots .$$

Definição 30. A série $\sum a_n$ é dita **convergente** se a seqüência $\{s_n\}$ é convergente. Caso contrário a série é dita **divergente**.

Se a seqüência $\{s_n\}$ é convergente para **S** dizemos que a série $\sum_1^\infty a_n$ é **convergente com soma S**.

Claramente podemos definir a soma e multiplicação de séries e das propriedades de seqüências podemos deduzir a convergência da série soma, produto, etc.

Notação: $\sum_{n=1}^\infty a_n = \mathbf{S}.$

Portanto, quando escrevemos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \mathbf{S}$ queremos dizer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \mathbf{S}.$$

Exemplo 18 (Série Telescópica).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Note que,

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Assim $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ é divergente.
Aqui $s_n = -1$ para n ímpar e $s_n = 0$ para n par.
Portanto $\{s_n\}$ não converge.

- $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ diverge. Aqui $s_n = 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$.

$\{s_n\}$ não é limitada e assim não é convergente.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge - **Série Harmônica**. Aqui $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Já vimos anteriormente que $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

Algumas séries são importantes pois servem como referência para o estudo de outras. A Série Telescópica, a Série Harmônica são exemplos deste tipo. Outro exemplo seria a **Série Geométrica** que veremos a seguir

A **Série Geométrica** $\sum_{n \geq 1} a r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$ ($a \neq 0$) é convergente se, e só se, $|r| < 1$, caso em que sua soma é $\frac{a}{1-r}$.

Assim

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1 \quad (*)$$

onde r é dito **razão** de Série Geométrica.

De fato:

- (i) Se $r = 1$ então $s_n = a + a + \dots + a = na$, que tende a ∞ ou $-\infty$, conforme $a > 0$ ou $a < 0$. Portanto a série é divergente.
- (ii) Se $r \neq 1$, temos:

$$\begin{aligned} s_n &= a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \\ r s_n &= ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n. \end{aligned}$$

Subtraindo membro a membro:

$$s_n(1-r) = a - ar^n = a(1-r^n).$$

Portanto $s_n = a \frac{(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \cdot r^n.$

- Se $|r| < 1$, como vimos anteriormente, $r^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} r^n \right) = \frac{a}{1-r}.$$

- Se $|r| > 1$ ou $r = -1$, como vimos anteriormente, (r^n) é divergente e, conseqüentemente, $\{s_n\}$ também é, ou seja, a série é divergente. \square

Teorema 17. Se $\sum a_n$ é uma série convergente então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. A recíproca é falsa.

Prova: Note que, se $\{s_n\}$ com $s_n = a_1 + \dots + s_n$ é convergente, temos

$$a_n = s_n - s_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s - s = 0$$

e o resultado está provado. Para ver que não vale a volta considere a série harmônica.

Exercício 7. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente se, e somente se, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ é convergente.

Teorema 18. Se $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, $\sum a_n$ é uma série convergente se, e somente se, a seqüência das somas parciais é limitada.

Teorema 19 (Comparação). Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos. Se existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_n \leq c \cdot b_n$, para todo $n \geq n_0$, então

- Se $\sum b_n$ é convergente, então $\sum a_n$ é convergente.
- Se $\sum a_n$ é divergente, então $\sum b_n$ é divergente.

Exemplo 19. Se $r > 1$, $\sum \frac{1}{n^r}$ é convergente.

Solução: Simplesmente note que

$$\begin{aligned} s_{2^n-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r}\right) + \left(\frac{1}{4^r} + \frac{1}{5^r} + \frac{1}{6^r} + \frac{1}{7^r}\right) + \dots \\ &\quad + \left(\underbrace{\frac{1}{(2^n - 2^{n-1})^r} + \dots + \frac{1}{(2^n - 2)^r} + \frac{1}{(2^n - 1)^r}}_{=2^{n-1}}\right) \\ &< 1 + \frac{2}{2^r} + \frac{4}{4^r} + \dots + \frac{2^{n-1}}{2^{(n-1)r}} \\ &= 1 + \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{4^{r-1}} + \dots + \frac{1}{2^{(n-1)(r-1)}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{r-1}}} \end{aligned}$$

Segue do fato que uma seqüência é convergente se, e somente se, ela é de Cauchy que o seguinte resultado vale.

Teorema 20 (Critério de Cauchy para Séries). $\sum a_n$ é convergente se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$$

para todo $n \geq N$ e para todo $p \in \mathbb{N}$.

Definição 31. Uma série $\sum a_n$ é absolutamente convergente quando $\sum |a_n|$ é convergente.

Segue facilmente do critério de Cauchy que

Teorema 21. Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente, então $\sum a_n$ é convergente.

Não vale a volta.

De fato: Note que $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ não é absolutamente convergente mas é convergente. Para concluir que é convergente note que

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2}, \quad s_4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right), \quad s_6 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \cdots$$

Sendo assim, $s_2 < s_4 < s_6 < \cdots < s_{2n} < \cdots$ e $\{s_{2n}\}$ é crescente limitada (por 1) e portanto convergente. Por outro lado

$$s_1 = 1, \quad s_3 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right), \quad s_5 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right), \cdots$$

Sendo assim, $s_1 > s_3 > s_5 > \cdots > s_{2(n-1)} > \cdots$ e $\{s_{2n-1}\}$ é decrescente limitada e portanto convergente.

Por outro lado $s_{2n+1} - s_{2n} = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e portanto $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente.

Exercício 8. *Seja $\{a_n\}$ uma seqüência infinitésima de termos não negativos que é decrescente. Mostre que $\sum(-1)^n a_n$ é convergente.*

Sugestão: Repita a prova acima substituindo $\frac{1}{n}$ por a_n .

Exercício 9. • *Seja $\sum b_n$ uma série convergente de termos não negativos. Se existem $k > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|a_n| \leq kb_n$ para todo $n \geq n_0$ então a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.*

• *Se existem $c \in (0, 1)$, $k > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|a_n| \leq k \cdot c^n$ para todo $n \geq n_0$ então a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.*

Teorema 22 (Teste da Raiz). *Se $\{a_n\}$ é uma seqüência limitada e $\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} = c < 1$ então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.*

De fato: Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{k \geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} < r = \frac{c+1}{2} < 1$ para todo $n \geq N$. Logo $|a_n| < r^n$ para todo $n \geq N$. Segue do Teorema da Comparação que $\sum |a_n|$ é convergente, ou seja, $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Exemplo 20. *Se $p \in \mathbb{N}$ então $\sum n^p a^n$ é convergente para $|a| < 1$ e divergente para $|a| \geq 1$.*

Solução: Basta ver que $\overline{\lim} |n^p a^n|^{\frac{1}{n}} = |a| < 1$ e aplicar o Teste da Raiz. Para ver que a série é divergente para $|a| \geq 1$ basta notar que a seqüência dos termos da série não converge para zero neste caso.

7.2 Critérios de convergência para séries

Teorema 23 (Teste da Raiz). *Se $\{a_n\}$ é uma seqüência limitada e $\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} = c < 1$ então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.*

De fato: Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{k \geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} < r = \frac{c+1}{2} < 1$ para todo $n \geq N$. Logo $|a_n| < r^n$ para todo $n \geq N$. Segue do Teorema da Comparação que $\sum |a_n|$ é convergente, ou seja, $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Exemplo 21. Se $p \in \mathbb{N}$ então $\sum n^p a^n$ é convergente para $|a| < 1$ e divergente para $|a| \geq 1$.

Solução: Basta ver que $\overline{\lim} |n^p a^n|^{\frac{1}{n}} = |a| < 1$ e aplicar o Teste da Raiz. Para ver que a série é divergente quando $|a| \geq 1$ basta notar que a seqüência dos termos da série não converge para zero neste caso.

Teorema 24 (Teste da Razão). Se $\sum b_n$ é uma série convergente de termos positivos e $\sum a_n$ é uma série de termos não nulos tais que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \forall n \geq n_0,$$

então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Em particular, se $\overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c < 1$, então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

De fato:

$$\frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|} \leq \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}}, \quad \frac{|a_{n_0+2}|}{|a_{n_0+1}|} \leq \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}}, \quad \frac{|a_{n_0+3}|}{|a_{n_0+2}|} \leq \frac{b_{n_0+3}}{b_{n_0+2}}, \quad \dots$$

Logo $\frac{|a_{n_0+p}|}{|a_{n_0}|} \leq \frac{b_{n_0+p}}{b_{n_0}}$ e o resultado segue utilizando o Teorema da Comparação. O caso particular segue tomando $b_n = c^n$.

Exemplo 22. $\sum \frac{n!}{n^n} a^n$ é convergente para $|a| < e$.

De fato: Note que, para $a \neq 0$, $\frac{\left| \frac{(n+1)!}{(n+1)(n+1)} a^{(n+1)} \right|}{\left| \frac{n!}{n^n} a^n \right|} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} |a| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|a|}{e}$. O resultado agora segue do Teste da Razão.

Exemplo 23. Considere a série $\sum a_n$ com $a_{2n} = 2a^{2n-1}$ e $a_{2n-1} = a^{2(n-1)}$.

Vamos aplicar o critério da raiz e o critério da razão para esta série.

- Se $n = 2k$, $\frac{|a_{2k+1}|}{|a_{2k}|} = \frac{|a^{2k}|}{2|a^{2k-1}|} = \frac{|a|}{2}$.

- Se $n = 2k - 1$, $\frac{|a_{2k}|}{|a_{2k-1}|} = \frac{2|a^{2k-1}|}{|a^{2(k-1)}|} = 2|a|$.

Segue que $\overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2|a|$. Por outro lado $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a|$.

Desta forma, o teste da Raiz nos dá convergência para $|a| < 1$ enquanto que o teste da razão nos dá convergência apenas para $|a| < \frac{1}{2}$.

Isto indica uma possível melhor eficácia do Teste da Raiz que é provada no resultado a seguir.

Teorema 25. *Seja $\{a_n\}$ uma seqüência limitada de números reais não nulos. Então*

$$\underline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \underline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

De fato: Mostremos primeiramente que $\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Se não, seja $c > 0$ com $\overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < c < \overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < c, \quad \forall n \geq N.$$

Disto segue que $|a_{N+p}| < |a_N|c^{-N}c^{N+p}$ para todo $p \in \mathbb{N}^*$. Sendo assim $c < \overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq c$ o que é uma contradição.

Para ver que $\underline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \underline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ procedemos de modo similar supondo que, para algum $c > 0$ $\underline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > c > \underline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Logo existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > c, \forall n \geq N$, e $|a_{N+p}| > |a_N|c^{-N}c^{N+p}$ para todo $p \in \mathbb{N}^*$. Logo $c > \underline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} \geq c$ e temos uma contradição.

Corolário 8. *Seja $\{a_n\}$ uma seqüência limitada de números reais não nulos. Se existe o limite $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ então o limite $\lim |a_n|^{\frac{1}{n}}$ também existe e ambos têm o mesmo valor.*

Exemplo 24.

$$\lim \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = e$$

De fato: Seja $a_n = \frac{n^n}{n!}$ e note que $(a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$. Note também que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$$

O resultado desejado agora segue do corolário acima.

Teorema 26 (Dirichlet). *Seja $\sum a_n$ uma série (não necessariamente convergente) e $s_n = a_1 + \dots + a_n$, $n \in \mathbb{N}$ as suas somas parciais. Se $\{s_n\}$ é limitada e $\{b_n\}$ é uma seqüência de números reais positivos que é não-crescente e infinitésima, então $\sum a_n b_n$ é convergente.*

De fato: Segue facilmente por indução que, se $s_n = a_1 + \dots + a_n$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \\ &= s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \dots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_n \end{aligned}$$

Seja $M = \sup\{|s_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Como $\sum(b_n - b_{n+1})$ é uma série convergente de números reais não negativos e $s_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, temos que

$$|s_k(b_k - b_{k+1})| \leq M(b_k - b_{k+1}),$$

segue que $\sum_{n=1}^{\infty} s_n(b_n - b_{n+1})$ é convergente e que $\sum a_n b_n$ é convergente. \square

Exemplo 25. *Para cada número real x que não é múltiplo inteiro de 2π , as séries $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ e $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ são convergentes.*

Solução: Para ver que $\{\sum_{k=1}^n \cos(kx)\}$ (ou $\{\sum_{k=1}^n \sin(kx)\}$) é limitada utilizamos que (já que $e^{ix} \neq 1$)

$$1 + e^{ix} + e^{i2x} + \dots + e^{inx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$$

e tomamos parte real e parte imaginária. O resultado agora segue do Teorema (Dirichlet).

Teorema 27 (Abel). *Seja $\sum a_n$ uma série convergente e $\{b_n\}$ uma seqüência não crescente de números positivos (não precisa ser infinitésima) então a série $\sum a_n b_n$ é convergente.*

De fato: Seja $c = \lim b_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n$ e $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Note que

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k (b_k - c) + c \sum_{k=1}^n a_k$$

Do Teorema (Dirichlet), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - c)$ é convergente com soma s . Logo $\sum a_n b_n = s + c \sum a_n$. \square

Teorema 28 (Leibiniz). *Seja $\{b_n\}$ uma seqüência não crescente e infinitésima. Então a série $\sum (-1)^n b_n$ é convergente.*

De fato: É fácil ver que, se $a_n = (-1)^n$ e $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, então $\{s_n\}$ é limitada (embora não seja convergente). Segue do Teorema (Dirichlet) que $\sum (-1)^n b_n$ é convergente.

Teorema 29. *Seja $\{a_n\}$ uma seqüência não-crescente de números reais não negativos. A série $\sum a_n$ é convergente se, e somente se, a série $\sum 2^k a_{2^k}$ é convergente.*

De fato: Sejam $\{s_n\}$ e $\{\tilde{s}_n\}$ são as seqüências das somas parciais de $\sum a_n$ e $\sum 2^k a_{2^k}$. Então, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\leq s_{2^{n-1}} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{n-1}} + \cdots + a_{2^n - 1}) \\ &\leq \tilde{s}_{n-1} \leq \tilde{s}_n. \end{aligned}$$

Logo, se $\{\tilde{s}_n\}$ é limitada segue que $\{s_n\}$ é limitada.

Agora note que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^n} \\ &\geq \frac{a_1}{2} + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) \\ &\geq \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^n} = \frac{1}{2}\tilde{s}_n. \end{aligned}$$

Logo, se $\{s_n\}$ é limitada segue que $\{\tilde{s}_n\}$ é limitada. \square

Exemplo 26. Do resultado anterior, a série $\sum \frac{1}{n^p}$ é convergente se, e somente se a série $\sum \frac{2^n}{2^{np}} = \sum 2^{(1-p)n}$ é convergente se, e somente se, $p > 1$.

Exemplo 27. A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ é convergente se, e somente se $p > 1$.

De fato: Do resultado anterior, basta notar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(\log(2^n))^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)n^p}$$

é convergente se e somente se $p > 1$.

O número e é irracional

Exemplo 28. $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ é irracional.

De fato: Seja $s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} 0 < e - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots \right] \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{nn!} \end{aligned}$$

Agora, suponha que existem inteiros positivos p e q tais que $e = \frac{p}{q}$. Segue que

$$0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q} \leq 1.$$

Por hipótese $q!e$ é um inteiro e como $q!s_q$ também é inteiro segue que $q!(e - s_q)$ é inteiro em $(0, 1)$ e temos uma contradição.

Exemplo 29. Considere a série $\{a_n\}$ com $a_{2n} = \frac{1}{2^n}$ e $a_{2n-1} = \frac{1}{3^n}$.

Note que

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \text{ e } \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\sqrt[2n]{a_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ e } \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Logo, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ e $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. O teste da raiz indica convergência enquanto que o teste da razão não se aplica.

Teorema 30 (Teste da Raiz - Revisitado). *Se $\{a_n\}$ é uma seqüência limitada e $\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} = c < 1$ então $\sum a_n$ é absolutamente convergente. Se $\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} = c > 1$ então $\sum a_n$ é divergente. Se $c = 1$ nada podemos concluir.*

De fato: A primeira parte já foi provada anteriormente. Vamos mostrar que, se $\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} = c > 1$, então $\sum a_n$ é divergente. Isto segue do fato que existe $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $\{|a_{\phi(n)}|^{\frac{1}{\phi(n)}}\}$ converge para $c > 1$ e portanto $\{|a_{\phi(n)}|\}$ não converge para zero. Para ver que nada pode ser dito quando $c = 1$ tome as séries $\sum \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$.

Teorema 31 (Teste da Razão - Revisitado). *Se $\sum a_n$ é uma série de termos não nulos e $\overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c < 1$, então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.*

Por outro lado, se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ para todo $n \geq n_0$ então a série é divergente.

7.3 Séries de Potência

Dada uma seqüência $\{a_n\}$ de números reais, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

é chamada uma série de potências. Os números a_n são chamados de coeficientes da série e x é um número real.

Dependendo da escolha de x a série pode convergir ou divergir. Vamos tentar determinar o maior conjunto de valores de x para o qual a série de potências é convergente.

Teorema 32. Dada a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ seja $\alpha = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Defina

$$R = \frac{1}{\alpha} \text{ se } 0 < \alpha < \infty,$$

$$R = 0 \text{ se } \alpha = \infty \text{ e ,}$$

$$R = \infty \text{ se } \alpha = 0$$

Então, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge se $|x| < R$, diverge se $|x| > R$ e nada podemos afirmar de $|x| = R$.

De fato: Basta notar que $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \alpha$ e aplicar o teste da raiz.

Exemplo 30. Vamos analisar a convergência das séries de potências

- $\sum n^n x^n, R = 0.$
- $\sum \frac{n^n}{n!} x^n, R = e^{-1}.$
- $\sum \frac{x^n}{n!}, R = \infty.$
- $\sum x^n, R = 1.$
- $\sum \frac{x^n}{n^p}, p > 0, R = 1.$

7.4 Séries rearranjadas

Seja $\sum a_n$ uma série. Defina as seqüências

- $\{a_n^+\}$ com $a_n^+ = a_n$ se $a_n > 0$ e $a_n^+ = 0$ se $a_n \leq 0$.
- $\{a_n^-\}$ com $a_n^- = -a_n$ se $a_n < 0$ e $a_n^- = 0$ se $a_n \geq 0$.

As seqüências $\{a_n^+\}$ e $\{a_n^-\}$ serão chamadas de parte positiva e parte negativa de $\{a_n\}$. Sendo assim $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$, $a_n = a_n^+ - a_n^-$ e $|a_n| = a_n + 2a_n^-$.

Note que, se $\sum a_n$ é absolutamente convergente então $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são convergentes. Reciprocamente, se $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são convergentes então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Além disso, se $\sum a_n$ é convergente mas não é absolutamente convergente, segue facilmente das relações acima que ambas $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são divergentes.

Seja $\{a_n\}$ a seqüência dos termos da série $\sum a_n$, $\xi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uma bijeção e $b_n = a_{\xi(n)}$. A série $\sum b_n$ é chamada uma série rearranjada de $\sum a_n$.

Exemplo 31. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Mostramos que esta série é convergente. Se s é a sua soma ($s = \log 2$), temos

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots$$

$$\frac{1}{2}s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \dots$$

$$\frac{3s}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

Logo uma série rearranjada pode ter soma distinta da série original. Isto não ocorre se a série for absolutamente convergente.

Teorema 33. Toda série rearranjada de uma série absolutamente convergente é convergente com mesma soma.

De fato: Se $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, $\xi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é uma bijeção e $b_n = a_{\xi(n)}$, dado $n \in \mathbb{N}$ seja $m_n = \max\{\xi(1), \dots, \xi(n)\}$, então

$$\sum_{k=1}^n b_k \leq \sum_{k=1}^{m_n} a_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

e $\sum b_n$ é convergente com $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Por outro lado, dado $m \in \mathbb{N}$ seja $n_m = \max\{\xi^{-1}(1), \dots, \xi^{-1}(m)\}$. Sendo assim

$$\sum_{k=1}^m a_k \leq \sum_{k=1}^{n_m} b_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Isto mostra que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Para o caso geral note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

e portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \square$$

Teorema 34. Se $\sum a_n$ é convergente e não é absolutamente convergente, então

- Dado $c \in \mathbb{R}$, existe bijeção $\xi_c: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\xi_c(n)} = c$.
- Existem bijeções ξ_+ e ξ_- tais que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\xi_+(n)}$ diverge para $+\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\xi_-(n)}$ diverge para $-\infty$

De fato: Seja $\{p_n\}$ a seqüência dos termos positivos de $\{a_n\}$ na ordem em que eles aparecem e $\{q_n\}$ a seqüência dos termos não positivos de $\{a_n\}$ na ordem em que eles aparecem. Sabemos que $\sum p_n$ e $\sum q_n$ divergem e que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Dado $c \in \mathbb{R}$ seja n_1 o primeiro inteiro tal que

$$\sum_{n=1}^{n_1} p_n > c.$$

Em seguida escolha m_1 o menor inteiro tal que

$$\sum_{n=1}^{n_1} p_n + \sum_{n=1}^{m_1} q_n < c$$

e prossiga com este processo.

Desta forma, para todo $k > 1$,

$$\begin{aligned} 0 &< \sum_{j=1}^{n_1} p_j + \sum_{j=1}^{m_1} q_j + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} p_j + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} q_j \\ &+ \cdots + \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} q_j + \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} p_j - c \leq p_{n_k+1} \quad e \\ 0 &> \sum_{j=1}^{n_1} p_j + \sum_{j=1}^{m_1} q_j + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} p_j + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} q_j \\ &+ \cdots + \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} p_j + \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} q_j - c \geq q_{m_k}. \end{aligned}$$

Agora, como $q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e $p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ o resultado segue desta reordenação.

Um processo semelhante prova a segunda parte do resultado. \square

8 Funções - Limites e Continuidade

Definição 32 (Limite). *Seja D um subconjunto de \mathbb{R} , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D . Diremos que **o limite de $f(x)$ quando x tende a p é L** se, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D \text{ e } 0 < |x - p| < \delta, \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Dito de outra forma, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ tal que

$$f(D \cap (p - \delta, p + \delta) \setminus \{p\}) \subset (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Note que:

- Se não existe um número real L tal que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ diremos que $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ não existe.
- O ponto p não precisa pertencer a D e mesmo que pertença o valor de f em p não é importante para a definição acima.
- Apenas os valores de f em pontos arbitrariamente próximos a p são importantes para a definição.

Teorema 35. *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D . O limite de $f(x)$ quando x tende a p , caso exista, é único. Este limite será denotado por*

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L.$$

De fato: Se L e L' são limites de $f(x)$ quando x tende a p , dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \text{ e } 0 < |x - p| < \delta, \implies |f(x) - L| < \varepsilon \text{ e } |f(x) - L'| < \varepsilon.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, com a escolha de δ acima e $x \in D$ satisfazendo $0 < |x - p| < \delta$, temos

$$|L - L'| = |L - f(x) + f(x) - L'| \leq |f(x) - L| + |L' - f(x)| < 2\varepsilon.$$

Isto mostra que $L = L'$. \square

Quando nos referimos a uma função, fica implícito que ela tem um domínio especificado.

Dada a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, dado $D' \subset D$ denotaremos por $f|_{D'} : D' \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f|_{D'}(x) = f(x)$, para $x \in D'$.

Nos referiremos a $f|_{D'}$ como a restrição de $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ a D' .

Segue imediatamente da definição que

Teorema 36 (1). *Seja D um subconjunto de \mathbb{R} , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, $D' \subset D$ e p um ponto de acumulação de D' . Se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ então $\lim_{x \rightarrow p} f|_{D'}(x) = L$*

8.1 Critério negativo para existência de limites

Teorema 37. *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, D' e D'' subconjuntos de D e $p \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D' e de D'' .*

- Se

- um dos limites $\lim_{x \rightarrow p} f|_{D'}(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow p} f|_{D''}(x)$ não existe ou

- ambos existem e $\lim_{x \rightarrow p} f|_{D'}(x) \neq \lim_{x \rightarrow p} f|_{D''}(x)$

então o limite $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ não existe.

- Se $(D' \cup D'') \setminus \{p\} = D \setminus \{p\}$, o limite $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ existe se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow p} f|_{D'}(x)$ e $\lim_{x \rightarrow p} f|_{D''}(x)$ existem e $\lim_{x \rightarrow p} f|_{D'}(x) = \lim_{x \rightarrow p} f|_{D''}(x)$.

Prova: A prova da primeira parte segue diretamente de (1). Para a segunda parte, existe $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D, 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon,$$

se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D', 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon \implies |f|_{D'}(x) - L| < \epsilon$$

e

$$x \in D'', 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon \implies |f|_{D''}(x) - L| < \epsilon.$$

se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow p} f|_{D'}(x) = \lim_{x \rightarrow p} f|_{D''}(x). \square$$

8.2 Limites Laterais

Se $D \subset \mathbb{R}$, diremos que $p \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação à direita (esquerda) de D se é um ponto de acumulação de $D_p^+ = D \cap (p, \infty)$ ($D_p^- = D \cap (-\infty, p)$).

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p é um ponto de acumulação à direita (esquerda) de D . O **limite de $f(x)$ quando x tende a p pela direita (esquerda)** é

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) := \lim_{x \rightarrow p} f|_{D_p^+}(x) \quad \left(\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) := \lim_{x \rightarrow p} f|_{D_p^-}(x) \right)$$

Corolário 9. *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p é um ponto de acumulação à direita e à esquerda de D . Então*

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x)$$

existe se, e somente se, existem os limites laterais à direita e à esquerda e

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x).$$

Teorema 38. *Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D . Se existe $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ então f é limitada em uma vizinhança de p , isto é, existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tais que $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta \implies |f(x)| < M$.*

De fato: Existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < 1$. Logo

$$|f(x)| \leq |f(x) - L| + |L| \leq 1 + |L| = M, \quad \forall x \in D, 0 < |x - p| < \delta. \square$$

Teorema 39 (Confronto). *Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ funções e p um ponto de acumulação de D . Se existe $\delta_0 > 0$ tal que, para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta_0$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} h(x) = L$ então $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$.*

De fato: Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_0 > \delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ e $|h(x) - L| < \epsilon$. Logo

$$L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon, \quad \forall x \in D, 0 < |x - p| < \delta.$$

Segue que $L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$, $\forall x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$. Ou ainda

$$|g(x) - L| < \epsilon, \quad \forall x \in D, 0 < |x - p| < \delta. \square$$

Teorema 40 (Conservação do Sinal). *Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D . Se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in D$ com $0 < |x - p| < \delta$.*

De fato: Dado $\epsilon = \frac{L}{2}$ existe $\delta > 0$ tal que

$$-\frac{L}{2} < f(x) - L < \frac{L}{2}$$

para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$. Logo $0 < \frac{L}{2} < f(x)$ para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$. \square

Teorema 41 (Comparação). *Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D . Se existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$ e existem $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_f$ então $L_f \leq L_g$.*

De fato: Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow$

$$L_f - \frac{\epsilon}{2} \leq f(x) \leq g(x) \leq L_g + \frac{\epsilon}{2}.$$

Segue que $L_f - L_g \leq \epsilon$ e como $\epsilon > 0$ é arbitrário o resultado segue. \square

Teorema 42 (Limite por seqüências). *Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D . O limite $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ existe para toda seqüência $\{x_n\}$ em $D \setminus \{p\}$ que converge para p .*

De fato: Se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ e $\{x_n\}$ é seqüência em $D \setminus \{p\}$ com $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$, para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$.

Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - p| < \delta$ para todo $n \geq N$. Logo $|f(x_n) - L| < \epsilon$, para todo $n \geq N$. Isto mostra que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$. \square

Para a recíproca primeiramente note que, se $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ existe para toda seqüência $\{x_n\}$ em $D \setminus \{p\}$ que converge para p todas as seqüência $\{f(x_n)\}$ têm o mesmo limite pois se duas tais seqüências tem imagens pela f com limites distintos, alternando os seus elementos contruímos uma seqüência $\{\tilde{x}_n\}$ em $D \setminus \{p\}$ que converge para p e tal que $\{f(\tilde{x}_n)\}$ não converge.

Agora, se $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ não é L , existe $\epsilon > 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in D$, $0 < |x_n - p| < \frac{1}{n}$ tal que $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ não é L . \square

8.3 Propriedades do Limite

Sejam $f_i : D_{f_i} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1$ e 2 , funções. Suponha que p seja um ponto de acumulação de $D_{f_1} \cap D_{f_2}$ e que $\lim_{x \rightarrow p} f_i(x) = L_i$, $i = 1, 2$. Então:

- 1) $\lim_{x \rightarrow p} (f_1 + f_2)(x) = \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow p} f_2(x) = L_1 + L_2$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow p} k f_1(x) = k L_1$ onde $k = \text{constante}$.
- 3) $\lim_{x \rightarrow p} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow p} f_2(x) = L_1 \cdot L_2$.
- 4) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow p} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow p} f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.

Sabendo de que estas propriedades facilitam, enormemente, o nosso trabalho, vamos fazer a demonstração das mesmas para poder utilizá-las, livremente.

Prova de 1): $\lim_{x \rightarrow p} (f_1 + f_2)(x) = \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow p} f_2(x) = L_1 + L_2$

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_i > 0$ tal que

$$x \in D_{f_i}, 0 < |x - p| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - L_i| < \frac{\epsilon}{2}, i = 1, 2.$$

Escolha $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então

$$\begin{aligned} x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1+f_2}, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow \\ |(f_1 + f_2)(x) - (L_1 + L_2)| \leq |f_1(x) - L_1| + |f_2(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

ou seja $\lim_{x \rightarrow p} (f_1 + f_2)(x) = L_1 + L_2$.

Prova de 2): $\lim_{x \rightarrow p} k f_1(x) = k L_1$ onde $k = \text{constante}$

Se $k = 0$ o resultado é trivial. Se $k \neq 0$, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1}, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f_1(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{|k|}.$$

Então

$$x \in D_{f_1}, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |k f_1(x) - k L_1| = |k| |f_1(x) - L_1| < |k| \frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon.$$

ou seja $\lim_{x \rightarrow p} (k f_1)(x) = k L_1$.

Prova de 3): $\lim_{x \rightarrow p} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow p} f_2(x) = L_1 \cdot L_2$

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1}, 0 < |x - p| < \delta_1 \Rightarrow |f_1(x) - L_1| < \min \left\{ \frac{\epsilon}{2(|L_2|+1)}, 1 \right\}.$$

e $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_2}, 0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow |f_2(x) - L_2| < \min \left\{ \frac{\epsilon}{2(|L_1|+1)}, 1 \right\}.$$

Logo $|f_2(x)| \leq |f_2(x) - L_2| + |L_2| < |L_2| + 1$ sempre que $x \in D_{f_2}$, $0 < |x - p| < \delta_2$.

Logo, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para $x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1 \cdot f_2}$, $0 < |x - p| < \delta$,

$$\begin{aligned} |(f_1 \cdot f_2)(x) - (L_1 \cdot L_2)| &\leq |(f_1(x) - L_1)f_2(x) + L_1(f_2(x) - L_2)| \\ &\leq |f_1(x) - L_1||f_2(x)| + |L_1||f_2(x) - L_2| \\ &\leq |f_1(x) - L_1|(|L_2| + 1) + |L_1||f_2(x) - L_2| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2(|L_2| + 1)}(|L_2| + 1) + |L_1| \frac{\epsilon}{2(|L_1| + 1)} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

ou seja $\lim_{x \rightarrow p} (f_1 \cdot f_2)(x) = L_1 \cdot L_2$.

Prova de 4): $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow p} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow p} f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1}, 0 < |x - p| < \delta_1 \Rightarrow |f_1(x) - L_1| < \frac{\epsilon|L_2|}{4}$$

e $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_2}, 0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow |f_2(x) - L_2| < \min\left\{\frac{\epsilon|L_2|^2}{4(|L_1| + 1)}, \frac{|L_2|}{2}\right\}.$$

Logo, se $x \in D_{f_2}$, $0 < |x - p| < \delta_2$

$$|L_2| \leq |f_2(x) - L_2| + |f_2(x)| < \frac{|L_2|}{2} + |f_2(x)| \text{ e } \frac{|L_2|}{2} < |f_2(x)|.$$

Logo, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para $x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1 \cdot f_2}$, $0 < |x - p| < \delta$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{L_1}{L_2} \right| &= \frac{|(f_1(x) - L_1)L_2 + (L_2 - f_2(x))L_1|}{|f_2(x)||L_2|} \\ &\leq \frac{|f_1(x) - L_1||L_2| + |L_2 - f_2(x)||L_1|}{|L_2||L_2|/2} \\ &\leq 2 \frac{|f_1(x) - L_1|}{|L_2|} + 2|L_2 - f_2(x)| \frac{|L_1|}{|L_2|^2} \\ &\leq 2 \frac{\epsilon|L_2|}{4} \frac{1}{|L_2|} + 2 \frac{\epsilon|L_2|^2}{4(|L_1| + 1)} \frac{|L_1|}{|L_2|^2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

ou seja $\lim_{x \rightarrow p} (f_1 \cdot f_2)(x) = L_1 \cdot L_2$.

Teorema 43 (Critério de Cauchy). *Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funções e p um ponto de acumulação de D . O $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ existe se, e somente se, f é de Cauchy em p , isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in D$, $0 < |x - p| < \delta$ e $0 < |y - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

De fato: É claro que se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ então f é de Cauchy em p . Reciprocamente, se f é de Cauchy em p e $\{x_n\}$ é uma seqüência em $D \setminus \{p\}$ que converge para p , $\{f(x_n)\}$ é de Cauchy e portanto convergente. \square

Limites no infinito

Seja D um subconjunto **ilimitado superiormente** de \mathbb{R} e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diremos que o limite de $f(x)$ quando x tende para **infinito** é $L \in \mathbb{R}$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $M = M(\epsilon) > 0$ tal que

$$x \in D, x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Escreveremos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L.$$

De modo análogo, quando D é ilimitado inferiormente, definimos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

O limite de uma seqüência é um caso particular de limite infinito. Neste caso $D = \mathbb{N}$ é ilimitado superiormente.

Limites infinitos

Seja D um subconjunto \mathbb{R} e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se p é um ponto de acumulação de D diremos que $f(x)$ **diverge** para $+\infty$ quando x tende para p se, dado $M > 0$, existe $\epsilon = \epsilon(M) > 0$ tal que

$$x \in D, 0 < |x - p| < \epsilon \Rightarrow f(x) > M.$$

Escreveremos

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = +\infty.$$

De modo análogo definimos

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = -\infty.$$

Se D é ilimitado superiormente (inferiormente) definimos também

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty \quad (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty).$$

8.4 Limites Superior e Inferior

Seja D um subconjunto \mathbb{R} e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se p é um ponto de acumulação de D . Suponha que exista um $\delta_0 > 0$ tal que

$$\sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} < \infty$$

Então, existe (ou diverge para $-\infty$) o limite

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\}$$

Escrevemos $\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) = +\infty$ quando f não é limitada superiormente em nenhuma vizinhança de p .

Semelhantemente, se

$$\inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} > -\infty,$$

definimos (podendo ser $+\infty$)

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\}$$

Escreveremos $\underline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) = -\infty$ quando f não for limitada inferiormente em uma vizinhança de p .

Valor de Aderência

Definição 33. Dizemos que $y \in \mathbb{R}$ é um valor de aderência de f no ponto p se existe seqüência $\{x_n\}$ em $D \setminus \{p\}$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$.

Teorema 44. Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D .

- 1) Se ℓ é um valor de aderência de f em p , $\underline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) \leq \ell \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x)$.
- 2) Se f é limitada em uma vizinhança de p então $\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x)$ e $\underline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x)$ são valores de aderência de f .
- 3) $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ existe se, e somente se, f é limitada em uma vizinhança de p e o conjunto dos valores de aderência de f em p é unitário.
- 4) Se f é limitada em uma vizinhança de p , dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\underline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) - \epsilon < f(x) < \overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) + \epsilon$ para todo $x \in D$ com $0 < |x - p| < \delta$.

Prova de 1): Se $\underline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) = l$ e $\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) = L$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$l - \epsilon < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} < l + \epsilon$$

$$L - \epsilon < \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} < L + \epsilon$$

$\forall 0 < \delta < \delta_\epsilon$. Escolha $\delta_0 < \delta_\epsilon$. Se ℓ é um valor de aderência de f em p , existe $x_n \in D \setminus \{p\}$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$, com $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$. Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - p| < \delta_0$, $\forall n \geq N$. Logo, $\forall n \geq N$,

$$l - \epsilon < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\}$$

$$\leq f(x_n) \leq \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} < L + \epsilon.$$

Segue que $l - \epsilon \leq \ell \leq L + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ e portanto $l \leq \ell \leq L$. \square

Prova de 2): Note que, para algum $\delta_0 > 0$ temos que

$$-\infty < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} \leq \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} < \infty.$$

Como

$$(0, \delta_0) \ni \delta \mapsto \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} \text{ é não-decrescente e}$$

$$(0, \delta_0) \ni \delta \mapsto \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} \text{ é não-crescente,}$$

existem os limites

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} = l \text{ e}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} = L$$

Como p é um ponto de acumulação de D seja $\{x_n^l\}$ e $\{x_n^L\}$ seqüências em D tais que $0 < \max\{|x_n^l - p|, |x_n^L - p|\} < \frac{\delta_0}{n}$ e

$$\inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \frac{\delta_0}{n}\} \leq f(x_n^l) \leq \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \frac{\delta_0}{n}\} + \frac{1}{n}$$

$$\sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \frac{\delta_0}{n}\} - \frac{1}{n} \leq f(x_n^L) \leq \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \frac{\delta_0}{n}\}$$

O resultado agora segue tomando o limite nas expressões acima. \square

Prova de 3): Se o limite existe então f é limitada em uma vizinhança de p e todos os valores de aderência coincidem e em particular o $\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) = \underline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x)$. Por outro lado, se f é limitada em uma vizinhança de p e o conjunto dos valores de aderência é unitário $\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) = \underline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x)$ e todos os valores de aderência coincidem. Disto segue que o limite existe.

Prova de 4): Se $\underline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) = l$ e $\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) = L$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$l - \epsilon < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} < l + \epsilon$$

$$L - \epsilon < \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} < L + \epsilon$$

$\forall 0 < \delta < \delta_\epsilon$. Segue que, para $\delta < \delta_\epsilon$ e $x \in D, 0 < |x - p| < \delta$,

$$l - \epsilon < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} \leq f(x)$$

$$\leq \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} < L + \epsilon. \square$$

9 Continuidade

9.1 Funções - Limites e Continuidade

Definição 34 (Continuidade). *Seja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$. Diremos que $f(x)$ é **contínua em p** se, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D_f \text{ e } |x - p| < \delta, \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(p)| < \varepsilon .$$

Observação 2. *Note que,*

- *se $p \in D_f$ é um ponto de acumulação de D_f , então f é contínua em p se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ e*
- *se p é um ponto isolado de D_f então f é contínua em p .*

Exemplo 32. (a) *A função $f(x) = k$ é contínua em $x = p$ para cada $p \in \mathbb{R}$.*

(b) *A função $f(x) = x$ é contínua em $x = p$ para cada $p \in \mathbb{R}$.*

(c) *A função $f(x) = x + 1$ é contínua em $x = p$ para cada $p \in \mathbb{R}$.*

(d) *A função $f(x) = x^2$ é contínua em $x = p$ para cada $p \in \mathbb{R}$.*

(e) *A função $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ não é contínua em $x = 1$ pois*
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \neq 0 = f(1).$$

Exercício: Verifique cada uma das afirmativas do exemplo anterior utilizando os resultados dos exemplos anteriores para as mesmas funções.

9.2 Propriedades do Limite

Recordemos as propriedades do limite.

Sejam $f_i : D_{f_i} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1$ e 2 , funções. Suponha que p seja um ponto de acumulação de $D_{f_1} \cap D_{f_2}$ e que $\lim_{x \rightarrow p} f_i(x) = L_i$, $i = 1, 2$. Então:

$$1) \lim_{x \rightarrow p} (f_1 + f_2)(x) = \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow p} f_2(x) = L_1 + L_2.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow p} k f_1(x) = k L_1 \text{ onde } k = \text{constante.}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow p} f_2(x) = L_1 \cdot L_2.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow p} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow p} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow p} f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \text{ se } L_2 \neq 0.$$

Corolário 10. *Sejam $f_i : D_{f_i} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1$ e 2 , funções. Suponha que $p \in D_{f_1} \cap D_{f_2}$ e que f e g sejam contínuas em p . Então $f_1 + f_2$, $k \cdot f_1$, $f_1 \cdot f_2$ e, se $f_2(p) \neq 0$, f_1/f_2 são contínuas em p .*

Teorema 45 (Limite da Composta). *Sejam $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $\text{Im}(g) \subset D_f$ e $L \in D_f$. Se p é um ponto de acumulação de D_g , $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$ e f é contínua em L , então*

$$\lim_{x \rightarrow p} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow p} g(x)\right) = f(L).$$

De fato: Como f é contínua em L , dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_f > 0$ tal que

$$y \in D_f, \quad |y - L| < \delta_f \Rightarrow |f(y) - f(L)| < \epsilon.$$

Como $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$, dado $\delta_f > 0$ existe $\delta_g > 0$ tal que

$$x \in D_g, \quad 0 < |x - p| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - L| < \delta_f.$$

Desta forma, como $\text{Im}(g) \subset D_f$, $D_{f \circ g} = D_g$ e

$$x \in D_g = D_{f \circ g}, \quad 0 < |x - p| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - L| < \delta_f \Rightarrow |f(g(x)) - f(L)| < \epsilon.$$

Logo $\lim_{x \rightarrow p} f(g(x)) = f(L)$. \square

9.3 Funções contínuas: Resultados fundamentais

Recorde que:

Definição 35 (Continuidade). *Seja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$. Diremos que $f(x)$ é **contínua em** p se, dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D_f \text{ e } |x - p| < \delta, \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(p)| < \epsilon.$$

- Se p é um ponto de acumulação de D_f , f é contínua em p se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$.
- Diremos que f é contínua se for contínua para todo $p \in D_f$.
- Soma, produto, quociente e composição de funções contínuas é uma função contínua.
- Funções racionais e funções trigonométricas são contínuas.

9.4 O Teorema da Conservação do Sinal

Teorema 46 (Teorema da Conservação do Sinal). *Seja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\bar{x} \in D_f$ tal que $f(\bar{x}) > 0$ ($f(\bar{x}) < 0$). Então, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) sempre que $x \in D_f$ e $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$.*

De fato: Como f é contínua em \bar{x} , dado $\epsilon = f(\bar{x}) > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$x \in D_f, x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(\bar{x}) - \epsilon, f(\bar{x}) + \epsilon) = (0, 2f(\bar{x})).$$

Isto prova o resultado. \square

9.5 O Teorema do Anulamento

Teorema 47 (Teorema do Anulamento). *Se*

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ é contínua e } f(a) < 0 < f(b)$$

($f(a) > 0 > f(b)$), então, existe $\bar{x} \in (a, b)$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.

De fato: Faremos apenas o caso $f(a) < 0 < f(b)$. Seja

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) > 0, \text{ para todo } s \in [x, b]\}.$$

Note que $\emptyset \neq A \subset [a, b]$ (pois $f(b) > 0$). Seja $z = \inf A$. Do Teorema da Conservação do Sinal, $z \in (a, b)$ e $z \notin A$. Portanto $f(z) \leq 0$.

Por outro lado, do Teorema da Comparação, $f(z) = \lim_{x \rightarrow z^+} f(x) \geq 0$ (pois $x > z \Rightarrow x \in A \Rightarrow f(x) > 0$). Logo, $f(z) = 0$. \square

9.6 O Teorema do Valor Intermediário

Teorema 48 (Teorema do Valor Intermediário). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e tal que $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$). Se $f(a) < k < f(b)$ ($f(a) > k > f(b)$), então existe $\bar{x} \in (a, b)$ tal que $f(\bar{x}) = k$.*

De fato: Considere a função $g(x) = f(x) - k$. Então

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ é contínua, } g(a) < 0 \text{ e } g(b) > 0$$

e do Teorema do Anulamento, existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $g(\bar{x}) = 0$. Portanto $f(\bar{x}) = k$. \square

9.7 O Teorema de Weierstrass e Aplicações

Teorema 49 (de Weierstrass ou do Valor Extremo). *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua, existirão $p, q \in [a, b]$ tais que*

$$f(p) \leq f(x) \leq f(q), \text{ para todo } x \in [a, b].$$

De fato: Verifiquemos, inicialmente, que $\text{Im}(f)$ é limitada.

Se este não fosse o caso, dado $n \in \mathbb{N}$, existiria $x_n \in [a, b]$ tal que, $x_0 \in [a, b]$ e $|f(x_n)| > \max\{n, |f(x_{n-1})|\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Seja $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Segue que $A \subset [a, b]$ tem um ponto de acumulação $r \in [a, b]$.

Como f é contínua em r , existe $\delta > 0$ tal que,

$$x \in (r - \delta, r + \delta) \cap [a, b] = B \Rightarrow |f(x) - f(r)| < 1.$$

Segue que $f(B)$ é limitado e contém infinitos pontos de $f(A)$ e isto é uma contradição. Segue que $\text{Im}(f)$ é limitada.

Seja $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Então $f(x) \geq m$, $\forall x \in [a, b]$. Se f não é constante, m é ponto de acumulação de $\{y \in \text{Im}(f) : y > m\}$.

Seja $x_0 \in [a, b]$ tal que $0 < f(x_0) - m$ e $x_k \in [a, b]$ tal que $0 < f(x_k) - m < \min\{\frac{1}{k}, f(x_{k-1}) - m\}$, para $k \in \mathbb{N}^*$.

O conjunto $A = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ é infinito e limitado, portanto A tem um ponto de acumulação p .

Como f é contínua em p , para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe $\delta_n > 0$ tal que

$$x \in [a, b], |x - p| < \delta_n \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \frac{1}{n}.$$

Em particular, escolha $x_k \in A$ com $k > n$ e tal que $|x_k - p| < \delta_n$,

$$m - \frac{1}{n} < f(x_k) - \frac{1}{n} < f(p) < f(x_k) + \frac{1}{n} < m + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} < m + \frac{2}{n}.$$

Concluimos que $f(p) = m$.

A afirmativa restante segue de $-\inf \text{Im}(-f) = \sup \text{Im}(f)$. \square

Como uma conseqüência do Teorema do Valor Intermediário e do Teorema de Weierstrass, obtemos o seguinte resultado

Corolário 11. *Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se*

$$m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\} \text{ e } M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\},$$

então

$$\text{Im}(f) = f([a, b]) = [m, M].$$

10 Topologia da Reta

10.1 Abertos, Fechados, Compactos e Conexos

Definição 36. *Seja $A \subset \mathbb{R}$.*

- 1) *Um ponto $a \in A$ é interior a A se existe $r > 0$ tal que $(a-r, a+r) \subset A$.*
- 2) *O conjunto A é aberto se todos os seus pontos são interiores.*
- 3) *O conjunto A é fechado em \mathbb{R} se seu complementar é aberto.*
- 4) *O interior A° de A é o conjunto dos pontos interiores a A .*
- 5) *O fecho \bar{A} de A é a interseção de todos os fechados que contém A .*

Teorema 50. *Seja Λ um conjunto e $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de conjuntos.*

- 1) *Se cada A_λ é aberto, $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é aberto.*
- 2) *Se cada A_λ é aberto e Λ é um conjunto finito, $\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é aberto.*
- 3) *Se cada A_λ é fechado, $\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é fechado.*
- 4) *Se cada A_λ é fechado e Λ é um conjunto finito, $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é fechado.*

Exemplo 33. *Todo intervalo aberto é aberto. O interior de $[a, b]$ é (a, b) . O interior A° de A é o maior aberto contido em A . O fecho de A é o menor fechado que contém A .*

Teorema 51. *Todo subconjunto aberto A de \mathbb{R} se exprime, de maneira única, como união enumerável de intervalos abertos disjuntos*

Prova: Primeiramente note que se Λ é um conjunto, para cada λ , $I_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda)$ é um intervalo e $p \in \cap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ então $\cup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda = (a, b)$ onde $a = \inf_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ e $b = \sup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$. De fato, é claro que $\cup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \subset (a, b)$. Para provar a outra inclusão note que $p \in (a, b)$ e se $x \in (a, b)$, ou $x \leq p$ ou $x > p$. Agora,

- se $x \leq p$, do fato que $a = \inf_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda < x$, existe $\mu_1 \in \Lambda$ tal que $a_{\mu_1} < x \leq p < b_{\mu_1}$.
- se $x > p$, do fato que $b = \sup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda > x$, existe $\mu_2 \in \Lambda$ tal que $a_{\mu_2} < p < x < b_{\mu_2}$.

Em qualquer dos casos $x \in \cup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$.

Para o restante da prova, dado $x \in A$ seja I_x a união de todos os intervalos abertos contidos em A e que contém x . Segue que

- 1) $I_x = (a_x, b_x) \subset A$,
- 2) se $x, y \in A$, ou $I_x \cap I_y = I_x = I_y$ ou $I_x \cap I_y = \emptyset$ e
- 3) $\cup_{x \in A} I_x = A$.

Tomando, para cada intervalo desta decomposição um único racional vemos que A pode ser escrito como união enumerável de intervalos disjuntos. Para ver que esta decomposição é única basta notar que cada intervalo aberto de uma tal decomposição está contido em algum dos I_x e não pode ser distinto de I_x . \square

Corolário 12. *Se I é um intervalo aberto e $I = A \cup B$ onde A e B são conjuntos abertos e disjuntos então um deles conjuntos é vazio.*

Teorema 52. *Seja Λ um conjunto e $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de conjuntos.*

- 1) *Se cada A_λ é aberto, $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é aberto.*
- 2) *Se cada A_λ é aberto e Λ é um conjunto finito, $\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é aberto.*
- 3) *Se cada A_λ é fechado, $\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é fechado.*
- 4) *Se cada A_λ é fechado e Λ é um conjunto finito, $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é fechado.*

Exemplo 34. *Todo intervalo aberto é aberto. O interior de $[a, b]$ é (a, b) . O interior A° de A é o maior aberto contido em A . O fecho de A é o menor fechado que contém A .*

Teorema 53. *Todo subconjunto aberto A de \mathbb{R} se exprime, de maneira única, como união enumerável de intervalos abertos disjuntos*

Prova: Primeiramente note que se Λ é um conjunto, para cada λ , $I_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda)$ é um intervalo e $p \in \cap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ então $\cup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda = (a, b)$ onde $a = \inf_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ e $b = \sup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$. De fato, é claro que $\cup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \subset (a, b)$. Para provar a outra inclusão note que $p \in (a, b)$ e se $x \in (a, b)$, ou $x \leq p$ ou $x > p$. Agora,

- se $x \leq p$, do fato que $a = \inf_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda < x$, existe $\mu_1 \in \Lambda$ tal que $a_{\mu_1} < x \leq p < b_{\mu_1}$.
- se $x > p$, do fato que $b = \sup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda > x$, existe $\mu_2 \in \Lambda$ tal que $a_{\mu_2} < p < x < b_{\mu_2}$.

Em qualquer dos casos $x \in \cup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$.

Para o restante da prova, dado $x \in A$ seja I_x a união de todos os intervalos abertos contidos em A e que contém x . Segue que

- 1) $I_x = (a_x, b_x) \subset A$,
- 2) se $x, y \in A$, ou $I_x \cap I_y = I_x = I_y$ ou $I_x \cap I_y = \emptyset$ e
- 3) $\cup_{x \in A} I_x = A$.

Tomando, para cada intervalo desta decomposição um único racional vemos que A pode ser escrito como união enumerável de intervalos disjuntos. Para ver que esta decomposição é única basta notar que cada intervalo aberto de uma tal decomposição está contido em algum dos I_x e não pode ser distinto de I_x . \square

Corolário 13. *Se I é um intervalo aberto e $I = A \cup B$ onde A e B são conjuntos abertos e disjuntos então um deles conjuntos é vazio.*

Definição 37. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um ponto $p \in \mathbb{R}$ é aderente a A se existir seqüência $\{x_n\}$ em A tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$.*

Sabemos que se p é ponto de acumulação de A então p é aderente a A . Se p é aderente a A e p não é ponto de acumulação de A então $p \in A$. Todo ponto interior a A é aderente a A e é um ponto de acumulação de A .

Teorema 54. *Um ponto $p \in \mathbb{R}$ é aderente a A se, e só se, $A \cap (p-\epsilon, p+\epsilon) \neq \emptyset$ para todo $\epsilon > 0$.*

Corolário 14. *Se $A \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente (inferiormente) então $\sup A$ ($\inf A$) é aderente a A .*

Teorema 55. *O fecho A^- de $A \subset \mathbb{R}$ é o conjunto \tilde{A} dos pontos aderentes de A .*

Prova: De fato, se $x \notin \tilde{A}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap A = \emptyset$ segue que \tilde{A} é fechado e $A^- \subset \tilde{A}$. Se $x \notin A^-$ existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap A = \emptyset$ e $x \notin \tilde{A}$. \square

Definição 38. *Sejam A e B subconjuntos de \mathbb{R} com $A \subset B$. Diremos que A é denso em B se $B \subset A^-$*

Teorema 56. *Sejam A e B subconjuntos de \mathbb{R} com $A \subset B$. São equivalentes*

- *Todo ponto de B é aderente a A .*
- *Todo ponto de B é limite de uma seqüência de pontos de A .*
- *Para todo $\epsilon > 0$ e $b \in B$ $(b-\epsilon, b+\epsilon) \cap A \neq \emptyset$.*

Teorema 57. *Todo subconjunto B de \mathbb{R} contém um subconjunto A que é enumerável e denso em B .*

Prova: Dado $n \in \mathbb{N}^*$ temos que $\mathbb{R} = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n} \right)$. Para cada $p \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$ escolha $x_{np} \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n} \right) \cap B$ quando esta interseção for não vazia. O conjunto A desses pontos é claramente denso em B (para cada $n \in \mathbb{N}^*$ e $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $|a-b| < \frac{1}{n}$) e é enumerável (a coleção de intervalos $\left\{ \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n} \right) : p \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N}^* \right\}$ é enumerável). \square

Teorema 58. *Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado, não vazio e sem pontos isolados. Então F é não enumerável.*

Prova: Sejam $x, y \in F$ distintos, $r = |x - y|/2$ e $\tilde{F}_y = F \cap (x - r, x + r)$. Segue que \tilde{F}_y é não vazio e não contém pontos isolados. Seja F_y a união de \tilde{F}_y com os pontos de acumulação de \tilde{F}_y no conjunto $\{x - r, x + r\}$. F_y é claramente fechado e não tem pontos isolados, é limitado e $y \notin F$.

Se $F \supset \{y_1, y_2, y_3, \dots\}$ seja F_{y_1} . Tendo escolhido $F_{y_1}, \dots, F_{y_{n-1}}$, se $y_n \notin F_{y_{n-1}}$ escolhamos $F_{y_n} = F_{y_{n-1}}$ e se $y_n \in F_{y_{n-1}}$ escolhamos F_{y_n} fechado e sem pontos isolados tal que $y_n \notin F_{y_n} \subset F_{y_{n-1}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $x_n \in F_{y_n}$. A seqüência $\{x_n\}$ é limitada e portanto tem uma subsequência $\{x_{\phi(n)}\}$ convergente com limite \bar{x} . É claro que $\bar{x} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_{y_n}$ e $\bar{x} \neq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

10.2 Coberturas e Compactos

Definição 39. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ e Λ um conjunto, uma coleção $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de conjuntos é chamada uma **cobertura de A** se $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$.*

*Se $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma cobertura e $\Lambda' \subset \Lambda$ e $A \subset \bigcup_{\lambda' \in \Lambda'} \mathcal{A}_{\lambda'}$, $\{\mathcal{A}_{\lambda'}\}_{\lambda' \in \Lambda'}$ é dita uma **subcobertura da cobertura $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.***

*Se os conjuntos da cobertura são todos abertos a cobertura é dita uma **cobertura aberta.***

Teorema 59 (Borel-Lebsegue). *Dada uma cobertura $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de $[a, b]$ onde cada I_λ é um intervalo aberto existe $\Lambda' \subset \Lambda$ finito tal que $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda' \in \Lambda'} I_{\lambda'}$.*

Prova: Seja $A = \{x \in [a, b] : \text{existe } \Lambda' \subset \Lambda \text{ finito com } [a, x] \subset \bigcup_{\lambda' \in \Lambda'} I_{\lambda'}\}$. É claro que $A \neq \emptyset$. Seja $s = \sup A$. É claro que $s \in [a, b]$ e que existe λ_s tal que $s \in I_{\lambda_s}$. Como I_{λ_s} é aberto $I_{\lambda_s} \cap A \neq \emptyset$. Segue que $s = b$ e que $[a, b]$ está contido em uma união finita de I_λ 's. \square

Corolário 15. *Dada uma cobertura aberta $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de $[a, b]$ existe $\Lambda' \subset \Lambda$ finito tal que $[a, b] \subset \cup_{\lambda' \in \Lambda'} A_{\lambda'}$.*

Basta lembrar que cada aberto da cobertura pode ser escrito como união enumerável de intervalos abertos (disjuntos).

Corolário 16. *Dada uma cobertura aberta $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de um conjunto fechado e limitado F existe $\Lambda' \subset \Lambda$ finito tal que $F \subset \cup_{\lambda' \in \Lambda'} A_{\lambda'}$.*

De fato: Como F é fechado e limitado $F \subset [a, b]$. Como $A = F^c$ é aberto e $[a, b] \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \cup A$ temos que existe $\Lambda' \subset \Lambda$ finito tal que

$$[a, b] \subset \cup_{\lambda' \in \Lambda'} A_{\lambda'} \cup A \text{ e } F \subset \cup_{\lambda' \in \Lambda'} A_{\lambda'}. \square$$

Teorema 60. *Dado $K \subset \mathbb{R}$ são equivalentes:*

- 1) K é fechado e limitado.
- 2) Toda cobertura aberta de K possui uma subcobertura finita.
- 3) Todo subconjunto infinito de K possui um ponto de acumulação pertencente a K .
- 4) Toda seqüência de pontos de K possui uma subseqüência que converge para um ponto de K .

Prova:

- 1) \Rightarrow 2): Segue diretamente do corolário anterior.
- 2) \Rightarrow 3): Se $A \subset K$ é infinito e não tem pontos de acumulação em K , para cada $k \in K$ existe $I_k = r_k > 0$ tal que $(k - r_k, k + r_k) \cap A = \{k\}$ ou $I_k \cap A = \emptyset$. Segue que $\cup_{k \in K} I_k \supset K$ é uma cobertura aberta sem subcobertura finita.

- 3) \Rightarrow 4): Dada uma seqüência de pontos $\{k_n\}$ em K ela pode ter um número finito ou infinito de valores. Em qualquer dos casos possui uma subsequência convergente.
- 4) \Rightarrow 1): É claro que K é limitado pois caso contrário existiria uma seqüência $\{x_n\}$ em K com $x_0 \in K$ e $|x_n| \geq |x_{n-1}| + 1$ e esta não teria subsequência convergente. Para ver que K é fechado simplesmente note que se $x \in K^-$ existe seqüência $x_n \in K$ tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, de 4), $x \in K$. \square

Definição 40. *Um conjunto é compacto se satisfaz uma das condições do teorema anterior.*

Corolário 17 (Teorema de Bolzano-Weierstrass). *Todo conjunto infinito e limitado de números reais possui um ponto de acumulação.*

Corolário 18. *Toda seqüência decrescente de compactos não-vazios tem interseção não vazia.*

10.3 Medida Exterior

Se $I = (a, b)$ defina $\ell(I) = b - a$. Dado $A \subset \mathbb{R}$ existe uma família contável de intervalos abertos que cobrem A . Seja \mathcal{U}_A a coleção de todas as coberturas contáveis de intervalos abertos de A .

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum \ell(I_n) : \{I_n\} \in \mathcal{U}_A \right\}$$

É claro que $m^*(\emptyset) = 0$, $m^*((a, b)) \leq b - a$, $m^*(\{x\}) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e que, se $A \subset B$ $m^*(A) \leq m^*(B)$.

Lema 5. $m^*[a, b] = m^*(a, b) = m^*[a, b) = m^*(a, b] = b - a$.

Prova: Como $[a, b] \subset (a - \frac{\epsilon}{2}, b + \frac{\epsilon}{2})$, $\forall \epsilon > 0$ temos $m^*([a, b]) \leq b - a$.

Por outro lado se $\{I_n\} \in \mathcal{U}_{[a, b]}$ existe uma subcoleção finita $\{I_{n_1}, \dots, I_{n_k}\}$ de $\{I_n\}$ tal que $\cup_{i=1}^k I_{n_i} \supset [a, b]$ e

$$\sum_{i=1}^k \ell(I_{n_i}) \leq \sum \ell(I_n)$$

Podemos tomar uma subcobertura de $\{I_{n_1}, \dots, I_{n_k}\}$ de forma que $a \in I_{n_{j_1}} = (y_1, x_1)$ e, recursivamente, se $x_j \leq b$, $x_j \in I_{n_{i_{j+1}}} = (y_{j+1}, x_{j+1})$ parando para $j_0 \leq k$ tal que $I_{n_{i_{j_0}}} \ni b$. Assim, como $y_j < x_{j-1} < x_j$,

$$\sum_{j=1}^{j_0} \ell(I_{n_{i_j}}) = \sum (x_j - y_j) > x_{j_0} - y_1 > b - a$$

e $m^*([a, b]) = b - a$. \square

Lema 6. Se $\{A_n\}$ é uma família contável de subconjuntos de \mathbb{R} então

$$m^*\left(\bigcup A_n\right) \leq \sum m^*(A_n)$$

Prova: Só temos que considerar o caso em que $\sum m^*(A_n) < \infty$.

Como $m^*(A_n)$ é finita, dado $\epsilon > 0$, seja $\{I_{n,i}\}_i \in \mathcal{U}_{A_n}$ tal que $A_n \subset \bigcup_i I_{n,i}$ e $\sum_i \ell(I_{n,i}) < m^*(A_n) + 2^{-n}\epsilon$. Logo $\{I_{n,i}\}_{n,i} \in \mathcal{U}_{\bigcup A_n}$ e

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup A_n\right) &\leq \sum_{n,i} \ell(I_{n,i}) = \sum_n \sum_i \ell(I_{n,i}) < \sum_n (m^*(A_n) + \epsilon 2^{-n}) \\ &= \sum m^*(A_n) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário o resultado segue. \square

Corolário 19. 1) Se $A \subset \mathbb{R}$ é enumerável, $m^*(A) = 0$.

2) Se $\{A_n\}$ é uma família contável de subconjuntos de \mathbb{R} e $m^*(A_n) = 0$, $\forall n$ então $m^*(\bigcup_n A_n) = 0$

Exercício 10. Seja $I_j = [a_j, b_j]$, $1 \leq j \leq n$ com $b_j < a_{j+1}$, $1 \leq j \leq n-1$. Mostre que

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^n I_j\right) = \sum_{j=1}^n (b_j - a_j).$$

10.4 O Lema do Recobrimento de Vitali

Lema 7 (Recobrimento de Vitali). *Seja $E \subset [a, b]$, conseqüentemente $m^*(E) \leq b - a$. Se \mathcal{I} é uma cobertura de E por intervalos não degenerados e tal que, dados $x \in E$ e $\epsilon > 0$, existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $x \in I$ e $\ell(I) < \epsilon$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe uma coleção finita e disjunta $\{I_1, \dots, I_N\} \subset \mathcal{I}$ tal que*

$$m^* \left(E \setminus \bigcup_{n=1}^N I_n \right) < \epsilon.$$

Prova: Basta considerar o caso com cada intervalo de \mathcal{I} fechado (caso contrário tomamos o seu fecho). Podemos assumir que $\mathcal{I} \ni I \subset \mathcal{O} = (a - 1, b + 1)$ e que $I \cap E \neq \emptyset, \forall I \in \mathcal{I}$.

Escolhemos uma seqüência $\{I_n\}$ de intervalos disjuntos de \mathcal{I} da seguinte forma: Seja $I_1 \in \mathcal{I}$ qualquer e se I_1, \dots, I_n já foram escolhidos seja r_n o supremo dos comprimentos dos intervalos de \mathcal{I} que não interseptom nenhum dos I_1, \dots, I_n .

Claramente $r_n \leq \ell(\mathcal{O})$. Se $E \not\subset \bigcup_{i=1}^n I_i$, encontramos $I_{n+1} \in \mathcal{I}$ disjunto de I_1, \dots, I_n e tal que $\ell(I_{n+1}) > \frac{1}{2}r_n$.

Assim $\{I_n\}$ é uma seqüência disjunta de intervalos em \mathcal{I} e, como $\bigcup I_n \subset \mathcal{O}$, $\sum \ell(I_n) \leq \ell(\mathcal{O})$. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{N+1}^{\infty} \ell(I_n) < \frac{\epsilon}{5}$$

Seja

$$R = E \setminus \bigcup_{n=1}^N I_n.$$

Mostraremos $m^*(R) < \epsilon$. Se $x \in R$, como $F = \bigcup_{n=1}^N I_n$ é fechado e $x \notin F$, existe I in \mathcal{I} , $x \in I$ e $I \cap F = \emptyset$.

Agora, se $I \cap I_i = \emptyset$ para $i \leq \kappa$, temos $\ell(I) \leq r_\kappa < 2\ell(I_{\kappa+1})$. Como $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \ell(I_\kappa) = 0$, o intervalo I deve intersectar pelo menos um dos intervalos I_κ .

Seja n o menor inteiro tal que $I \cap I_n \neq \emptyset$. Claramente $n > N$, e $\ell(I) \leq r_{n-1} < 2\ell(I_n)$. Como $x \in I$ e $I \cap I_n \neq \emptyset$ a distância de x ao ponto médio de I_n é no máximo $\ell(I) + \frac{1}{2}\ell(I_n) < \frac{5}{2}\ell(I_n)$.

Logo x pertence ao intervalo J_n tendo o mesmo ponto médio que I_n e 5 vezes o comprimento. Desta forma

$$R \subset \bigcup_{N+1}^{\infty} J_n \quad \text{e}$$

$$m^*(R) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \ell(J_n) = 5 \sum_{n=N+1}^{\infty} \ell(I_n) < \epsilon. \square$$

11 Funções - Limites e Continuidade

Definição 41 (Limite). *Seja D um subconjunto de \mathbb{R} , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D . Diremos que **o limite de $f(x)$ quando x tende a p é L** se, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D \text{ e } 0 < |x - p| < \delta, \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Dito de outra forma, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ tal que

$$f(D \cap (p - \delta, p + \delta) \setminus \{p\}) \subset (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Note que:

- Se não existe um número real L tal que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ diremos que $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ não existe.
- O ponto p não precisa pertencer a D e mesmo que pertença o valor de f em p não é importante para a definição acima.
- Apenas os valores de f em pontos arbitrariamente próximos a p são importantes para a definição.

Teorema 61. *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D . O limite de $f(x)$ quando x tende a p , caso exista, é único. Este limite será denotado por*

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L.$$

De fato: Se L e L' são limites de $f(x)$ quando x tende a p , dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \text{ e } 0 < |x - p| < \delta, \implies |f(x) - L| < \varepsilon \text{ e } |f(x) - L'| < \varepsilon.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, com a escolha de δ acima e $x \in D$ satisfazendo $0 < |x - p| < \delta$, temos

$$|L - L'| = |L - f(x) + f(x) - L'| \leq |f(x) - L| + |L' - f(x)| < 2\epsilon.$$

Isto mostra que $L = L'$. \square

Quando nos referimos a uma função, fica implícito que ela tem um domínio especificado.

Dada a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, dado $D' \subset D$ denotaremos por $f|_{D'} : D' \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f|_{D'}(x) = f(x)$, para $x \in D'$.

Nos referiremos a $f|_{D'}$ como a restrição de $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ a D' .

Segue imediatamente da definição que

Teorema 62 (1). *Seja D um subconjunto de \mathbb{R} , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, $D' \subset D$ e p um ponto de acumulação de D' . Se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ então $\lim_{x \rightarrow p} f|_{D'}(x) = L$*

11.1 Critério negativo para existência de limites

Teorema 63. *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, D' e D'' subconjuntos de D e $p \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D' e de D'' .*

- Se

- um dos limites $\lim_{x \rightarrow p} f|_{D'}(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow p} f|_{D''}(x)$ não existe ou
- ambos existem e $\lim_{x \rightarrow p} f|_{D'}(x) \neq \lim_{x \rightarrow p} f|_{D''}(x)$

então o limite $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ não existe.

- Se $(D' \cup D'') \setminus \{p\} = D \setminus \{p\}$, o limite $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ existe se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow p} f|_{D'}(x)$ e $\lim_{x \rightarrow p} f|_{D''}(x)$ existem e $\lim_{x \rightarrow p} f|_{D'}(x) = \lim_{x \rightarrow p} f|_{D''}(x)$.

Prova: A prova da primeira parte segue diretamente de (1). Para a segunda parte, existe $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D, 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon,$$

se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D', 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon \implies |f|_{D'}(x) - L| < \epsilon$$

e

$$x \in D'', 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon \implies |f|_{D''}(x) - L| < \epsilon.$$

se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow p} f|_{D'}(x) = \lim_{x \rightarrow p} f|_{D''}(x). \square$$

11.2 Limites Laterais

Se $D \subset \mathbb{R}$, diremos que $p \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação à direita (esquerda) de D se é um ponto de acumulação de $D_p^+ = D \cap (p, \infty)$ ($D_p^- = D \cap (-\infty, p)$).

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p é um ponto de acumulação à direita (esquerda) de D . O **limite de $f(x)$ quando x tende a p pela direita (esquerda)** é

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) := \lim_{x \rightarrow p} f|_{D_p^+}(x) \quad \left(\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) := \lim_{x \rightarrow p} f|_{D_p^-}(x) \right)$$

Corolário 20. *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p é um ponto de acumulação à direita e à esquerda de D . Então*

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x)$$

existe se, e somente se, existem os limites laterais à direita e à esquerda e

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x).$$

Teorema 64. *Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D . Se existe $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ então f é limitada em uma vizinhança de p , isto é, existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tais que $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M$.*

De fato: Existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1$. Logo

$$|f(x)| \leq |f(x) - L| + |L| \leq 1 + |L| = M, \quad \forall x \in D, 0 < |x - p| < \delta. \square$$

Teorema 65 (Confronto). *Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ funções e p um ponto de acumulação de D . Se existe $\delta_0 > 0$ tal que, para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta_0$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} h(x) = L$ então $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$.*

De fato: Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_0 > \delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ e $|h(x) - L| < \epsilon$. Logo

$$L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon, \quad \forall x \in D, 0 < |x - p| < \delta.$$

Segue que $L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$, $\forall x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$. Ou ainda

$$|g(x) - L| < \epsilon, \quad \forall x \in D, 0 < |x - p| < \delta. \square$$

Teorema 66 (Conservação do Sinal). *Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D . Se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in D$ com $0 < |x - p| < \delta$.*

De fato: Dado $\epsilon = \frac{L}{2}$ existe $\delta > 0$ tal que

$$-\frac{L}{2} < f(x) - L < \frac{L}{2}$$

para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$. Logo $0 < \frac{L}{2} < f(x)$ para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta. \square$

Teorema 67 (Comparação). *Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D . Se existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$ e existem $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_f$ então $L_f \leq L_g$.*

De fato: Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow$

$$L_f - \frac{\epsilon}{2} \leq f(x) \leq g(x) \leq L_g + \frac{\epsilon}{2}.$$

Segue que $L_f - L_g \leq \epsilon$ e como $\epsilon > 0$ é arbitrário o resultado segue. \square

Teorema 68 (Limite por seqüências). *Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D . O limite $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ existe para toda seqüência $\{x_n\}$ em $D \setminus \{p\}$ que converge para p .*

De fato: Se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ e $\{x_n\}$ é seqüência em $D \setminus \{p\}$ com $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$, para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$.

Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - p| < \delta$ para todo $n \geq N$. Logo $|f(x_n) - L| < \epsilon$, para todo $n \geq N$. Isto mostra que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$. \square

Para a recíproca primeiramente note que, se $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ existe para toda seqüência $\{x_n\}$ em $D \setminus \{p\}$ que converge para p todas as seqüências $\{f(x_n)\}$ têm o mesmo limite pois se duas tais seqüências tem imagens pela f com limites distintos, alternando os seus elementos contruímos uma seqüência $\{\tilde{x}_n\}$ em $D \setminus \{p\}$ que converge para p e tal que $\{f(\tilde{x}_n)\}$ não converge.

Agora, se $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ não é L , existe $\epsilon > 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in D$, $0 < |x_n - p| < \frac{1}{n}$ tal que $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ não é L . \square

11.3 Propriedades do Limite

Sejam $f_i : D_{f_i} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1$ e 2 , funções. Suponha que p seja um ponto de acumulação de $D_{f_1} \cap D_{f_2}$ e que $\lim_{x \rightarrow p} f_i(x) = L_i$, $i = 1, 2$. Então:

$$1) \lim_{x \rightarrow p} (f_1 + f_2)(x) = \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow p} f_2(x) = L_1 + L_2.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow p} k f_1(x) = k L_1 \text{ onde } k = \text{constante.}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow p} f_2(x) = L_1 \cdot L_2.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow p} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow p} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow p} f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \text{ se } L_2 \neq 0.$$

Sabendo de que estas propriedades facilitam, enormemente, o nosso trabalho, vamos fazer a demonstração das mesmas para poder utilizá-las, livremente.

Prova de 1): $\lim_{x \rightarrow p} (f_1 + f_2)(x) = \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow p} f_2(x) = L_1 + L_2$

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_i > 0$ tal que

$$x \in D_{f_i}, 0 < |x - p| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - L_i| < \frac{\epsilon}{2}, i = 1, 2.$$

Escolha $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então

$$\begin{aligned} x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} &= D_{f_1+f_2}, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow \\ |(f_1 + f_2)(x) - (L_1 + L_2)| &\leq |f_1(x) - L_1| + |f_2(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

ou seja $\lim_{x \rightarrow p} (f_1 + f_2)(x) = L_1 + L_2$.

Prova de 2): $\lim_{x \rightarrow p} k f_1(x) = k L_1$ onde $k = \text{constante}$

Se $k = 0$ o resultado é trivial. Se $k \neq 0$, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1}, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f_1(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{|k|}.$$

Então

$$x \in D_{f_1}, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |k f_1(x) - k L_1| = |k| |f_1(x) - L_1| < |k| \frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon.$$

ou seja $\lim_{x \rightarrow p} (kf_1)(x) = kL_1$.

Prova de 3): $\lim_{x \rightarrow p} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow p} f_2(x) = L_1 \cdot L_2$

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1}, 0 < |x - p| < \delta_1 \Rightarrow |f_1(x) - L_1| < \min \left\{ \frac{\epsilon}{2(|L_2| + 1)}, 1 \right\}.$$

e $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_2}, 0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow |f_2(x) - L_2| < \min \left\{ \frac{\epsilon}{2(|L_1| + 1)}, 1 \right\}.$$

Logo $|f_2(x)| \leq |f_2(x) - L_2| + |L_2| < |L_2| + 1$ sempre que $x \in D_{f_2}$, $0 < |x - p| < \delta_2$.

Logo, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para $x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1 \cdot f_2}$, $0 < |x - p| < \delta$,

$$\begin{aligned} |(f_1 \cdot f_2)(x) - (L_1 \cdot L_2)| &\leq |(f_1(x) - L_1)f_2(x) + L_1(f_2(x) - L_2)| \\ &\leq |f_1(x) - L_1||f_2(x)| + |L_1||f_2(x) - L_2| \\ &\leq |f_1(x) - L_1|(|L_2| + 1) + |L_1||f_2(x) - L_2| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2(|L_2| + 1)}(|L_2| + 1) + |L_1| \frac{\epsilon}{2(|L_1| + 1)} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

ou seja $\lim_{x \rightarrow p} (f_1 \cdot f_2)(x) = L_1 \cdot L_2$.

Prova de 4): $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow p} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow p} f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1}, 0 < |x - p| < \delta_1 \Rightarrow |f_1(x) - L_1| < \frac{\epsilon|L_2|}{4}$$

e $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_2}, 0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow |f_2(x) - L_2| < \min \left\{ \frac{\epsilon|L_2|^2}{4(|L_1| + 1)}, \frac{|L_2|}{2} \right\}.$$

Logo, se $x \in D_{f_2}$, $0 < |x - p| < \delta_2$

$$|L_2| \leq |f_2(x) - L_2| + |f_2(x)| < \frac{|L_2|}{2} + |f_2(x)| \text{ e } \frac{|L_2|}{2} < |f_2(x)|.$$

Logo, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para $x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1 \cdot f_2}$, $0 < |x - p| < \delta$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{L_1}{L_2} \right| &= \frac{|(f_1(x) - L_1)L_2 + (L_2 - f_2(x))L_1|}{|f_2(x)||L_2|} \\ &\leq \frac{|f_1(x) - L_1||L_2| + |L_2 - f_2(x)||L_1|}{|L_2||L_2|/2} \\ &\leq 2 \frac{|f_1(x) - L_1|}{|L_2|} + 2|L_2 - f_2(x)| \frac{|L_1|}{|L_2|^2} \\ &\leq 2 \frac{\epsilon|L_2|}{4} \frac{1}{|L_2|} + 2 \frac{\epsilon|L_2|^2}{4(|L_1| + 1)} \frac{|L_1|}{|L_2|^2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

ou seja $\lim_{x \rightarrow p} (f_1 \cdot f_2)(x) = L_1 \cdot L_2$.

Teorema 69 (Critério de Cauchy). *Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funções e p um ponto de acumulação de D . O $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ existe se, e somente se, f é de Cauchy em p , isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in D$, $0 < |x - p| < \delta$ e $0 < |y - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

De fato: É claro que se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ então f é de Cauchy em p . Reciprocamente, se f é de Cauchy em p e $\{x_n\}$ é uma seqüência em $D \setminus \{p\}$ que converge para p , $\{f(x_n)\}$ é de Cauchy e portanto convergente. \square

Limites no infinito

Seja D um subconjunto **ilimitado superiormente** de \mathbb{R} e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diremos que o limite de $f(x)$ quando x tende para **infinito** é $L \in \mathbb{R}$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $M = M(\epsilon) > 0$ tal que

$$x \in D, x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Escreveremos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L.$$

De modo análogo, quando D é ilimitado inferiormente, definimos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

O limite de uma seqüência é um caso particular de limite infinito. Neste caso $D = \mathbb{N}$ é ilimitado superiormente.

Limites infinitos

Seja D um subconjunto \mathbb{R} e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se p é um ponto de acumulação de D diremos que $f(x)$ **diverge** para $+\infty$ quando x tende para p se, dado $M > 0$, existe $\epsilon = \epsilon(M) > 0$ tal que

$$x \in D, 0 < |x - p| < \epsilon \Rightarrow f(x) > M.$$

Escreveremos

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = +\infty.$$

De modo análogo definimos

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = -\infty.$$

Se D é ilimitado superiormente (inferiormente) definimos também

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty \right).$$

11.4 Limites Superior e Inferior

Seja D um subconjunto \mathbb{R} e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se p é um ponto de acumulação de D . Suponha que exista um $\delta_0 > 0$ tal que

$$\sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} < \infty$$

Então, existe (ou diverge para $-\infty$) o limite

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\}$$

Escrevemos $\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) = +\infty$ quando f não é limitada superiormente em nenhuma vizinhança de p .

Semelhantemente, se

$$\inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} > -\infty,$$

definimos (podendo ser $+\infty$)

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\}$$

Escreveremos $\underline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) = -\infty$ quando f não for limitada inferiormente em uma vizinhança de p .

Valor de Aderência

Definição 42. Dizemos que $y \in \mathbb{R}$ é um valor de aderência de f no ponto p se existe seqüência $\{x_n\}$ em $D \setminus \{p\}$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$.

Teorema 70. Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D .

- 1) Se ℓ é um valor de aderência de f em p , $\underline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) \leq \ell \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x)$.
- 2) Se f é limitada em uma vizinhança de p então $\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x)$ e $\underline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x)$ são valores de aderência de f .
- 3) $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ existe se, e somente se, f é limitada em uma vizinhança de p e o conjunto dos valores de aderência de f em p é unitário.
- 4) Se f é limitada em uma vizinhança de p , dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\underline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) - \epsilon < f(x) < \overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) + \epsilon$ para todo $x \in D$ com $0 < |x - p| < \delta$.

Prova de 1): Se $\underline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) = l$ e $\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) = L$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$l - \epsilon < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} < l + \epsilon$$

$$L - \epsilon < \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} < L + \epsilon$$

$\forall 0 < \delta < \delta_\epsilon$. Escolha $\delta_0 < \delta_\epsilon$. Se ℓ é um valor de aderência de f em p , existe $x_n \in D \setminus \{p\}$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$, com $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$. Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - p| < \delta_0$, $\forall n \geq N$. Logo, $\forall n \geq N$,

$$\begin{aligned} l - \epsilon &< \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} \\ &\leq f(x_n) \leq \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} < L + \epsilon. \end{aligned}$$

Segue que $l - \epsilon \leq \ell \leq L + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ e portanto $l \leq \ell \leq L$. \square

Prova de 2): Note que, para algum $\delta_0 > 0$ temos que

$$-\infty < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} \leq \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} < \infty.$$

Como

$$\begin{aligned} (0, \delta_0) \ni \delta \mapsto \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} &\text{ é não-decrescente e} \\ (0, \delta_0) \ni \delta \mapsto \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} &\text{ é não-crescente,} \end{aligned}$$

existem os limites

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} &= l \text{ e} \\ \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} &= L \end{aligned}$$

Como p é um ponto de acumulação de D seja $\{x_n^l\}$ e $\{x_n^L\}$ seqüências em D tais que $0 < \max\{|x_n^l - p|, |x_n^L - p|\} < \frac{\delta_0}{n}$ e

$$\begin{aligned} \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \frac{\delta_0}{n}\} &\leq f(x_n^l) \leq \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \frac{\delta_0}{n}\} + \frac{1}{n} \\ \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \frac{\delta_0}{n}\} - \frac{1}{n} &\leq f(x_n^L) \leq \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \frac{\delta_0}{n}\} \end{aligned}$$

O resultado agora segue tomando o limite nas expressões acima. \square

Prova de 3): Se o limite existe então f é limitada em uma vizinhança de p e todos os valores de aderência coincidem e em particular o $\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) = \underline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x)$. Por outro lado, se f é limitada em uma vizinhança de p e o conjunto dos valores de aderência é unitário $\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) = \underline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x)$ e todos os valores de aderência coincidem. Disto segue que o limite existe.

Prova de 4): Se $\underline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) = l$ e $\overline{\lim}_{x \rightarrow p} f(x) = L$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$l - \epsilon < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} < l + \epsilon$$

$$L - \epsilon < \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} < L + \epsilon$$

$\forall 0 < \delta < \delta_\epsilon$. Segue que, para $\delta < \delta_\epsilon$ e $x \in D, 0 < |x - p| < \delta$,

$$\begin{aligned} l - \epsilon &< \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} \leq f(x) \\ &\leq \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} < L + \epsilon. \square \end{aligned}$$

12 Continuidade

Definição 43 (Continuidade). *Seja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$. Diremos que $f(x)$ é **contínua em p** se, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D_f \text{ e } |x - p| < \delta, \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(p)| < \varepsilon .$$

Observação 3. *Note que,*

- *se $p \in D_f$ é um ponto de acumulação de D_f , então f é contínua em p se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ e*
- *se p é um ponto isolado de D_f então f é contínua em p .*

Exemplo 35. (a) *A função $f(x) = k$ é contínua em $x = p$ para cada $p \in \mathbb{R}$.*

(b) *A função $f(x) = x$ é contínua em $x = p$ para cada $p \in \mathbb{R}$.*

(c) *A função $f(x) = x + 1$ é contínua em $x = p$ para cada $p \in \mathbb{R}$.*

(d) *A função $f(x) = x^2$ é contínua em $x = p$ para cada $p \in \mathbb{R}$.*

(e) *A função $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ não é contínua em $x = 1$ pois*
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \neq 0 = f(1).$$

Exercício: Verifique cada uma das afirmativas do exemplo anterior utilizando os resultados dos exemplos anteriores para as mesmas funções.

12.1 Propriedades da Continuidade

Recordemos as propriedades do limite.

Sejam $f_i : D_{f_i} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1$ e 2 , funções. Suponha que p seja um ponto de acumulação de $D_{f_1} \cap D_{f_2}$ e que $\lim_{x \rightarrow p} f_i(x) = L_i$, $i = 1, 2$. Então:

$$1) \lim_{x \rightarrow p} (f_1 + f_2)(x) = \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow p} f_2(x) = L_1 + L_2.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow p} k f_1(x) = k L_1 \text{ onde } k = \text{constante.}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim_{x \rightarrow p} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow p} f_2(x) = L_1 \cdot L_2.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow p} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow p} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow p} f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \text{ se } L_2 \neq 0.$$

Propriedades da Continuidade

Corolário 21. *Sejam $f_i : D_{f_i} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1$ e 2 , funções. Suponha que $p \in D_{f_1} \cap D_{f_2}$ e que f e g sejam contínuas em p . Então $f_1 + f_2$, $k \cdot f_1$, $f_1 \cdot f_2$ e, se $f_2(p) \neq 0$, f_1/f_2 são contínuas em p .*

Teorema 71 (Limite da Composta). *Sejam $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $\text{Im}(g) \subset D_f$ e $L \in D_f$. Se p é um ponto de acumulação de D_g , $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$ e f é contínua em L , então*

$$\lim_{x \rightarrow p} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow p} g(x)\right) = f(L).$$

De fato: Como f é contínua em L , dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_f > 0$ tal que

$$y \in D_f, \quad |y - L| < \delta_f \Rightarrow |f(y) - f(L)| < \epsilon.$$

Como $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$, dado $\delta_f > 0$ existe $\delta_g > 0$ tal que

$$x \in D_g, \quad 0 < |x - p| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - L| < \delta_f.$$

Desta forma, como $\text{Im}(g) \subset D_f$, $D_{f \circ g} = D_g$ e

$$x \in D_g = D_{f \circ g}, \quad 0 < |x - p| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - L| < \delta_f \Rightarrow |f(g(x)) - f(L)| < \epsilon.$$

Logo $\lim_{x \rightarrow p} f(g(x)) = f(L)$. \square

12.2 Funções contínuas: Resultados fundamentais

Recorde que:

Definição 44 (Continuidade). *Seja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$. Diremos que $f(x)$ é **contínua em p** se, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D_f \text{ e } |x - p| < \delta, \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

- Se p é um ponto de acumulação de D_f , f é contínua em p se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$.
- Diremos que f é contínua se for contínua para todo $p \in D_f$.
- Soma, produto, quociente e composição de funções contínuas é uma função contínua.
- Funções racionais e funções trigonométricas são contínuas.

A prova do teorema a seguir segue da definição de continuidade e da caracterização de limites por seqüências.

Teorema 72. *Seja D um subconjunto de \mathbb{R} , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $p \in D$. A função f é contínua em p se, e somente se, para toda seqüência $\{x_n\}$ em D com $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ existe o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.*

Corolário 22. *Seja D um subconjunto de \mathbb{R} , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $p \in D$. A função f é contínua em p se, e somente se, para toda seqüência $\{x_n\}$ em D com $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$ temos $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(p)$.*

12.2.1 O Teorema da Conservação do Sinal

Teorema 73 (Teorema da Conservação do Sinal). *Seja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\bar{x} \in D_f$ tal que $f(\bar{x}) > 0$ ($f(\bar{x}) < 0$). Então, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) sempre que $x \in D_f$ e $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$.*

De fato: Como f é contínua em \bar{x} , dado $\epsilon = f(\bar{x}) > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$x \in D_f, x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(\bar{x}) - \epsilon, f(\bar{x}) + \epsilon) = (0, 2f(\bar{x})).$$

Isto prova o resultado. \square

12.2.2 O Teorema do Anulamento

Teorema 74 (Teorema do Anulamento). *Se*

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ é contínua e } f(a) < 0 < f(b)$$

($f(a) > 0 > f(b)$), então, existe $\bar{x} \in (a, b)$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.

De fato: Faremos apenas o caso $f(a) < 0 < f(b)$. Seja

$$A = \{x \in [a, b] : f(s) > 0, \text{ para todo } s \in [x, b]\}.$$

Note que $\emptyset \neq A \subset [a, b]$ (pois $f(b) > 0$). Seja $z = \inf A$. Do Teorema da Conservação do Sinal, $z \in (a, b)$ e $z \notin A$. Portanto $f(z) \leq 0$.

Por outro lado, do Teorema da Comparação, $f(z) = \lim_{x \rightarrow z^+} f(x) \geq 0$
(pois $x > z \Rightarrow x \in A \Rightarrow f(x) > 0$). Logo, $f(z) = 0$. \square

12.2.3 O Teorema do Valor Intermediário

Teorema 75 (Teorema do Valor Intermediário). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e tal que $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$). Se $f(a) < k < f(b)$ ($f(a) > k > f(b)$), então existe $\bar{x} \in (a, b)$ tal que $f(\bar{x}) = k$.*

De fato: Considere a função $g(x) = f(x) - k$. Então

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ é contínua, } g(a) < 0 \text{ e } g(b) > 0$$

e do Teorema do Anulamento, existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $g(\bar{x}) = 0$. Portanto $f(\bar{x}) = k$. \square

12.2.4 O Teorema de Weierstrass e Aplicações

Teorema 76 (de Weierstrass ou do Valor Extremo). *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua, existirão $p, q \in [a, b]$ tais que*

$$f(p) \leq f(x) \leq f(q), \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

De fato: Verifiquemos, inicialmente, que $\text{Im}(f)$ é limitada.

Se este não fosse o caso, dado $n \in \mathbb{N}$, existiria $x_n \in [a, b]$ tal que, $x_0 \in [a, b]$ e $|f(x_n)| > \max\{n, |f(x_{n-1})|\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Seja $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Segue que $A \subset [a, b]$ tem um ponto de acumulação $r \in [a, b]$.

Como f é contínua em r , existe $\delta > 0$ tal que,

$$x \in (r - \delta, r + \delta) \cap [a, b] = B \Rightarrow |f(x) - f(r)| < 1.$$

Segue que $f(B)$ é limitado e contém infinitos pontos de $f(A)$ e isto é uma contradição. Segue que $\text{Im}(f)$ é limitada.

Seja $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Então $f(x) \geq m$, $\forall x \in [a, b]$. Se f não é constante, m é ponto de acumulação de $\{y \in \text{Im}(f) : y > m\}$.

Seja $x_0 \in [a, b]$ tal que $0 < f(x_0) - m$ e $x_k \in [a, b]$ tal que $0 < f(x_k) - m < \min\{\frac{1}{k}, f(x_{k-1}) - m\}$, para $k \in \mathbb{N}^*$.

O conjunto $A = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ é infinito e limitado, portanto A tem um ponto de acumulação p .

Como f é contínua em p , para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe $\delta_n > 0$ tal que

$$x \in [a, b], \quad |x - p| < \delta_n \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \frac{1}{n}.$$

Em particular, escolha $x_k \in A$ com $k > n$ e tal que $|x_k - p| < \delta_n$,

$$m - \frac{1}{n} < f(x_k) - \frac{1}{n} < f(p) < f(x_k) + \frac{1}{n} < m + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} < m + \frac{2}{n}.$$

Concluimos que $f(p) = m$.

A afirmativa restante segue de $-\inf \text{Im}(-f) = \sup \text{Im}(f)$. \square

Como uma consequência do Teorema do Valor Intermediário e do Teorema de Weierstrass, obtemos o seguinte resultado

Corolário 23. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se*

$$m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\} \text{ e } M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\},$$

então

$$\text{Im}(f) = f([a, b]) = [m, M].$$

12.3 Continuidade e Abertos

Definição 45. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset A$ diremos que B é aberto em A se para cada $b \in B$ existe um $r_b > 0$ tal que $A \cap (b - r_b, b + r_b) \subset B$.*

Note que.

- Todo conjunto é aberto nele mesmo.
- Se $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset A$, B é aberto em A se, e somente se, existe um aberto \mathcal{O}_B de \mathbb{R} tal que $B = \mathcal{O}_B \cap A$.
- Se A é aberto, $B \subset A$ é aberto em A se, e somente se, B é aberto em \mathbb{R} .

Recorde que, se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, $f^{-1}(\mathcal{O}) = \{d \in D : f(d) \in \mathcal{O}\}$.

Teorema 77. *Seja $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. A função f é contínua se, e somente se, para todo aberto \mathcal{O} de \mathbb{R} , $f^{-1}(\mathcal{O})$ é aberto em D .*

Prova: Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, \mathcal{O} é um aberto de \mathbb{R} e $d \in f^{-1}(\mathcal{O})$, então $f(d) \in \mathcal{O}$ e dado $\epsilon > 0$ tal que $(f(d) - \epsilon, f(d) + \epsilon) \subset \mathcal{O}$, existe $\delta > 0$ tal que $f((d - \delta, d + \delta) \cap D) \subset (f(d) - \epsilon, f(d) + \epsilon)$. Isto mostra que $(d - \delta, d + \delta) \cap D \subset f^{-1}(\mathcal{O})$ e que $f^{-1}(\mathcal{O})$ é aberto em D .

Por outro lado de $f^{-1}(\mathcal{O})$ é aberto em D para dada \mathcal{O} aberto em \mathbb{R} , se $d \in D$, dado $\epsilon > 0$ seja $\mathcal{O} = (f(d) - \epsilon, f(d) + \epsilon)$. Como $d \in f^{-1}((f(d) - \epsilon, f(d) + \epsilon))$ que é aberto em D existe $\delta > 0$ tal que $(d - \delta, d + \delta) \cap D \subset f^{-1}((f(d) - \epsilon, f(d) + \epsilon))$, ou seja

$$x \in D, |x - d| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(d)| < \epsilon.$$

e f é contínua em d . \square

12.4 Continuidade e conexos

Teorema 78. *Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua então $f(I)$ é um intervalo.*

Prova: Basta notar que, dados dois pontos $f(a) \neq f(b)$ em $f(I)$ com $a < b$, tomando a restrição de f ao intervalo $[a, b]$, do teorema do valor intermediário, para todo k entre $f(a)$ e $f(b)$ existe um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$, ou seja $f(I)$ é um intervalo. \square

12.5 Continuidade e Compactos

Teorema 79. *Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua então $f(K)$ é compacto.*

Prova: Seja $\{\mathcal{O}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma cobertura aberta de $f(K)$. Como, para cada $\lambda \in \Lambda$, $f^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)$ é aberto em K existe U_λ aberto em \mathbb{R} tal que $U_\lambda \cap K = f^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)$. Assim $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é uma cobertura aberta de K . Como K é compacto, existe $\Lambda' \subset \Lambda$ finito tal que $\cup_{\lambda' \in \Lambda'} U_{\lambda'} \supset K$. Segue que $\{\mathcal{O}_{\lambda'} : \lambda' \in \Lambda'\}$ é uma subcobertura finita da cobertura $\{\mathcal{O}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de $f(K)$. Isto mostra que $f(K)$ é compacto. \square

Outra Prova: Seja $\{y_n\}$ uma seqüência em $f(K)$. Então existe seqüência $\{x_n\}$ em K tal que $y_n = f(x_n)$. Como K é compacto, $\{x_n\}$ tem uma subseqüência $\{x_{\phi(n)}\}$ ($\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estritamente crescente) convergente com limite $\bar{x} \in K$. Como $x_{\phi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}$, $y_{\phi(n)} = f(x_{\phi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\bar{x})$ e $\{y_n\}$ tem uma subseqüência convergente com limite em $f(K)$. Logo, $f(K)$ é compacto. \square

Teorema 80 (Weierstrass). *Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto e $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, existem $x_1, x_2 \in K$ tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in K$.*

De fato: Como $f(K)$ é compacto, $L = \sup\{y : y \in f(K)\}$ e $\ell = \inf\{y : y \in f(K)\}$ pertencem a $f(K)$. Logo, existem $x_1, x_2 \in K$ tais que $f(x_1) = \ell \leq f(x) \leq L = f(x_2)$, para todo $x \in K$. \square

Teorema 81. *Se $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e injetiva e $C = f(K)$ então $f^{-1} : C \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.*

De fato: Se $C \ni c_n = f(k_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c = f(k) \in C$ então $\{k_n\}$ é uma seqüência em K e portanto tem uma subsequência convergente com limite em K . Para qualquer $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estritamente crescente e tal que $\{k_{\phi(n)}\}$ é convergente com limite k_ϕ temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f(k_{\phi(n)})}_{=c_{\phi(n)}} = f(k_\phi) = c = f(k) \quad \text{e} \quad k_\phi = k.$$

Logo, o conjunto dos valores de aderência da seqüência $\{k_n\}$ é o conjunto unitário $\{k\}$ e portanto $f^{-1}(c_n) = k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} k = f^{-1}(c)$. Isto mostra que $f^{-1} : C \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

Teorema 82. *Se I é um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e injetiva então f é estritamente crescente ou estritamente decrescente.*

Prova: Sejam $a, b, c \in I$ com $a < b < c$. O resultado segue mostrando que ou $f(a) < f(b) < f(c)$ ou $f(a) > f(b) > f(c)$. Provaremos isto usando o Teorema do Valor Intermediário.

- **$f(a) < f(c)$:** Se $f(b) < f(a)$ existe $d \in (b, c)$ tal que $f(d) = f(a)$ e se $f(b) > f(c)$ existe $d \in (a, b)$ tal que $f(d) = f(c)$. Em qualquer dos casos isto contradiz a injetividade. Logo $f(a) < f(b) < f(c)$.
- **$f(a) > f(c)$:** Se $f(b) > f(a)$ existe $d \in (b, c)$ tal que $f(d) = f(a)$ e se $f(b) < f(c)$ existe $d \in (a, b)$ tal que $f(d) = f(c)$. Em qualquer dos casos isto contradiz a injetividade. Logo $f(a) > f(b) > f(c)$. \square

Teorema 83. *Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que, dado $\epsilon > 0$ existe função contínua $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|g(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in D$, então f é contínua.*

Prova: Seja $d \in D$, $\epsilon > 0$ e $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $|f(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{3}$, $\forall x \in D$. Como g é contínua em d , existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $|x - d| < \delta$ implica $|g(x) - g(d)| < \frac{\epsilon}{3}$. Logo, $x \in D$, $|x - d| < \delta$ implica

$$|f(x) - f(d)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(d)| + |g(d) - f(d)| < \epsilon. \square$$

12.6 Continuidade Uniforme

Definição 46 (Continuidade Uniforme). *Se $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, dizemos que f é uniformemente contínua se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in D$, $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

Note que:

- Nem toda função contínua é uniformemente contínua.

Exemplo: $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ não é uniformemente contínua em $(0, \infty)$ mas é uniformemente contínua em $[r, \infty)$ para qualquer $r > 0$.

- Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que existem constantes $C > 0$ e $\theta \in (0, 1]$ tais que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\theta$, $\forall x, y \in D$. É fácil ver que f é uniformemente contínua. Dizemos que f é Hölder contínua se $\theta \in (0, 1)$ e Lipschitz contínua se $\theta = 1$.

Exemplo: $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ é Hölder contínua com expoente $\theta = \frac{1}{2}$.

Teorema 84. *Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua então f leva seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy.*

De fato: Seja $\{x_n\}$ uma seqüência de Cauchy em D (note que o limite desta seqüência não precisa estar em D). Da continuidade uniforme, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $x, y \in D$ e $|x - y| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Seja $N \in$

\mathbb{N} tal que $|x_n - x_m| < \delta$ para todo $n, m \geq N$. Segue que $|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$, para todo $n, m \geq N$. Isto mostra que $\{f(x_n)\}$ é de Cauchy. \square

Corolário 24. *Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua então para cada ponto de acumulação d' de D existe o limite $\lim_{x \rightarrow d'} f(x)$.*

Teorema 85. *Se $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ é compacto e $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.*

Prova: Dado $\epsilon > 0$ e $\kappa \in \mathcal{K}$, existe $\delta_\kappa > 0$ tal que, se $x \in \mathcal{K}$ e $x \in (\kappa - 2\delta_\kappa, \kappa + 2\delta_\kappa)$ então $|f(x) - f(\kappa)| < \frac{\epsilon}{2}$. Se $I_\kappa := (\kappa - \delta_\kappa, \kappa + \delta_\kappa)$, como $\cup_{\kappa \in \mathcal{K}} I_\kappa \supset \mathcal{K}$ e \mathcal{K} é compacto existem $n \in \mathbb{N}^*$ e $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ tais que $\cup_{i=1}^n I_{\kappa_i} \supset \mathcal{K}$. Seja $\delta = \min\{\delta_{\kappa_1}, \dots, \delta_{\kappa_n}\}$.

Logo, se $\kappa, x \in \mathcal{K}$ e $|\kappa - x| < \delta$ então, $\kappa \in I_{\kappa_i}$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$ e $|\kappa - \kappa_i| < \delta_{\kappa_i}$ e $|x - \kappa_i| \leq |x - \kappa| + |\kappa - \kappa_i| < 2\delta_i$. Desta forma $|f(\kappa) - f(\kappa_i)| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|f(x) - f(\kappa_i)| < \frac{\epsilon}{2}$. Da desigualdade triangular temos $|f(\kappa) - f(x)| < \epsilon$. \square

Teorema 86. *Toda função uniformemente contínua $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ admite uma única extensão contínua a D^- . Esta extensão é uniformemente contínua.*

Prova: Se $x \in D$ defina $\bar{f}(x) = f(x)$ e se d' é ponto de acumulação de D que não pertence a D defina $\bar{f}(d') = \lim_{x \rightarrow d'} f(x)$. Mostremos

que \bar{f} é uniformemente contínua.

Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in D$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Agora, se $\bar{x}, \bar{y} \in D^-$, $|\bar{x} - \bar{y}| < \delta$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ são seqüências em D , $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}$ e $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{y}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - y_n| < \delta$, $\forall n \geq N$. Logo, $|f(x_n) - f(y_n)| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall n \geq N$ e, passando o limite, $|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{y})| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Qualquer outra extensão contínua coincide com f em D e portanto nos pontos de acumulação de D que não pertencem a D . \square

12.7 Descontinuidades

Definição 47. *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Um ponto de descontinuidade ou uma descontinuidade da função f é um ponto $d \in D$ no qual f não é contínua. É claro que descontinuidades são pontos de acumulação de D .*

Uma descontinuidade d é de primeira espécie se o limite $\lim_{x \rightarrow d^+} f(x)$ (se d é um ponto de acumulação à direita) existe e o limite $\lim_{x \rightarrow d^-} f(x)$ (se d é um ponto de acumulação à esquerda) existe.

Uma descontinuidade que não é de primeira espécie é de segunda espécie.

Escreveremos $f(d^\pm) = \lim_{x \rightarrow d^\pm} f(x)$ quando o limite existir.

Teorema 87. *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona.*

- 1) *f não admite descontinuidades de segunda espécie.*
- 2) *Se $f(D)$ é denso em algum intervalo I , então f é contínua.*

Prova: 1) Dado $d \in D$, como f é monótona, $\lim_{x \rightarrow d^+} f(x)$ (se d é ponto de acumulação à direita) existe e $\lim_{x \rightarrow d^-} f(x)$ (se d é ponto de acumulação à esquerda) existe.

2) Se f é não-decrescente e $f(d^+) \neq f(d^-)$ e para todo $x \in D$, $x > d$, $f(x) \geq f(d^+)$ e para todo $x \in D$, $x < d$, $f(x) \leq f(d^-)$ logo $I \supset [f(d^-), f(d^+)]$ e ou $(f(d^-), f(d))$ ou $(f(d), f(d^+))$ é um intervalo aberto e não vazio que não contém pontos de D contradizendo a densidade de D em I . Segue que $f(d^+) = f(d^-)$ e f é contínua em d . O caso f não-crescente é análogo. \square

Teorema 88. *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujas descontinuidades são todas de primeira espécie o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável. Em particular, se f é monótona o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável.*

Prova: Seja $\sigma(x) = \max\{|f(x) - f(x^-)|, |f(x) - f(x^+)|\}$, $x \in D$. O conjunto das descontinuidade de f é $S = \{x \in D : \sigma(x) > 0\}$. Se $S_n = \{x \in D : \sigma(x) > \frac{1}{n}\}$, $S = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$.

Mostremos que os pontos de S_n são todos isolados.

Seja $s \in S_n$. Se s é um ponto de acumulação à direita de D . Da definição de $f(s^+)$, dado $n \in \mathbb{N}^*$ existe $\delta > 0$ tal que $s < x < s + \delta$, $x \in D$, implica $f(s^+) - \frac{1}{4n} < f(x) < f(s^+) + \frac{1}{4n}$. Logo, para cada $x \in (s, s + \delta) \cap D$, $\sigma(x) \leq \frac{1}{2n}$.

Semelhantemente, se s é um ponto de acumulação à esquerda de D , existe $\delta > 0$ tal que $\sigma(x) \leq \frac{1}{2n}$, para cada $x \in (s - \delta, s) \cap D$. Segue que s é um ponto isolado de S_n .

Disto segue que S_n é enumerável e portanto S é enumerável. \square

12.8 Semicontinuidade Superior e Inferior

Recorde que, se $D \subset \mathbb{R}$, c é um ponto de acumulação de D e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função que é limitada em uma vizinhança de $c \in \mathbb{R}$, definimos

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow c} f(x) := \lim_{r \rightarrow 0^+} \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - c| < r\} \quad e$$

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow c} f(x) := \lim_{r \rightarrow 0^+} \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - c| < r\}.$$

Definimos também, para qualquer ponto $c \in D^-$,

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow c} f(x) := \lim_{r \rightarrow 0^+} \sup\{f(x) : x \in D, |x - c| < r\} \quad e$$

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow c} f(x) := \lim_{r \rightarrow 0^+} \inf\{f(x) : x \in D, |x - c| < r\}$$

Definição 48. Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $c \in D$. Então, f é semicontínua superiormente em c se

$$f(c) = \overline{\lim}_{x \rightarrow c} f(x) \quad (f(c) \geq \overline{\lim}_{x \rightarrow c} f(x))$$

e f é semicontínua inferiormente em c se

$$f(c) = \underline{\lim}_{x \rightarrow c} f(x) \quad (f(c) \leq \underline{\lim}_{x \rightarrow c} f(x)).$$

Se f é semicontínua superiormente (inferiormente) em todos os pontos de D dizemos simplesmente que f é semicontínua superiormente (inferiormente).

Teorema 89. *Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função semicontínua superiormente (inferiormente). Se $k \in \mathbb{R}$ então existe um aberto O_k de \mathbb{R} tal que*

$$O_k \cap D = \underbrace{\{x \in D : f(x) < k\}}_{=f^{-1}((-\infty, k))} \quad (O_k \cap D = \underbrace{\{x \in D : f(x) > k\}}_{=f^{-1}((k, \infty))})$$

Prova: Para $c \in D$ com $f(c) < k$, da definição da semicontinuidade superior, existe $r_c > 0$ tal que $f(x) < k$ para todo $x \in D$, $|x - c| < r_c$. Seja $I_c = (c - r_c, c + r_c)$ e defina

$$O_k = \cup_{c \in f^{-1}((-\infty, k))} I_c$$

É claro que, para todo $x \in O_k \cap D = f^{-1}((-\infty, k))$. Demonstre a caracterização da semicontinuidade inferior como exercício. \square

13 Derivadas

Definição 49 (Derivada). *Sejam $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$ um ponto de acumulação de D_f . Se existir o limite $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = L \in \mathbb{R}$, diremos que L é a **derivada** de f em p e escreveremos*

$$f'(p) = L = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}.$$

Se f admitir derivada $f'(p)$ em p , diremos que f é **derivável** ou **diferenciável em p** .

Se f admitir derivada em todo ponto de $A \subset D_f$, diremos que f é **derivável** ou **diferenciável em $A \subset D_f$** .

Se $A = D_f$, diremos simplesmente que f é **derivável** ou **diferenciável**.

Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ possui derivada num ponto $d \in D$ que é também um ponto de acumulação de D , para $h \in \mathbb{R}$ tal que $d + h \in D$, escrevemos (resto da aproximação)

$$r(h) = f(d + h) - f(d) - f'(d)h.$$

Nesses pontos, definimos $r : \{h \in \mathbb{R} : d + h \in D_f\} \rightarrow \mathbb{R}$ e escrevemos $f(d + h) = f(d) + f'(d)h + r(h)$ e, fazendo $\sigma(h) = \frac{r(h)}{h}$, $h \neq 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \sigma(h) = 0$.

É fácil ver que f é diferenciável em d se, e somente se, existe função σ com $\lim_{h \rightarrow 0} \sigma(h) = 0$ tal que $f(d + h) = f(d) + [f'(d) + \sigma(h)]h$.

Definição 50 (Derivada à Direita e à Esquerda). *Sejam $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$ um ponto de acumulação à direita de D_f . Se existir o limite $\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = L^+ \in \mathbb{R}$, diremos que L^+ é a **derivada à direita** de f em p e escreveremos*

$$f'(p^+) = L^+ = \lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}.$$

De maneira semelhante definimos a derivada à esquerda.

13.1 A função derivada

Já definimos a derivada de $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ em pontos $p \in D_f$ que também são pontos de acumulação de D_f . Sendo assim, se

$$D_{f'} = \left\{ x \in D_f : x \text{ é um ponto de acumulação de } D_f \text{ e } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ existe.} \right\} \subset D_f$$

definimos a função $f' : D_{f'} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad x \in D_{f'}.$$

A função f' é dita **função derivada** ou simplesmente **derivada** de f .

Agora provamos que diferenciabilidade implica continuidade:

Teorema 90. *Se f for diferenciável em $p \in D_f$, então f será contínua em p .*

Prova: Recorde que $p \in D_f$ é um ponto de acumulação de D_f . Vamos mostrar que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ ou que $\lim_{x \rightarrow p} (f(x) - f(p)) = 0$.

Escrevemos.

$$f(x) - f(p) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p).$$

Assim

$$\lim_{x \rightarrow p} (f(x) - f(p)) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot \lim_{x \rightarrow p} (x - p) = f'(p) \cdot 0 = 0.$$

Portanto f é contínua em p . \square

Observação: Note que não vale a recíproca. A função $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$ mas não é diferenciável em $x = 0$.

Exemplo 36 (Critério Negativo). *Se f não é contínua em p então f não é diferenciável em p .*

Exemplo 37. A função $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1, \\ 2 & x > 1 \end{cases}$ é diferenciável em $x = 1$?

Solução: Como

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x),$$

$f(x)$ não é contínua em $x = 1$, logo não é diferenciável em $x = 1$.

13.2 Derivadas de Ordens Superiores

Seja f uma função derivável em $D_{f'}$. A função $f' : D_{f'} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **derivada** de f ou **derivada primeira de f** .

Então, podemos definir a derivada de f' , que será chamada **derivada segunda de f** . Neste caso,

$$(f')'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},$$

quando o limite existir. Escrevemos $f'' = f^{(2)} = (f')'$ para denotar a derivada segunda de f .

Para $n \in \mathbb{N}^*$, a **derivada n-ésima de f** será denotada por $f^{(n)}$, quando esta existir.

13.3 Fórmulas e Regras de Derivação

Teorema 91 (Fórmulas de Derivação). Se $k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, são válidas as fórmulas de derivação a seguir

(a) $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0,$

(b) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1},$

(c) $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1},$

$$(d) f(x) = \text{sen } x \Rightarrow f'(x) = \text{cos } x,$$

$$(e) f(x) = \text{cos } x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen } x,$$

$$(f) f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x,$$

$$(g) f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Prova: A afirmativa (a) é trivial.

Prova do item (b). Lembremos que

$$y^n - x^n = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + yx^{n-2} + x^{n-1}).$$

Então,

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{y^n - x^n}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} (y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + yx^{n-2} + x^{n-1}) = nx^{n-1}.$$

Prova do item (c). Fazendo $u = \sqrt[n]{y}$ e $v = \sqrt[n]{x}$ temos, da continuidade de $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$, $y \rightarrow x \Rightarrow u \rightarrow v$. Assim

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x}}{y - x} = \lim_{u \rightarrow v} \frac{u - v}{u^n - v^n} = \frac{1}{nv^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Prova do item (d).

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\text{sen } y - \text{sen } x}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{2 \text{sen} \left(\frac{y-x}{2} \right) \cos \left(\frac{y+x}{2} \right)}{y - x} = \text{cos } x.$$

Prova do item (e). Análoga ao item (d).

Prova do item (f).

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

pois, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Prova do item (g).

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(\frac{x+h}{x} \right).$$

Fazendo $u = \frac{h}{x}$ temos que para $h \rightarrow 0$, $u \rightarrow 0$, assim

$$\lim_{h \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x},$$

pois, $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r = e$.

13.4 Propriedades da Derivada

Teorema 92 (Propriedades da Derivada). *Sejam f e g funções diferenciáveis em p e k uma constante. Então*

(a) kf será diferenciável em p e

$$(kf)'(p) = kf'(p), \text{ (Multiplicação por constante)}$$

(b) $f + g$ será derivável em p e

$$(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p), \text{ (Derivada da Soma)}$$

(c) fg será derivável em p e

$$(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p), \text{ (Derivada do Produto)}$$

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)$ será derivável em p , se $g(p) \neq 0$ e, neste caso, teremos

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}, \text{ (Derivada do Quociente).}$$

Como $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = f'(p)$ e $\lim_{x \rightarrow p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p} = g'(p)$, temos

$$(a) \lim_{x \rightarrow p} \frac{kf(x) - kf(p)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p} k \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = k \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = kf'(p).$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow p} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(p)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{(f(x) - f(p)) + (g(x) - g(p))}{x - p} \\ = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} + \lim_{x \rightarrow p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p} = f'(p) + g'(p).$$

(c) Note que g é contínua em p . Logo $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = g(p)$ e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)g(x) - f(p)g(p)}{x-p} &= \lim_{x \rightarrow p} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x-p} g(x) + f(p) \frac{g(x) - g(p)}{x-p} \right) \\ \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x-p} \lim_{x \rightarrow p} g(x) + f(p) \lim_{x \rightarrow p} \frac{g(x) - g(p)}{x-p} \\ &= f'(p)g(p) + f(p)g'(p) \end{aligned}$$

(d) Como g é contínua em p e $g(p) \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow p} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(p)}$, e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow p} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(p)}{g(p)}}{x-p} &= \lim_{x \rightarrow p} \left(\frac{f(x)g(p) - f(p)g(x)}{x-p} \frac{1}{g(x)g(p)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \left(\frac{(f(x) - f(p))g(p) - f(p)(g(x) - g(p))}{x-p} \frac{1}{g(x)g(p)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \left(\left(\frac{f(x) - f(p)}{x-p} g(p) - f(p) \frac{g(x) - g(p)}{x-p} \right) \frac{1}{g(x)g(p)} \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x-p} g(p) - f(p) \lim_{x \rightarrow p} \frac{g(x) - g(p)}{x-p} \right) \lim_{x \rightarrow p} \frac{1}{g(x)g(p)} \\ &= (f'(p)g(p) - f(p)g'(p)) \frac{1}{g(p)^2}. \end{aligned}$$

13.5 A Regra da Cadeia

A Regra da Cadeia nos fornece uma maneira de calcular a derivada da função composta $h = f \circ g$ em termos das derivadas de f e de g .

Teorema 93 (Regra da Cadeia). *Sejam $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis com $\text{Im}(g) \subset D_f$. Se g é diferenciável em p , $g(p)$ é ponto de acumulação de D_f , f é diferenciável em $g(p)$ e $h = f \circ g$, então h é diferenciável em p e*

$$h'(p) = f'(g(p))g'(p). \quad (2)$$

De fato: Faça $q = g(p)$. Sejam σ_g e σ_f definidas em vizinhanças de 0 com $\lim_{h \rightarrow 0} \sigma_g(h) = 0$ e $\lim_{k \rightarrow 0} \sigma_f(k) = 0$ tais que

$$g(p+h) = g(p) + [g'(p) + \sigma_g(h)]h \text{ e}$$

$$f(q+k) = f(q) + [f'(q) + \sigma_f(k)]k.$$

Fazendo $k = g(p+h) - g(p) = [g'(p) + \sigma_g(h)]h$ temos $g(p+h) = q+k$ e

$$\begin{aligned} f(g(p+h)) &= f(q+k) = f(q) + [f'(q) + \sigma_f(k)]k \\ &= f(q) + [f'(q) + \sigma_f(k)][g'(p) + \sigma_g(h)]h \\ &= f(g(p)) + f'(g(p))g'(p)h \\ &\quad + [\sigma_f(g(p+h) - g(p))][g'(p) + \sigma_g(h)] + f'(q)\sigma_g(h)]h \end{aligned}$$

Agora, se $\sigma_{f \circ g}(h) = [\sigma_f(g(p+h) - g(p))][g'(p) + \sigma_g(h)] + f'(q)\sigma_g(h)$ temos que $\lim_{h \rightarrow 0} \sigma_{f \circ g}(h) = 0$. \square

13.6 Derivada da Função Inversa

Seja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que tem inversa, $D_{f^{-1}} = \text{Im}(f)$ e $f^{-1} : D_{f^{-1}} \rightarrow \mathbb{R}$. Então, para todo $x \in D_{f^{-1}}$,

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Vimos que se f é contínua (em um compacto), f^{-1} é contínua.

Se, além disso, f e f^{-1} forem deriváveis, pela Regra da Cadeia,

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1.$$

Logo, $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ e

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Para estudar a diferenciabilidade de f^{-1} usamos o resultado a seguir.

Proposição 17 (Derivada de funções inversas). *Seja f injetiva, p um ponto de acumulação de $\text{Im}(f)$. Se f for diferenciável em $q = f^{-1}(p)$ e f^{-1} é contínua em p , então f^{-1} é diferenciável em p se, e somente se, $f'(f^{-1}(p)) \neq 0$. Neste caso*

$$(f^{-1})'(p) = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}.$$

De fato: Se $f'(f^{-1}(p)) \neq 0$, como f^{-1} é contínua em p , $\lim_{h \rightarrow 0} f^{-1}(p+h) = f^{-1}(p)$. Usando $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in D_{f^{-1}}$, temos

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(p) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(p+h) - f^{-1}(p)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{h}{f^{-1}(p+h) - f^{-1}(p)}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(p+h)) - f(f^{-1}(p))}{f^{-1}(p+h) - f^{-1}(p)}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))} \end{aligned}$$

Por outro lado, se f^{-1} é diferenciável em p , da regra da cadeia aplicada a $f \circ f^{-1}$ temos $f'(f^{-1}(p)) \cdot (f^{-1})'(p) = 1$ e $f'(f^{-1}(p)) \neq 0$. \square

Exemplo 38. *Se $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$, então $g'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$.
 Recorde que, $x > 0$ se n for par e $x \neq 0$ se n for ímpar.*

Solução: Note que $g(x) = x^{\frac{1}{n}} = f^{-1}(x)$ onde $f(u) = u^n$. Então

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{\frac{n-1}{n}})} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Exemplo 39.

*Mostre que a função $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ definida por
 $f(x) = \text{sen}x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, é bijetora.*

De fato: Já sabemos f é contínua e que $\text{Im}(f) \subset [-1, 1]$.

Como $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$ e $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, do teorema do valor intermediário que $\text{Im}(f) \supset [-1, 1]$ e que f é sobrejetora.

Para verificar que f é injetora observamos que se $x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $x > y$, então $\frac{x-y}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $\frac{x+y}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Logo

$$\text{sen}x - \text{sen}y = 2\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) > 0.$$

Exemplo 40. A inversa da função $f(x) = \operatorname{sen} x$, para $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, é a função $g(x) = \operatorname{arcsen} x$, para $x \in [-1, 1]$. Qual é a derivada de $g(x)$?

Solução: Aplicando a Proposição 17.

$$\operatorname{arcsen}'x = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)}.$$

Agora, $1 = \cos^2(\operatorname{arcsen} x) + \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x) = \cos^2(\operatorname{arcsen} x) + x^2$, logo $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}$ pois $\cos y \geq 0$ para $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Portanto,

$$\operatorname{arcsen}'x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

De maneira análoga podemos definir as funções trigonométricas inversas do $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{sec} x$ e $\operatorname{cotg} x$, denominadas $\operatorname{arccos} x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcsec} x$ e $\operatorname{arccotg} x$.

Exemplo 41. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Já sabemos que f é contínua. Como

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) \\ &= (x - y)\left(\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2\right) \\ &= (x - y)\left(\left(\frac{x}{2} + y\right)^2 + \frac{3}{4}x^2\right) \end{aligned}$$

Segue que $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$ e f é injetora.

Note ainda que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e, do teorema do valor intermediário, f é uma bijeção de \mathbb{R} em \mathbb{R} . Segue ainda que $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua pois ela é contínua em qualquer intervalo compacto. A inversa de f é denotada por $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$. Do teorema sobre a derivada da inversa e do fato que $f'(x) = 3x^2$ deduzimos que $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável se, e somente se, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e, para estes valores de x ,

$$\overbrace{\left(\sqrt[3]{x}\right)'}^{(f^{-1})'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{3 \underbrace{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}_{f^{-1}(x)}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}. \square$$

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f tem um máximo (mínimo) local no ponto $d \in D$ se existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(d)$ ($f(x) \geq f(d)$) para todo $x \in D$, $|x - d| < \delta$. Quando a desigualdade é estrita dizemos que f tem um máximo (mínimo) local estrito. Os máximos e mínimos locais serão chamados de valores extremos e os pontos onde a função assume valores máximos ou mínimos serão chamados de pontos de máximo ou de mínimo.

Segue diretamente da definição de derivada (derivada à direita) que:

- Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é não-decrescente (não-crescente) e é diferenciável em um ponto $d \in D$ então, $f'(d) \geq 0$ ($f'(d) \leq 0$). Vale o mesmo resultado para funções diferenciáveis à direita.
- Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à direita (esquerda) em um ponto $d \in D$ e $f'(d^+) > 0$ ($f'(d^-) > 0$) então existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $x \in (d, d + \delta)$ ($x \in (d - \delta, d)$) implica $f(x) > f(d)$ ($f(x) < f(d)$).
- Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à direita (esquerda) em um ponto $d \in D$ e $f'(d^+) < 0$ ($f'(d^-) < 0$) então existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $x \in (d, d + \delta)$ ($x \in (d - \delta, d)$) implica $f(x) < f(d)$ ($f(x) > f(d)$).
- Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $d \in D$, d é ponto de acumulação a direita e a esquerda e $f'(d) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $d - \delta < x < d < y < d + \delta \Rightarrow f(x) < f(d) < f(y)$.
- Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $d \in D$, d é um ponto de acumulação a direita e a esquerda e f tem um valor extremo local em d então e $f'(d) = 0$.

13.7 Funções deriváveis em intervalos

Seja I um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua diremos que f é continuamente diferenciável em I ou simplesmente f é de classe C^1 em I .

Existe função diferenciável em um intervalo I que não é continuamente diferenciável

Exemplo 42. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right), & x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Então f é diferenciável e f' não é contínua em $x = 0$.

A derivada tem a propriedade do valor intermediário

Teorema 94 (Darboux). *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável com $f'(a) \neq f'(b)$ então, para todo C entre $f'(a)$ e $f'(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = C$.*

Prova: Suponha que $f'(a) < 0 < f'(b)$. Segue que, para x próximo a a em $[a, b]$, $f(x) < f(a)$ e para x próximo a b em $[a, b]$, $f(x) < f(b)$. Logo, o ponto de mínimo (que existe pelo Teorema de Weierstrass) c de f ocorre em (a, b) e portanto $f'(c) = 0$. Para o caso geral consideramos

- Se $f'(a) < C < f'(b)$, $g(x) = f(x) - C \cdot x$.
- Se $f'(a) > C > f'(b)$, $g(x) = C \cdot x - f(x)$.

A derivada não tem descontinuidades de primeira espécie

Teorema 95. *Se I é um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável então f' não tem descontinuidades de primeira espécie.*

Prova: Se a é um ponto de acumulação à direita de I e $L^+ = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ existe, mostremos que $L^+ = f'(a)$.

De modo análogo (exercício), se a é um ponto de acumulação à esquerda de I e $L^- = \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)$ existe, mostre que $f'(a) = L^-$.

Se $L^+ > f'(a)$ e $C \in (f'(a), L^+)$ existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) > C$ para todo $x \in (a, a + \delta)$. Escolhendo $b \in (a, a + \delta)$ temos que $f'(b) > C > f'(a)$ o que está em contradição com o Teorema de Darboux pois este implica a existência de $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = C$. Logo, $f'(a) \geq L^+$.

Se $f'(a) > L^+$ e $C \in (L^+, f'(a))$ existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) < C$ para todo $x \in (a, a + \delta)$. Escolhendo $b \in (a, a + \delta)$ temos que $f'(b) < C < f'(a)$ o que está em contradição com o Teorema de Darboux pois este implica a existência de $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = C$. Logo, $f'(a) \leq L^+$. Segue que $L^+ = f'(a)$. \square

Teorema 96. Se $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \leq 0$ ($D^+f(x) \geq 0$) para todo $x \in [a, b)$ e $f(a) = 0$ então $f(x) \leq 0$ ($f(x) \geq 0$) em $[a, b)$.

Prova: Suponha primeiramente que $D^+f(x) < 0$ para todo $x \in [a, b)$. Se o resultado é falso, existe ao menos um $x \in (a, b)$ tal que $f(x) > 0$. Seja $x_0 = \inf\{x \in (a, b) : f(x) > 0\}$.

Da continuidade de f , $f(x_0) = 0$ e da definição de x_0 existe uma seqüência $x_n \in (x_0, b)$ tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$. Assim

$$D^+f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geq 0$$

o que é uma contradição. Logo, $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b)$.

Agora consideramos o caso geral $D^+f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b)$. Neste caso consideramos a função auxiliar $f_\epsilon(x) = f(x) - \epsilon(x - a)$ e temos que $f_\epsilon(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b)$ e para todo $\epsilon > 0$.

Sendo assim $f(x) \leq \epsilon(x - a)$, para todo $x \in [a, b)$ e $\epsilon > 0$. Disto segue que para todo $x \in [a, b)$, $f(x) \leq 0$.

O caso restante será deixado como exercício. \square

A hipótese de continuidade não pode ser retirada como estabelece o exercício abaixo.

Exercício 11. *Encontre uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que é diferenciável à direita, tal que $D^+f(x) < 0$ para todo $x \neq 0$, $D^+f(0) = 0$, f é positiva para $x > 0$ e negativa para $x < 0$ ($f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$).*

Corolário 25. *Se $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b)$ então f é não-crescente em $[a, b)$.*

Prova: Se $a \leq c < d < b$ seja $g : [c, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - f(c)$ e $D^+g(x) \leq 0$ para todo $x \in [c, b)$. Segue do teorema que $g(x) \leq 0$ para todo $x \in [c, b)$. Em particular $g(d) = f(d) - f(c) \leq 0$. \square

Corolário 26. *Se $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b)$ então f é não-decrescente em $[a, b)$.*

Prova: Exercício.

Exercício 12. *Enuncie e prove resultados semelhantes aos anteriores para a derivada à esquerda.*

Seja I um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua diremos que f é continuamente diferenciável em I ou simplesmente f é de classe C^1 em I .

Existe função diferenciável em um intervalo I que não é continuamente diferenciável

A derivada tem a propriedade do valor intermediário

Teorema 97 (Darboux). *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável com $f'(a) \neq f'(b)$ então, para todo C entre $f'(a)$ e $f'(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = C$.*

A derivada não tem descontinuidades de primeira espécie

Teorema 98 (Somente descontinuidades de segunda espécie). *Se I é um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável então f' não tem descontinuidades de primeira espécie.*

Teorema 99. *Se $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \leq 0$ ($D^+f(x) \geq 0$) para todo $x \in [a, b)$ e $f(a) = 0$ então $f(x) \leq 0$ ($f(x) \geq 0$) em $[a, b)$.*

Exercício 13. *Encontre uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que é diferenciável à direita, tal que $D^+f(x) < 0$ para todo $x \neq 0$, $D^+f(0) = 0$, f é positiva para $x > 0$ e negativa para $x < 0$ ($f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$).*

Corolário 27. *Se $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b)$ então f é não-crescente em $[a, b)$.*

Corolário 28. *Se $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b)$ então f é não-decrescente em $[a, b)$.*

Prova: Exercício.

Exercício 14. *Enuncie e prove resultados semelhantes aos anteriores para a derivada à esquerda.*

Corolário 29 (Completaremos a Prova Mais Tarde). *Se $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua então f é de classe C^1 .*

Prova: Seja $g = D^+ f$ e defina

$$h(t) = f(a) + \int_a^t g(\tau) d\tau.$$

A função h é continuamente diferenciável em $[a, b)$. Se $\phi(t) = h(t) - f(t)$ então $\phi(a) = 0$ e $D^+ \phi(t) = 0$ em $[a, b)$. Do teorema anterior $\phi(t) \leq 0$ em $[a, b)$.

Como $-\phi(t)$ também satisfaz as condições do teorema anterior, $\phi(t) \geq 0$. Logo $\phi = 0$ em $[a, b)$ ou seja $f = h$ em $[a, b)$. \square

14 O Teorema do Valor Médio e suas Conseqüências

O Teorema do Valor Médio é um dos Teoremas fundamentais das funções diferenciáveis em intervalos. A sua demonstração decorre do seguinte resultado:

Teorema 100 (Teorema do Valor Médio de Cauchy). *Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas que são diferenciáveis em (a, b) , existe $c \in (a, b)$ para o qual*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Prova: Se

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

h é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b).$$

Para provar o teorema temos que mostrar que $h'(c) = 0$ para algum $c \in (a, b)$. Se h é constante isto vale para todo $c \in (a, b)$. Se $h(x) > h(a)$ para algum $x \in (a, b)$, seja c um ponto $[a, b]$ no qual h atinge o seu máximo. Como $h(a) = h(b)$, $c \in (a, b)$ e $h'(c) = 0$. Se $h(x) < h(a)$ para algum $x \in (a, b)$, escolhamos c em $[a, b]$ para o qual h atinge o seu mínimo. Exatamente como antes $c \in (a, b)$ e $f'(c) = 0$. \square

O resultado a seguir é um corolário imediato da prova do teorema anterior.

Corolário 30 (de Rolle). *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $f(a) = f(b)$, então existirá $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Corolário 31 (do Valor Médio). *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) , então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

ou seja

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Prova: Basta tomar $g(x) = x$ no Teorema anterior.

Os fatos a seguir são conseqüências do Teorema do Valor Médio.

Corolário 32. *Se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável*

- (a) *Se $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$, então f não-decrescente em (a, b) .*
- (b) *Se $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, então f crescente em (a, b) .*
- (c) *Se $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$, então f é constante em (a, b) .*
- (d) *Se $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$, então f não-crescente em (a, b) .*
- (e) *Se $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$, então f decrescente em (a, b) .*

Prova: Para todos os casos note que, para quaisquer $x_1, x_2 \in (a, b)$, do Teorema do Valor Médio, existe \bar{x} entre x_1 e x_2 tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\bar{x})(x_2 - x_1). \square$$

Observação 4 (Teorema da Função Inversa). *Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, $x_0 \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é C^1 e $f'(x_0) \neq 0$ então, existe $\delta > 0$ tal que $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ é injetora $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = J$ é um intervalo aberto, e $f^{-1} : J \rightarrow I$ é continuamente diferenciável com*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

14.1 Regra de L'Hospital

Regra de L'Hospital

Teorema 101. *Sejam f e g são diferenciáveis em (a, b) , e $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, onde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} A. \quad (3)$$

Se

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \text{ e } g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \quad (4)$$

ou se

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \quad (5)$$

então

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} A.$$

O resultado permanece válido se $x \rightarrow b$, ou se $g(x) \rightarrow -\infty$.

Prova: Primeiramente consideramos o caso $-\infty \leq A < +\infty$. Se $q > r > A$, de (3) existe $c \in (a, b)$ tal que, se $a < x < c$ então

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r$$

Se $a < x < y < c$, do Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe $t \in (x, y)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r. \quad (6)$$

Se (4) vale, fazendo $x \rightarrow a$ na desigualdade acima

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq r < q \quad (a < y < c) \quad (7)$$

Se (5) vale, mantendo y fixed in (6), podemos escolher $c_1 \in (a, y)$ tal que $g(x) > g(y)$ e $g(x) > 0$ se $a < x < c_1$. Multiplicando (6) por $[g(x) -$

$g(y)]/g(x)$, obtemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \quad (a < x < c_1).$$

Fazendo $x \rightarrow a$ nesta desigualdade, (5) mostra que existe $c_2 \in (a, c_1)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} < q \quad (a < x < c_2) \quad (8)$$

Assim, (7) ou (8) mostram que, para qualquer $q > A$ existe c_2 tal que $\frac{f(x)}{g(x)} < q$ se $a < x < c_2$. Do mesmo modo, $-\infty < A \leq +\infty$ e $p < A$, podemos encontrar c_3 tal que

$$p < \frac{f(x)}{g(x)} \quad (a < x < c_3).$$

Disto segue o resultado. \square

14.2 Teorema de Taylor

Teorema de Taylor

Teorema 102. *Se $n \in \mathbb{N}^*$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função $n - 1$ vezes diferenciável em $[a, b]$ e n vezes diferenciável em (a, b) com $f^{(n-1)} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Sejam $\alpha, \beta \in [a, b]$, $\alpha \neq \beta$ e*

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (t - \alpha)^k$$

Então existe ξ entre α e β tal que

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (\beta - \alpha)^n.$$

Para $n = 1$, teste é o teorema do valor médio. Em geral o teorema mostra como aproximar f por polinômios e fornece uma maneira de estimar o erro se conhecermos limitações para $|f^{(n)}(\xi)|$.

Prova: Seja M o número definido por

$$f(\beta) = P(\beta) + M(\beta - \alpha)^n.$$

Fazendo

$$g(t) = f(t) - P(t) - M(t - \alpha)^n \quad (a \leq t \leq b).$$

Precisamos mostrar que $n!M = f^{(n)}(\xi)$ para algum ξ entre α e β . Segue facilmente que

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!M \quad (a < t < b).$$

Para completar a prova basta mostrar que $g^{(n)}(\xi) = 0$ para algum ξ entre α e β . Como $P^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$, $k = 0, \dots, n - 1$, temos

$$g(\alpha) = g'(\alpha) = \dots = g^{(n-1)}(\alpha) = 0.$$

Nossa escolha de M implica que $g(\beta) = 0$ e, do Teorema do Valor Médio, $g'(x_1) = 0$ para algum x_1 entre α e β . Como $g'(\alpha) = 0$, de modo semelhante, $g''(x_2) = 0$ para algum x_2 entre α e x_1 . Depois de n chegamos a conclusão que $g^{(n)}(x_n) = 0$ para algum x_n entre α e x_{n-1} , isto é, entre α e β . \square

15 Funções Convexas e Funções analíticas

15.1 Funções Convexas

Seja I um intervalo, uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa quando, dados $a < x < b$ em I , o ponto $(x, f(x))$ fica abaixo da reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. A equação da reta é

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \text{ ou } y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

Logo $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, dados $a < x < b$ em I ,

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \text{ ou } f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

Ou seja, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se uma das desigualdades

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

sempre que $a < x < b$ em I . Dizemos que f é estritamente convexa se a desigualdade nesta definição é estrita.

Teorema 103 (Caracterização de funções convexas). *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável. Então f é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$.*

Prova: Se $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$. Então, dados $a, a + h \in I$, existe c entre a e $a + h$ tal que $f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(c)}{2} \cdot h^2$.

Como $f''(c) \geq 0, f(a + h) \geq f(a) + f'(a) \cdot h$. Disto segue que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq f'(a)$ se $h < 0$ e $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq f'(a)$ se $h > 0$.

Isto é, se $a < x < b$ em I , então $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$ ou seja

$$(f(x) - f(a))(b - x) \leq (f(b) - f(x))(x - a).$$

Sendo assim,

$$(f(x) - f(a))(b - a - (x - a)) \leq (f(b) - f(a) - (f(x) - f(a)))(x - a) \quad \text{e}$$
$$(f(x) - f(a))(b - a) \leq (f(b) - f(a))(x - a)$$

Isto prova que f é convexa.

Reciprocamente, se f convexa, dados $a < x < b$ em I , temos

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Fazendo $x \rightarrow a$ e $x \rightarrow b$

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b)$$

e f' é não-decrescente em I . Logo $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$. \square

Observação 5. 1) *Seja f diferenciável. Então f' é crescente se, e somente se, f é convexa.*

2) *Pode ser mostrado de forma análoga que, se $f''(x) > 0, \forall x \in I$, então f é estritamente convexa em I . A recíproca é falsa ($f(x) = x^4$ é estritamente convexa em \mathbb{R} mas $f''(0) = 0$).*

15.2 Funções Analíticas e Séries de Taylor

Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . Se $a, x \in I^\circ$, então podemos escrever, para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1} \\ + r_n((x - a)),$$

onde $r_n((x - a)) = \frac{f^{(n)}((1-\theta_n)a + \theta_n x)}{n!} \cdot (x - a)^n$, com $0 < \theta_n < 1$.

A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

chama-se a série de Taylor da função f em torno do ponto a .

Esta série pode convergir ou não e mesmo que convirja sua soma pode ser diferente de $f(x)$.

Exemplo 43. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ e $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$. Mostre que f é C^∞ , $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto a série de Taylor de f em $x = 0$ é convergente para $f(0)$ mas não coincide com f para nenhum $x \neq 0$.

Definição 51. Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, dizemos que f é analítica em I se, para cada $a \in I$ existe $\epsilon > 0$ tal que a série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$ é convergente com soma $f(x)$, $\forall x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$.

É claro que, a série de Taylor $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$ converge para $f(x)$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n((x-a)) = 0$.

Exemplo 44.

$$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Veremos mais tarde que, se a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ tem raio de convergência $R > 0$ então a função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad x \in (a-R, a+R)$$

é analítica.

16 Funções de Variação Limitada (BV)

16.1 Funções de Variação Limitada (BV)

Se $r \in \mathbb{R}$, $r^+ = \max\{r, 0\}$ e $r^- = \max\{-r, 0\}$ ($r = r^+ - r^-$, $|r| = r^+ + r^-$).

Uma coleção $\{a_0, \dots, a_k\}$ de pontos em $[a, b]$ é chamada **uma partição** do intervalo $[a, b]$ se $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k = b$. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\{a_0, \dots, a_k\}$ uma partição de $[a, b]$. Escrevemos

$$p = \sum_{i=1}^k [f(a_i) - f(a_{i-1})]^+, \quad n = \sum_{i=1}^k [f(a_i) - f(a_{i-1})]^-, \quad \text{e}$$
$$t = \sum_{i=1}^k |f(a_i) - f(a_{i-1})| = p + n \quad \text{e} \quad f(b) - f(a) = p - n$$

Sejam

$$P_a^b = \sup\{p : k \in \mathbb{N} \text{ e } a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b \text{ partição de } [a, b]\}$$

$$N_a^b = \sup\{n : k \in \mathbb{N} \text{ e } a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b \text{ partição de } [a, b]\}$$

$$T_a^b = \sup\{t : k \in \mathbb{N} \text{ e } a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b \text{ partição de } [a, b]\}$$

Dizemos que P_a^b , N_a^b e T_a^b são as variações positiva, negativa e total de f . É claro que

$$\max\{P_a^b, N_a^b\} \leq T_a^b \leq P_a^b + N_a^b \quad \text{e} \quad f(b) - f(a) = P_a^b - N_a^b$$

A função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de variação limitada se $T_a^b < \infty$. Notação $f \in BV([a, b])$.

16.2 Funções Monótonas e Lipschitzianas são BV

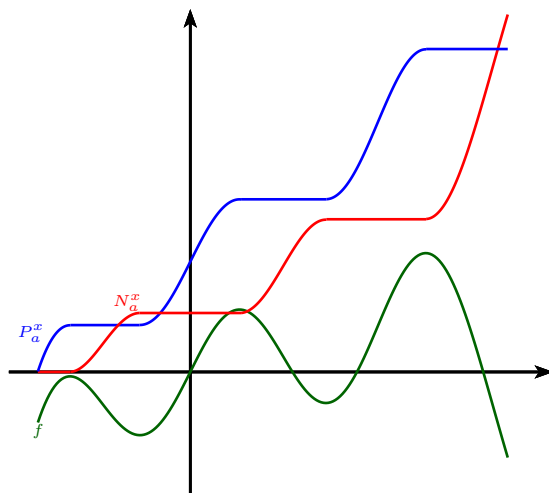
Teorema 104. 1) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz contínua então $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de variação limitada.

- 2) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona então $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de variação limitada.
- 3) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de variação limitada existem funções não-decrescentes $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x) = g(x) - h(x)$.

Prova: 1) Se f é Lipschitz, $\max\{P_a^b, N_a^b\} \leq T_a^b \leq L(b-a) < \infty$ onde $L > 0$ é a constante de Lipschitz.

2) Se f é monótona então $T_a^b = |f(b) - f(a)| < \infty$.

3) Se $T_a^b < \infty$, defina $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = f(a) + P_a^x$ e $h(x) = N_a^x$, para cada $x \in [a, b]$. É claro que g, h são não-decrescentes e que $f(x) = g(x) - h(x)$. \square



16.3 Monotonicidade e Diferenciabilidade

Lema 8. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona, então f é diferenciável exceto possivelmente em um conjunto $E \subset [a, b]$ com $m^*(E) = 0$.

Prova: Faremos apenas o caso f não-decrescente. Considere

$$\begin{aligned}\overline{d^+}f(x) &= \overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq \underline{d^+}f(x) = \underline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ \overline{d^-}f(x) &= \overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \geq \underline{d^-}f(x) = \underline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.\end{aligned}$$

Provemos que $\underline{d^+}f(x) \geq \overline{d^-}f(x)$ e $\underline{d^-}f(x) \geq \overline{d^+}f(x)$ exceto em um conjunto de medida exterior nula.

Vamos apenas considerar o conjunto E dos pontos $x \in [a, b]$ para os quais $\underline{d^-}f(x) < \overline{d^+}f(x)$. O conjunto E é a união dos conjuntos

$$E = \left\{ x \in [a, b] : \underline{d^-}f(x) < \overline{d^+}f(x) \right\} = \bigcup_{\substack{u, v \in \mathbb{Q} \\ v < u}} E_{u, v}$$

$$\text{onde } E_{u, v} = \left\{ x \in [a, b] : \underline{d^-}f(x) < v < u < \overline{d^+}f(x) \right\}$$

Logo, é suficiente mostrar que $m^*(E_{u, v}) = 0$. Seja $s = m^*(E_{u, v})$ e, dado $\epsilon > 0$, $E_{u, v}$ está contido em um aberto O com $m^*(O) < s + \epsilon$.

Para cada $x \in E_{u, v}$, podemos escolher $h > 0$ arbitrariamente pequeno de modo que o intervalo $[x - h, x]$ está contido em O e

$$f(x) - f(x - h) < vh \tag{9}$$

Do Lema de Vitali, escolhemos uma coleção $\{I_1, \dots, I_N\}$ disjunta desses intervalos cujos interiores cobrem $A \subset E_{u, v}$ com $m^*(A) > s - \epsilon$. Somando (9) para todos estes intervalos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N [f(x_n) - f(x_n - h_n)] &< v \underbrace{\sum_{n=1}^N h_n}_{\substack{\parallel \\ N \\ v m^*(\bigcup_{n=1}^N I_n)}} < v m^*(O) < v(s + \epsilon).\end{aligned}$$

Agora, cada $y \in A$ e k arbitrariamente pequeno $[y, y + k] \subset I_n$ e

$$f(y + k) - f(y) > uk. \tag{10}$$

Usando o Lema de Vitali temos uma coleção disjunta $\{J_1, \dots, J_M\}$ desses intervalos que cobrem $B \subset A$ com $m^*(B) > m^*(A) - \epsilon > s - 2\epsilon$. Somando (10) para todos esses intervalos temos

$$\sum_{i=1}^M f(y_i + k_i) - f(y_i) > u \underbrace{\sum_{i=1}^M k_i}_{\substack{\parallel \\ M \\ u m^*(\bigcup_{i=1}^M J_i)}} > u(s - 2\epsilon).$$

Cada intervalo J_i está contido em algum intervalo I_n e, como f é crescente, se somamos para todos os i para os quais $J_i \subset I_n$, temos

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq M \\ J_i \subset I_n}} f(y_i + k_i) - f(y_i) \leq f(x_n) - f(x_n - h_n)$$

Logo

$$u(s - 2\epsilon) < \sum_{i=1}^M f(y_i + k_i) - f(y_i) \leq \sum_{n=1}^N f(x_n) - f(x_n - h_n) < v(s + \epsilon)$$

e, para todo $\epsilon > 0$,

$$u(s - 2\epsilon) < v(s + \epsilon).$$

Segue que, $us \leq vs$. Como $u > v$, concluímos que $s = 0$. Isto mostra que $m^*(E_{u,v}) = 0$ e conseqüentemente $m^*(E) = 0$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe exceto possivelmente em um conjunto E com $m^*(E) = 0$. \square

16.4 Lipschitz Continuidade e Diferenciabilidade

Corolário 33. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I . Então f é diferenciável exceto possivelmente em um conjunto E com $m^*E = 0$.*

Corolário 34. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I . Então f é diferenciável em um subconjunto denso de I .*

Teorema 105. *Seja I um intervalo aberto da reta e $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I . Então g é continuamente diferenciável se, e somente se, para cada $x_0 \in I$,*

$$\left| \frac{g(x_0 + s + h) - g(x_0 + s)}{h} - \frac{g(x_0 + h) + g(x_0)}{h} \right| \xrightarrow{|s|+|h| \rightarrow 0} 0. \quad (11)$$

Prova: Se f é $C^1(I)$, existem $\theta, \theta' \in (0, 1)$ tais que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g(x_0 + s + h) - g(x_0 + s)}{h} - \frac{g(x_0 + h) + g(x_0)}{h} \right| \\ &= |g'(x_0 + s + \theta h) - g'(x_0 + \theta' h)| \xrightarrow{|s|+|h| \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Agora mostraremos que se a $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, (11) implica que $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável.

De (11), dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $|x - x_0| < \delta$ e $|h| < \delta$,

$$\left| \frac{g(x + h) - g(x)}{h} - \frac{g(x_0 + h) + g(x_0)}{h} \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Segue que, para $|x - x_0| < \delta$,

$$|g'(x) - g'(x_0)| = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{g(x + h) - g(x)}{h} - \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \right\} \right| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

e g' é contínua em x_0 .

Para concluir a prova, basta mostrar que $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável.

Como g Lipschitz contínua, ela é diferenciável em um conjunto denso de pontos. Para cada $x_0 \in I$, $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(x + h) - g(x) - g(x_0 + h) + g(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{4}|h|, \quad |x - x_0| + |h| < \delta$$

e existe $x^* \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que $g'(x^*)$ existe. Logo, para $h \neq 0$ suficientemente pequeno

$$\left| \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} - g'(x^*) \right| \leq \frac{\epsilon}{2},$$
$$0 \leq \left\{ \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} - \underline{\lim}_{h \rightarrow 0} \right\} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \leq \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, isto implica que $g'(x_0)$ existe. \square

17 A integral de Riemann-Stieltjes

17.1 Introdução: A integral de Riemann

No que se segue, vamos apresentar a integral de Riemann.

Dados $a < b$, seja $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ é limitada}\}$.

Definição 52. Dizemos que $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ é uma partição de $[a, b]$ se

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b. \quad (12)$$

Se $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$, $1 \leq i \leq n$, $\|\mathcal{P}\| := \sup\{\Delta x_i : 1 \leq i \leq n\}$ será chamada de malha da partição \mathcal{P} .

Se $f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$, $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ e chamamos de **soma superior** e **inferior** da função f relativas à \mathcal{P} , às somas

$$U(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad L(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i.$$

Note que

- $\sum_{i=1}^n \Delta x_i = b - a$
- $L(\mathcal{P}, f) \leq U(\mathcal{P}, f)$ pois $m_i \leq M_i$, $1 \leq i \leq n$.
- $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ e $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, $m \leq m_i \leq M_i \leq M$, $1 \leq i \leq n$.
- $m(b - a) \leq L(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = U(\mathcal{P}, f) \leq M(b - a)$
- Os conjuntos $\{U(\mathcal{P}, f) : \mathcal{P} \in \mathcal{P}_{[a, b]}\}$ e $\{L(\mathcal{P}, f) : \mathcal{P} \in \mathcal{P}_{[a, b]}\}$ são limitados inferiormente e superiormente, respectivamente, onde $\mathcal{P}_{[a, b]} = \{\mathcal{P} : \mathcal{P} \text{ é partição de } [a, b]\}$.

Definimos a **integral superior de Riemann** de f em $[a, b]$ por

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}} U(\mathcal{P}, f)$$

e a **integral inferior de Riemann** de f em $[a, b]$ por

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx = \sup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}} L(\mathcal{P}, f).$$

Dizemos que f é **Riemann integrável em** $[a, b]$ se

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \underline{\int_a^b} f(x).$$

O valor comum acima é chamado **integral de Riemann** de f em $[a, b]$ e denotado por $\int_a^b f(x) dx$

$$\mathcal{R}([a, b]) = \{f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}) : f \text{ Riemann integrável em } [a, b]\}.$$

Nem toda função limitada é Riemann integrável. De fato, seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{para } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1, & \text{para } x \in \mathbb{I} \cap [0, 1]. \end{cases} \quad (13)$$

É claro que f é limitada em $[0, 1]$. Mostremos que f **não** é Riemann integrável em $[0, 1]$.

De fato: Se $\mathcal{P} = \{0 = x_0, x_1, \dots, x_n = 1\} \in \mathcal{P}_{[0,1]}$, como $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 1$ e $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 0$,

$$U(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 1,$$

$$L(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \Delta x_i = 0.$$

Sendo assim,

$$\overline{\int_0^1 f(x) dx} = 1 \neq \underline{\int_0^1 f(x) dx} = 0.$$

e f não é Riemann integrável em $[0, 1]$.

17.2 Integral de Riemann-Stieltjes: Definição e caracterização

A seguir introduziremos a integral de Riemann-Stieltjes. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ não-decrescente. Claramente α é limitada em $[a, b]$.

Dada $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}_{[a,b]}$, para $1 \leq i \leq n$, seja

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

e, dada $f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$, defina

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta\alpha_i,$$

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta\alpha_i,$$

com $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, como antes.

Note que

$$\sum_{i=1}^n \Delta\alpha_i = \alpha(b) - \alpha(a)$$

e

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta\alpha_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta\alpha_i = U(\mathcal{P}, f, \alpha)$$

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] = \sum_{i=1}^n m \Delta\alpha_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta\alpha_i = U(\mathcal{P}, f, \alpha)$$

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta\alpha_i \leq M \sum_{i=1}^n \Delta\alpha_i = M[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

onde $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ e $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$, como antes.

Disto segue que os conjuntos

$$\{L(\mathcal{P}, f, \alpha); \mathcal{P} \in \mathcal{P}_{[a,b]}\} \text{ e } \{U(\mathcal{P}, f, \alpha); \mathcal{P} \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$$

são, respectivamente, limitado superiormente e inferiormente em \mathbb{R} . Logo definimos a integral superior e a integral inferior de Riemann-Stieltjes da função f em $[a, b]$, relativamente a α por

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}} U(\mathcal{P}, f, \alpha) \text{ e } \underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}} L(\mathcal{P}, f, \alpha).$$

A função f é **Riemann-Stieltjes integrável em $[a, b]$, relativamente a α** se

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \underline{\int_a^b} f d\alpha,$$

e o valor acima é chamado **integral de Riemann-Stieltjes de f em $[a, b]$, relativamente a função α** . e será denotado por

$$\int_a^b f d\alpha \text{ ou } \int_a^b f(x) d\alpha(x)$$

Denote por $\mathcal{R}(\alpha, [a, b]) = \{f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}) : f \text{ é Riemann-Stieltjes integrável } [a, b], \text{ relativamente a } \alpha\}$.

Se $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\alpha(x) = x$, $x \in [a, b]$ a integral de Riemann-Stieltjes, relativamente a α , coincide com a integral de Riemann, ou seja,

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x) dx$$

pois, neste caso, $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $1 \leq i \leq n$.

Note que $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ só precisa ser não-decrescente em $[a, b]$, para podermos definir a integral de Riemann-Stieltjes de funções $f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ relativamente a α .

Vamos supor, daqui em diante, que

$$\alpha(b) > \alpha(a). \tag{14}$$

Caso contrário, a integral de Riemann-Stieltjes de f relativamente a α seria nula para toda $f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$.

A seguir passaremos a investigar em que situações existe a integral de Riemann-Stieltjes, relativamente à função α , para uma função limitada, a valores reais, definida no intervalo $[a, b]$.

Definição 53 (Refinamento). *Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{P}^* \in \mathcal{P}_{[a,b]}$, dizemos que a partição \mathcal{P}^* é um refinamento da partição \mathcal{P} , se*

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^*,$$

ou seja, todo ponto de \mathcal{P} é um ponto de \mathcal{P}^* .

Sejam $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{P}_{[a,b]}$. Definimos

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2. \quad (15)$$

Então $\mathcal{P}^* \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ e \mathcal{P}^* é um refinamento comum a \mathcal{P}_1 e a \mathcal{P}_2 .

Proposição 18. *Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{P}^* \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ com $\mathcal{P}^* \supset \mathcal{P}$. Então,*

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \quad (16)$$

$$U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha). \quad (17)$$

Prova: Se $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$ não há nada a fazer. Se $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{P}^*$, seja $x^* \in \mathcal{P}^* \setminus \mathcal{P}$. Considere, inicialmente, o caso

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \{x^*\}.$$

Logo, se \mathcal{P} tem n elementos, \mathcal{P}^* tem $n + 1$ elementos e

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{a = x_0, x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_{i_0}, \dots, x_n = b, \\ \mathcal{P}^* &= \{a = x_0, x_1, \dots, x_{i_0-1}, x^*, x_{i_0}, \dots, x_n = b\} \\ &= \{a = x_0^*, x_1^*, \dots, x_{i_0-1}^*, x_{i_0}^*, x_{i_0+1}^*, \dots, x_{n+1}^* = b\} \end{aligned}$$

Se $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $1 \leq i \leq n$ e $m_j^* = \inf_{x \in [x_{j-1}^*, x_j^*]} f(x)$, $1 \leq j \leq n + 1$.
 $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$, $1 \leq i \leq n$ e $\Delta\alpha_j^* = \alpha(x_j^*) - \alpha(x_{j-1}^*)$, $1 \leq j \leq n + 1$.

Assim,

$$\begin{aligned}
L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \sum_{j=1}^{n+1} m_j^* \Delta\alpha_j^* - \sum_{i=1}^n m_i \Delta\alpha_i \\
&= m_{i_0}^* \Delta\alpha_{i_0}^* + m_{i_0+1}^* \Delta\alpha_{i_0+1}^* - m_{i_0} \Delta\alpha_{i_0} \\
&= m_{i_0}^* \Delta\alpha_{i_0}^* + m_{i_0+1}^* \Delta\alpha_{i_0+1}^* - m_{i_0} \underbrace{[\alpha(x_{i_0}) - \alpha(x^*)]}_{\Delta\alpha_{i_0+1}^*} - \underbrace{[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i_0-1})]}_{\Delta\alpha_{i_0}^*} \\
&= [m_{i_0}^* - m_{i_0}] [\alpha(x^*) - \alpha(x_{i_0-1})] + [m_{i_0+1}^* - m_{i_0}] [\alpha(x_{i_0}) - \alpha(x^*)] \geq 0
\end{aligned}$$

ou seja,

$$L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \geq 0.$$

O caso geral segue por indução. A desigualdade para a soma superior é obtida de maneira análoga (Exercício). ◻

Como consequência do resultado anterior temos

Teorema 106. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada em $[a, b]$. Então*

$$\underline{\int_a^b} f \, d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f \, d\alpha. \quad (18)$$

Prova: Do resultado anterior, se $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ e $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$

$$L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) \leq L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}_2, f, \alpha).$$

e

$$\underline{\int_a^b} f \, d\alpha = \sup_{\mathcal{P}_1 \in \mathcal{P}} L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) \leq \inf_{\mathcal{P}_2 \in \mathcal{P}} U(\mathcal{P}_2, f, \alpha) = \overline{\int_a^b} f \, d\alpha$$

completando a prova. ◻

Corolário 35. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada em $[a, b]$.*

Então $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $\mathcal{P} \in \mathcal{P}$, tal que

$$0 \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon.$$

Prova: Note que, dado $\epsilon > 0$, se $\mathcal{P} \in \mathcal{D}$ é tal que a desigualdade acima está satisfeita,

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}, f, \alpha) &\leq \sup_{\mathcal{P}' \in \mathcal{D}} L(\mathcal{P}', f, \alpha) = \int_a^b f d\alpha \\ &\leq \overline{\int_a^b f d\alpha} = \inf_{\mathcal{P}' \in \mathcal{D}} U(\mathcal{P}', f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) \end{aligned}$$

e

$$0 \leq \overline{\int_a^b f d\alpha} - \int_a^b f d\alpha \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon.$$

Segue que $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$.

Por outro lado, se $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$,

$$\inf_{\mathcal{P} \in \mathcal{D}} U(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sup_{\mathcal{P} \in \mathcal{D}} L(\mathcal{P}, f, \alpha).$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, existem partições $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{D}$ tais que

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}_2, f, \alpha) < \overline{\int_a^b f d\alpha} + \frac{\epsilon}{2} = \int_a^b f d\alpha + \frac{\epsilon}{2},$$

e

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \geq L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) > \int_a^b f d\alpha - \frac{\epsilon}{2} = \int_a^b f d\alpha - \frac{\epsilon}{2},$$

onde $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Ou seja $0 \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon$. \square

Teorema 107. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e $\epsilon > 0$ dado*

- 1) *Se existe $\mathcal{P} \in \mathcal{D}$ tal que $0 \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon$ então $0 \leq U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) < \epsilon$, para todo refinamento \mathcal{P}^* de \mathcal{P} .*
- 2) *Se existe $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ tal que $0 \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon$ e, para cada $1 \leq i \leq n$, dados $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, então*

$$\sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_i)| \Delta\alpha_i < \epsilon. \quad (19)$$

e, se $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$,

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta\alpha_i - \int_a^b f d\alpha \right| < \epsilon. \quad (20)$$

Prova: 1) Seja $\mathcal{P} \in \mathcal{P}$ tal que $0 \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon$ e \mathcal{P}^* um refinamento de \mathcal{P} . O resultado segue de

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha).$$

2) Sabemos que, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, se $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ então $f(s_i), f(t_i) \in [m_i, M_i]$ e $|f(s_i) - f(t_i)| \leq M_i - m_i$ onde $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ e $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$. Portanto

$$\sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_i)| \Delta\alpha_i \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta\alpha_i = U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon$$

e o resultado segue.

Se $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$, dado $\epsilon > 0$, existe uma $\mathcal{P} \in \mathcal{P}([a, b])$ tal que

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq \int_a^b f d\alpha \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) < L(\mathcal{P}, f, \alpha) + \epsilon$$

Escolhendo $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $f(t_i) \in [m_i, M_i]$

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta\alpha_i \leq \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta\alpha_i \\ &\leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta\alpha_i = U(\mathcal{P}, f, \alpha) < L(\mathcal{P}, f, \alpha) + \epsilon \end{aligned}$$

e o resultado segue. \square

17.3 Classes de Funções Riemann-Stieltjes Integráveis

Teorema 108.

$$C([a, b]; \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$$

Prova: Dado $\epsilon > 0$, escolhamos $\eta > 0$, de modo que

$$\eta = \frac{\epsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)}. \quad (21)$$

e, como f é uniformemente contínua, seja $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $x, t \in [a, b]$, $|x - t| < \delta$ implica $|f(x) - f(t)| < \eta$.

Seja $\mathcal{P} = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ tal que $\|\mathcal{P}\| = \sup\{\Delta x_i : 1 \leq i \leq n\} < \delta$.

Como f é contínua, podemos escolher $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tais que $m_i = f(t_i)$ e $M_i = f(s_i)$. Logo, $|t_i - s_i| \leq \Delta x_i < \delta$ e

$$|M_i - m_i| = |f(x_i) - f(t_i)| < \eta$$

e

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta \alpha_i < \eta \sum_{i=1}^n \Delta \alpha_i = \epsilon.$$

Segue que $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$. \square

Teorema 109. *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona em $[a, b]$ e $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e não-decrescente. Então $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$.*

Prova: Dado $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, escolha uma partição \mathcal{P} tal que

$$\Delta \alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Isto é possível pois α satisfaz a propriedade do valor intermediário. Se f é não-decrescente (o outro caso é análogo). Então

$$M_i = f(x_i), \quad m_i = f(x_{i-1}) \quad (i = 1, \dots, n),$$

e portanto

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \cdot [f(b) - f(a)] < \epsilon \end{aligned}$$

se n for suficientemente grande. Segue que, $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$. \square

Teorema 110. *Se $f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ possui somente um número finito de pontos de descontinuidade e $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não-decrescente que é contínua nos pontos onde f é descontínua. Então $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$.*

Prova: Dado $\epsilon > 0$, se $M = \sup |f(x)|$ e $E = \{y_1, \dots, y_k\}$ o conjunto (finito) das descontinuidades de f . Como α é contínua em todos os pontos de E , podemos cobrir E por intervalos disjuntos $[a, b] \supset [u_j, v_j] \ni y_j$, $1 \leq i \leq k$ tais que

$$\sum_{j=1}^k (\alpha(v_j) - \alpha(u_j)) < \epsilon.$$

Podemos escolher estes intervalos de modo que se $y_j \notin \{a, b\}$ então $y_j \in I_j = (u_j, v_j)$ (se $y_1 = a$ ($y_k = b$), $I_1 = [a, v_1)$ ($I_k = (u_k, b]$)).

O conjunto $K = [a, b] \setminus \bigcup_{j=1}^k (u_j, v_j)$ é compacto e f é uniformemente contínua em K . Seja $\delta > 0$ tal que $s, t \in K$, $|s - t| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \epsilon$.

Agora escolhemos uma partição $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$, da seguinte forma: $u_j, v_j \in \mathcal{P}$, $1 \leq j \leq k$. Nenhum ponto de (u_j, v_j) pertence a \mathcal{P} . Se $x_{i-1} \neq u_j$, para todo $1 \leq j \leq k$, então $\Delta x_i < \delta$.

Note que $M_i - m_i \leq 2M$ para todo i e $M_i - m_i \leq \epsilon$ exceto quando x_{i-1} é algum dos u_j . Logo

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq [\alpha(b) - \alpha(a)]\epsilon + 2M\epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$. \square

17.4 Propriedades

Teorema 111. *Se $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$, $f([a, b]) \subset [m, M]$ e $\phi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então, $h = \phi \circ f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$.*

Prova: Dado $\epsilon > 0$, como ϕ é uniformemente contínua em $[m, M]$, existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que $s, t \in [m, M]$, $|s - t| \leq \delta \Rightarrow |\phi(s) - \phi(t)| < \epsilon$.

Como $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$, existe $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}_{[a, b]}$ tal que

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \delta^2.$$

Se $r \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ e $M_i^r = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} r(x)$, $m_i^r = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} r(x)$. Seja $A = \{i : 1 \leq i \leq n \text{ e } M_i^f - m_i^f < \delta\}$ e $B = \{i : 1 \leq i \leq n \text{ e } M_i^f - m_i^f \geq \delta\}$, então, para $i \in A$, a escolha de δ implica que $M_i^h - m_i^h \leq \epsilon$.

Para $i \in B$, $M_i^h - m_i^h \leq 2K$, onde $K = \sup_{t \in [m, M]} |\phi(t)|$. Logo, da escolha de \mathcal{P} ,

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta\alpha_i \leq \sum_{i \in B} (M_i^f - m_i^f) \Delta\alpha_i < \delta^2$$

e $\sum_{i \in B} \Delta\alpha_i < \delta < \epsilon$. Segue que

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, h, \alpha) - L(\mathcal{P}, h, \alpha) &= \sum_{i \in A} (M_i^h - m_i^h) \Delta\alpha_i + \sum_{i \in B} (M_i^h - m_i^h) \Delta\alpha_i \\ &\leq \epsilon[\alpha(b) - \alpha(a)] + 2K\delta < \epsilon[\alpha(b) - \alpha(a) + 2K]. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário segue que $h \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$. \square

Teorema 112. (a) Se $f_1 \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$ e $f_2 \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$ então $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$, $c \cdot f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$ para todo $c \in \mathbb{R}$, e

$$\begin{aligned} \int_a^b (f_1 + f_2) d\alpha &= \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha, \\ \int_a^b c f d\alpha &= c \int_a^b f d\alpha. \end{aligned}$$

(b) Se $f_1(x) \leq f_2(x)$ em $[a, b]$ então

$$\int_a^b f_1 d\alpha \leq \int_a^b f_2 d\alpha$$

(c) Se $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$ e $c \in (a, b)$ então $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, c]) \cap \mathcal{R}(\alpha, [c, b])$, e

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha$$

1. (d) Se $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$ e if $|f(x)| \leq M$ então

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

(e) Se $f \in \mathcal{R}(\alpha_1, [a, b])$ e $f \in \mathcal{R}(\alpha_2, [a, b])$ então $f \in \mathcal{R}(\alpha_1 + \alpha_2, [a, b])$ e

$$\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2$$

se $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$ e $\mathbb{R} \ni c > 0$ então $f \in \mathcal{R}(c\alpha, [a, b])$ e

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c \int_a^b f d\alpha$$

Prova: Se $f = f_1 + f_2$ e \mathcal{P} é qualquer partição $[a, b]$, temos

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}, f_1, \alpha) + L(\mathcal{P}, f_2, \alpha) &\leq L(\mathcal{P}, f, \alpha) \\ &\leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}, f_1, \alpha) + U(\mathcal{P}, f_2, \alpha). \end{aligned}$$

Se $f_1 \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$ e $f_2 \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$ e $\epsilon > 0$ existem $\mathcal{P}_j \in \mathcal{P}([a, b])$ ($j = 1, 2$) tal que

$$U(\mathcal{P}, f_j, \alpha) - L(\mathcal{P}, f_j, \alpha) \leq U(\mathcal{P}_j, f_j, \alpha) - L(\mathcal{P}_j, f_j, \alpha) < \frac{\epsilon}{2},$$

onde \mathcal{P} é refinamento comum a \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 . Logo

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon.$$

Segue que $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$.

Com esta mesma \mathcal{P} remos

$$U(\mathcal{P}, f_j, \alpha) < \int_a^b f_j d\alpha + \epsilon \quad (j = 1, 2)$$

e

$$\int_a^b f d\alpha \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) < \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha + 2\epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário concluimos que

$$\int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha$$

Este mesmo resultado para $-f_1$ e $-f_2$, nos dá a desigualdade reversa e a igualdade está provada.

As provas das demais afirmativas são semelhantes (exercício). Na parte (c) a estratégia é considerar refinamentos que contém o ponto c , na aproximação da integral. \square

Teorema 113. *Se $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$ e $g \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$ então*

- (a) $fg \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$;
- (b) $|f| \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$ e $\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq \int_a^b |f| d\alpha$.

Prova: Se $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$ e $\phi(t) = t^2$ então $\phi \circ f = f^2 \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$. A identidade

$$4fg = (f + g)^2 - (f - g)^2$$

completa a prova de (a).

Se $\phi(t) = |t|$, $\phi \circ f = |f| \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$. Escolha $c = \pm 1$ tal que

$$c \int f d\alpha \geq 0$$

$$\left| \int f d\alpha \right| = c \int f d\alpha = \int cf d\alpha \leq \int |f| d\alpha$$

pois $cf \leq |f|$. Isto prova b). \square

Definição 54. *A função degrau unitário I é definida por*

$$I(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

Teorema 114. Se $a < s < b$, $f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ é contínua em s , e $\alpha(x) = I(x - s)$, então

$$\int_a^b f d\alpha = f(s)$$

Prova: Considere as partições $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, onde $x_0 = a$, e $x_1 = s < x_2 < x_3 = b$. Então

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) = M_2, \quad L(\mathcal{P}, f, \alpha) = m_2.$$

Como f é contínua em s , vemos M_2 e m_2 convergem para $f(s)$ quando $x_2 \rightarrow s$. \square

Teorema 115. Se $c_n \geq 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ é convergente, $\{s_n\}$ é uma seqüência de pontos distintos em (a, b) ,

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - s_n)$$

e f é contínua em $[a, b]$ então

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n).$$

Prova: Por comparação a série é convergente para cada x . Sua soma $\alpha(x)$ é claramente monótona, $\alpha(a) = 0$ e $\alpha(b) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Dado $\epsilon > 0$ escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{N+1}^{\infty} c_n < \epsilon$. Faça

$$\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^N c_n I(x - s_n), \quad \alpha_2(x) = \sum_{N+1}^{\infty} c_n I(x - s_n).$$

Dos teoremas anteriores

$$\int_a^b f d\alpha_1 = \sum_{i=1}^N c_n f(s_n)$$

Como $\alpha_2(b) - \alpha_2(a) = \sum_{N+1}^{\infty} c_n < \epsilon$

$$\left| \int_a^b f d\alpha_2 \right| \leq M\epsilon$$

onde $M = \sup |f(x)|$. Como $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, segue que

$$\left| \int_a^b f d\alpha - \sum_{i=1}^N c_n f(s_n) \right| \leq M\epsilon$$

Se fazemos $N \rightarrow \infty$, obtemos o resultado. \square

17.5 Mudança de variável

Teorema 116. *Sejam $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ não-decrescente e diferenciável com $\alpha' \in \mathcal{R}([a, b])$ e $f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$. Então $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$ se, e só se, $f\alpha' \in \mathcal{R}([a, b])$. Neste caso*

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx.$$

Prova: Dado $\epsilon > 0$ existe $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}([a, b])$ tal que

$$U(\mathcal{P}, \alpha') - L(\mathcal{P}, \alpha') < \epsilon \quad (\bullet)$$

Do Teorema do Valor Médio existe $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$\Delta\alpha_i = \alpha'(t_i) \Delta x_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Se $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ então

$$\sum_{i=1}^n |\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)| \Delta x_i < \epsilon.$$

Seja $M = \sup |f(x)|$. Como

$$\sum_{i=1}^n f(s_i) \Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^n f(s_i) \alpha'(t_i) \Delta x_i$$

segue que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(s_i) \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^n f(s_i) \alpha'(s_i) \Delta x_i \right| \leq M\epsilon. \quad (*)$$

Em particular,

$$\sum_{i=1}^n f(s_i) \Delta\alpha_i \leq U(\mathcal{P}, f\alpha') + M\epsilon$$

para todas as escolhas $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, de modo que

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}, f\alpha') + M\epsilon.$$

O mesmo argumento nos leva de (*) a

$$U(\mathcal{P}, f\alpha') \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) + M\epsilon.$$

e portanto

$$|U(\mathcal{P}, f, \alpha) - U(\mathcal{P}, f\alpha')| \leq M\epsilon. \quad (\dagger)$$

Agora note que (•) permanece válida de \mathcal{P} for substituída por um refinamento. Logo (†) também permanece válida. Concluimos que

$$\left| \overline{\int_a^b f d\alpha} - \overline{\int_a^b f(x)\alpha'(x)dx} \right| \leq M\epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário

$$\overline{\int_a^b f d\alpha} = \overline{\int_a^b f(x)\alpha'(x)dx}$$

para qualquer $f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$. A igualdade para as integrais inferiores segue da mesma maneira de (*). ◻

Os dois teoremas anteriores ilustram a generalidade e a flexibilidade inerentes ao processo de integração de Stieltjes.

Se α é uma função degrau pura, a integral se reduz a uma série finita ou infinita.

Se α tem uma derivada integrável, a integral se reduz a uma integral de Riemann usual.

Isso torna possível, em muitos casos, estudar as integrais e séries simultaneamente.

Para ilustrar este ponto, considere um exemplo físico. O momento de inércia de um fio reto de comprimento unitário, em torno de um eixo que passa por uma extremidade, em ângulo reto com o fio, é

$$\int_0^1 x^2 dm \quad (\ddagger)$$

onde $m(x)$ é a massa contida no intervalo $[0, x]$. Se o fio for considerado com densidade contínua ρ , ou seja, se $m'(x) = \rho(x)$, então (33) se transforma em

$$\int_0^1 x^2 \rho(x) dx$$

Por outro lado, se o fio for composto de massas m_i concentradas nos pontos x_i , (\ddagger) torna-se

$$\sum_i x_i^2 m_i$$

Portanto (\ddagger) contém o caso anterior e também o caso no qual m é contínua mas não é diferenciável em todos os pontos.

Teorema 117 (Mudança de variável). *Sejam $\phi : [A, B] \rightarrow [a, b]$ contínua e bijetora com $\phi(A) = a$ e $\phi(B) = b$, α é não-decrescente, $\beta = \alpha \circ \phi$ e $g = f \circ \phi$. Se $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$ então $g \in \mathcal{R}(\beta, [A, B])$ e*

$$\int_A^B g d\beta = \int_a^b f d\alpha$$

Prova: Se $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ e $\mathcal{Q} = \{y_0, \dots, y_n\} \in \mathcal{P}_{[A,B]}$, com $x_i = \phi(y_i)$. Todas as partições de $[A, B]$ são obtidas desta forma.

Como os valores de f em $[x_{i-1}, x_i]$ e de g em $[y_{i-1}, y_i]$ são os mesmos,

$$U(\mathcal{Q}, g, \beta) = U(\mathcal{P}, f, \alpha), \quad L(\mathcal{Q}, g, \beta) = L(\mathcal{P}, f, \alpha).$$

Como $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$, \mathcal{P} pode ser escolhida de forma que ambas $U(\mathcal{P}, f, \alpha)$ e $L(\mathcal{P}, f, \alpha)$ estão próximas a $\int_a^b f d\alpha$.

Segue que $g \in \mathcal{R}(\beta, [A, B])$ e o resultado está demonstrado. \square

Agora vamos considerar o seguinte caso especial. Tomamos $\alpha(x) = x$. Então $\beta = \varphi$. Suponha que $\varphi' \in \mathcal{R}([A, B])$. Aplicando os dois resultados anteriores temos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_A^B f(\varphi(y))\varphi'(y)dy.$$

17.6 Teorema fundamental do cálculo e Integração por partes

A seguir mostraremos que a derivação e a integração, em algum sentido, são operações inversas.

Teorema 118. *Se $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Para $a \leq x \leq b$, faça*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Então $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz contínua (portando diferenciável exceto em um conjunto com medida exterior nula) e, se f é contínua em $x_0 \in [a, b]$, então F é diferenciável em x_0 , e

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Prova: Como $f \in \mathcal{R}([a, b])$, $\sup_{t \in [a, b]} |f(t)| = M < \infty$. Se $a \leq x < y \leq b$, então

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq M(y - x),$$

e segue que F é Lipschitz contínua.

Agora, se f é contínua em x_0 , dado $\epsilon > 0$, escolha $\delta > 0$ tal que

$$t \in [a, b], |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Logo, se $x_0 - \delta < s \leq x_0 \leq t < x_0 + \delta$ e $a \leq s < t \leq b$ temos

$$\left| \frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{t - s} \int_s^t [f(u) - f(x_0)] du \right| < \epsilon.$$

Segue que $F'(x_0) = f(x_0)$. \square

Teorema 119 (O teorema fundamental do cálculo). *Se $f \in \mathcal{R}([a, b])$ e existe função diferenciável $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F' = f$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Prova: Dado $\epsilon > 0$ seja $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}([a, b])$ tal que $U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < \epsilon$. Do Teorema do Valor Médio

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i) \Delta x_i, \text{ para algum } t_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

para $i = 1, \dots, n$. Logo $\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i = F(b) - F(a)$ e

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx \right| < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário o resultado segue. \square

Teorema 120 (Integração por partes). *Se $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, são diferenciáveis, $F' = f, G' = g \in \mathcal{R}([a, b])$. Então*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

Prova: Faça $H(x) = F(x)G(x)$. $H' \in \mathcal{R}([a, b])$ como soma de produtos de funções em $\mathcal{R}([a, b])$. O resultado segue do teorema anterior a H . \square

17.7 Caracterização de Funções Riemann Integráveis

Definição 55. *Se $f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ defina $\omega^f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por $\omega^f(x) = \lim_{\nu \rightarrow 0} \omega_\nu^f(x)$, onde*

$$\omega_\nu^f(x) = \sup\{|f(s) - f(t)| : s, t \in [a, b] \cap (x - \nu, x + \nu)\}$$

Note que, para cada $x \in [a, b]$, $(0, \infty) \ni \nu \mapsto \omega_\nu^f(x) \in [0, \infty)$ é não-decrescente, logo $\omega^f(x)$ está bem definida para cada $x \in [a, b]$.

É claro que f é contínua em $p \in [a, b]$ se, e somente se, $\omega^f(p) = 0$.

De fato, $\omega^f(p) = 0$

- se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < \nu < \delta \Rightarrow \omega_\nu^f(p) < \epsilon$ ou
- se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < \nu < \delta \Rightarrow |f(s) - f(p)| < \epsilon$, para todo $s \in (p - \nu, p + \nu) \cap [a, b]$ ou
- se, e somente se, f é contínua em p .

Lema 9. O conjunto $E_\delta^f = \{x \in [a, b] : \omega^f(x) \geq \delta\}$ é compacto.

Prova: Seja $x \in \overline{E_\delta^f}$ e $E_\delta^f \ni x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Vamos mostrar que $x \in E_\delta^f$ para concluir que E_δ^f é fechado. Disto segue a compacidade.

Sabemos que $\omega^f(x_n) \geq \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e queremos concluir que $\omega^f(x) \geq \delta$.

Sejam $0 < \nu' < \nu$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n - \nu', x_n + \nu') \subset (x - \nu, x + \nu)$.

Então, $\delta \leq \omega^f(x_n) \leq \omega_{\nu'}^f(x_n) \leq \omega_\nu^f(x)$ e $\omega^f(x) = \lim_{\nu \rightarrow 0} \omega_\nu^f(x) \geq \delta$. \square

Lema 10. Seja $f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ e $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}([a, b])$. Se

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \text{ e}$$

$$\omega_i = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

então $\omega_i = M_i - m_i$, $1 \leq i \leq n$.

Prova: Para todo $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, $\omega_i \geq |f(x) - f(y)| \geq f(x) - f(y)$ e, portanto,

$$\omega_i \geq M_i - f(y), \quad \forall y \in [x_{i-1}, x_i]$$

Disto segue que $\omega_i \geq M_i - m_i$. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$ existem $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ tais que $M_i \leq f(x) + \frac{\epsilon}{2}$ e $m_i \geq f(y) - \frac{\epsilon}{2}$. Sendo assim,

$$M_i - m_i \leq f(x) - f(y) + \epsilon \leq \omega_i + \epsilon.$$

Disto segue que $M_i - m_i \leq \omega_i$ e temos a igualdade.

Teorema 121. Se $f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ e $\omega^f(x) < \epsilon$, para todo $x \in [a, b]$ então, existe $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}([a, b])$ tal que $\max_{1 \leq i \leq n} (M_i - m_i) < \epsilon$ onde $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ e $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

Prova: Note que, para cada $x \in [a, b]$ existe $\delta_x > 0$ tal que $\omega_{\delta_x}^f(x) < \epsilon$.

A cobertura $\{I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x) : x \in [a, b]\}$ de $[a, b]$ tem uma subcobertura finita I_{x_1}, \dots, I_{x_n} .

Os pontos a e b juntamente com os extremos dos intervalos I_{x_i} que pertencem a (a, b) formam a partição desejada. \square

Teorema 122. $\mathcal{R}([a, b]) = \{f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}) : m^*(E_\delta^f) = 0, \forall \delta > 0\}$

Prova: Primeiramente mostraremos que se $f \in \mathcal{R}([a, b])$ então $m^*(E_\delta^f) = 0, \forall \delta > 0$.

Se $f \in \mathcal{R}([a, b])$, $\delta > 0$ e $\epsilon > 0$, seja $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}([a, b])$ tal que

$$\sum_{i=1}^n [M_i - m_i](x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x_i - x_{i-1}) < \epsilon \delta.$$

Se $E_{\delta,i} := (x_{i-1}, x_i) \cap E_\delta^f \neq \emptyset$, então $\omega_i \geq \delta$.

De fato, se $x \in E_{\delta,i}$, $\omega^f(x) \geq \delta$ e existe $\nu > 0$ tal que $(x - \nu, x + \nu) \subset (x_{i-1}, x_i)$ e $\omega_\nu^f(x) \geq \omega^f(x) \geq \delta$ e portanto $\omega_i \geq \delta$.

Seja $I = \{i \in \{1, \dots, n\} : E_{\delta,i} \neq \emptyset\}$

$$\delta \sum_{i \in I} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i \in I} \omega_i(x_i - x_{i-1}) \leq \epsilon \delta$$

e, portanto, $\sum_{i \in I} (x_i - x_{i-1}) < \epsilon$.

Estes intervalos cobrem $E_\delta^f \setminus \mathcal{P}$, como \mathcal{P} é finito, $m^*(E_\delta^f) = 0$.

Agora, se $m^*(E_\delta^f) = 0, \forall \delta > 0$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\epsilon}{2(b-a)}$.

Seja $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{P}([a, b])$ tal que a soma dos comprimentos dos intervalos que intersectam E_δ^f é menor do que $\frac{\epsilon}{2(M-m)}$.

Os intervalos restantes podem ser subdivididos (teorema anterior) de modo a obter um refinamento $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\}$ de \mathcal{P}_0 tal que $\omega_i < \delta$ se $E_{\delta,i} = \emptyset$. Seja $I = \{i : E_{\delta,i} \neq \emptyset\}$ e $J = \{i : E_{\delta,i} = \emptyset\}$.

Assim $\sum_{i \in I} (x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{2(M-m)}$ e, se $i \in J$, $\omega_i < \delta = \frac{\epsilon}{2(b-a)}$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i \in I} \omega_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \in J} \omega_i(x_i - x_{i-1}) < \epsilon$$

e $f \in \mathcal{R}([a, b])$. \square

Teorema 123. Se $f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ seja $E_f = \{x \in [a, b] : f \text{ é descontínua em } x\}$. Então $\mathcal{R}([a, b]) = \{f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}) : m^*(E_f) = 0\}$.

Prova: Basta notar que $E_f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_{\frac{1}{n}}^f$ e usar o teorema anterior. \square

Corolário 36. Se $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ então $f.g \in \mathcal{R}([a, b])$ e se $f(x) \neq 0$, para todo $x \in [a, b]$, então $\frac{1}{f} \in \mathcal{R}([a, b])$.

Corolário 37. Se $f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ só tem descontinuidades de primeira espécie então E^f é enumerável e portanto f é integrável. Em particular, se $f \in \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$ é monótona então $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Prova: Se $\sigma_f(x) = \max\{|f(x) - f(x^+)|, |f(x) - f(x^-)|\}$,

$$E^f = \{x \in [a, b] : \sigma_f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{onde} \quad E_n^f = \{x \in [a, b] : \sigma_f(x) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Se $x \in E_n^f$ e $x \in (a, b)$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(t) - f(x^+)| < \frac{1}{4n}$ para todo $t \in (x, x + \delta)$ e $|f(t) - f(x^-)| < \frac{1}{4n}$ para todo $t \in (x - \delta, x)$.

Logo, $\forall t \in (x - \delta, x + \delta)$, $t \neq x$, $\sigma(t) \leq \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$. Como todos os pontos de E_n^f são isolados E_n^f é enumerável e E^f também é. \square

18 Seqüências e séries de funções

18.1 Convergência pontual de seqüências e séries

Definição 56 (Convergência pontual de seqüências e séries). *Seja $\{f_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, uma seqüência de funções definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em \mathbb{R} . Se $\{f_n(x)\}$ é convergente para todo $x \in D$, definimos a função limite da seqüência $\{f_n\}$*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in D.$$

Analogamente, se $\sum f_n(x)$ converge para todo $x \in D$ definimos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in D,$$

e a função f é chamada de soma da série $\sum f_n$.

O principal problema que surge no processo de passagem ao limite descrito na definição anterior é determinar se as propriedades importantes das funções são preservadas por passagem ao limite.

Por exemplo, se as funções f_n são contínuas, diferenciáveis ou integráveis, o mesmo vale para a função limite? Que relação há entre f'_n e f' ou entre as integrais de f_n e de f ?

Note que, f é contínua em um ponto de acumulação x de D se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \boxed{f(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(t)} = \lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$$

ou seja, se a ordem em que os processos de limite são executados é irrelevante.

Mostraremos agora, por meio de vários exemplos, que os processos limite não podem, em geral, ser intercambiados sem afetar o resultado.

Posteriormente, daremos condições para que a ordem em que as operações de limite são realizadas seja irrelevante.

Exemplo 45. *Considere a seqüência dupla. Para $m, n \in \mathbb{N}^*$ seja*

$$s_{m,n} = \frac{m}{m+n}.$$

Então, para n fixo, $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{m,n} = 1$, de forma que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} s_{m,n} = 1.$$

Por outro lado, para cada m fixo, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{m,n} = 0$ de forma que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} s_{m,n} = 0.$$

Exemplo 46. Seja

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \quad (x \text{ real}; n = 0, 1, 2, \dots),$$

e considere

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

Como $f_n(0) = 0$, temos $f(0) = 0$. Para $x \neq 0$, a série geométrica acima é convergente com soma $1+x^2$. Logo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ 1+x^2 & (x \neq 0) \end{cases}$$

de forma que a função soma de uma série de funções contínuas pode ser descontínua.

Exemplo 47. Para $m = 1, 2, 3, \dots$, faça

$$f_m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos m! \pi x)^{2n}$$

Quando $m!x$ é um inteiro, $f_m(x) = 1$. Para todos os demais valores de x , $f_m(x) = 0$. Agora seja

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x).$$

Para x irracional, $f_m(x) = 0$ para todo m ; portanto $f(x) = 0$. Para $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, p, q inteiros, $q \neq 0$, $m!x$ é inteiro se $m \geq q$, e $f(x) = 1$. Logo

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos m! \pi x)^{2n} = \begin{cases} 0 & (x \text{ irracional}), \\ 1 & (x \text{ racional}). \end{cases}$$

Desta forma, obtemos uma função descontínua em todos os pontos e que, portanto, não é Riemann-integrável.

Exemplo 48. *Seja*

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

e

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Então $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, e

$$f'_n(x) = \sqrt{n} \cos nx$$

de forma que $\{f'_n\}$ não converge para f' . Por exemplo,

$$f'_n(0) = \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

enquanto que $f'(0) = 0$.

Exemplo 49. *Seja*

$$f_n(x) = n^2 x (1 - x^2)^n, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para $0 < x \leq 1$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

Como $f_n(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{n^2}{2n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Se na definição de f_n trocarmos n^2 por n teremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2},$$

enquanto que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, 0 \leq x \leq 1$, e

$$\int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx = 0$$

Desta forma, o limite das integrais não precisa ser igual a integral do limite, mesmo que ambos sejam finitos.

Após esses exemplos, que mostram o que pode dar errado se os processos limite forem trocados sem cuidado, definimos agora um novo modo de convergência, mais forte do que a convergência pontual, que nos permitirá chegar a resultados positivos e interessantes.

18.2 Convergência uniforme de seqüências e séries

Definição 57 (Convergência uniforme de seqüências e séries). *Seja $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, uma seqüência de funções definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em \mathbb{R} . Dizemos que $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformemente para f em D se, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Dizemos que a série $\sum f_n(x)$ converge uniformemente em D se a seqüência $\{s_n\}$ de somas parciais definida por

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) = s_n(x)$$

converge uniformemente em D .

O critério de Cauchy para convergência uniforme é o seguinte.

Teorema 124 (Critério de Cauchy para convergência uniforme). *A seqüência de funções $\{f_n\}$, definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em \mathbb{R} , converge uniformemente em D se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq N$, $n \geq N$,*

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon \tag{22}$$

Prova: Suponha que $\{f_n\}$ convirja uniformemente em D e seja f a função limite. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$, implica

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, para todo $x \in D$ e $n, m \geq N$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \epsilon.$$

Ou seja

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Reciprocamente, suponha que a condição (22) vale. Logo, $\{f_n(x)\}$ converge, para todo x , para um limite que chamamos de $f(x)$.

Assim a seqüência $\{f_n\}$ converge em D , para f . Temos que provar que a convergência é uniforme.

Seja $\epsilon > 0$ dado e escolha $N \in \mathbb{N}$ para que (22) seja válida. Fixe n e faça $m \rightarrow \infty$ em (22). Como $f_m(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f(x)$ temos

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon, \quad \forall n \geq N \text{ e } \forall x \in D.$$

Isto completa a prova. \square

Para séries, existe um teste muito conveniente para convergência uniforme, devido a Weierstrass.

Teorema 125 (Teste M de Weierstrass). *Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em \mathbb{R} . Suponha que*

$$\sup_{x \in D} |f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $\sum M_n$ converge então $\sum f_n$ converge uniformemente em D .

A recíproca não vale.

Prova: Se $\sum M_n$ converge, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \sum_{i=n}^m f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n}^m M_i \leq \epsilon, \quad \forall x \in D, \quad \forall m, n \geq N.$$

A convergência uniforme agora segue do Critério de Cauchy para convergência uniforme. \square

A recíproca é, em geral, falsa pois, para $f_n(x) = \frac{x^2(1-x^2)^{n+2}}{\ln(n+3)}$, $0 \leq x \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, a série converge uniformemente e $M_n = \frac{(1+\frac{1}{n+2})^{-(n+2)}}{(n+3)\ln(n+3)}$, portanto $\sum M_n$ diverge.

18.3 Convergência uniforme e continuidade

Teorema 126 (1). *Suponha $f_n \rightarrow f$ uniformemente em um conjunto D e seja x um ponto de acumulação de D . Se*

$$\lim_{t \rightarrow x} f_n(t) = a_n \quad n \in \mathbb{N}$$

então $\{a_n\}$ é convergente, e

$$\lim_{t \rightarrow x} f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Dito de outra forma

$$\lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} f_n(t).$$

Prova: Dado $\epsilon > 0$, da convergência uniforme, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \epsilon, \quad \forall n, m \geq N, \forall t \in D$$

Fazendo $t \rightarrow x$

$$|a_n - a_m| \leq \epsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Logo $\{a_n\}$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, convergente, digamos para a .

Agora

$$|f(t) - a| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - a_n| + |a_n - a|.$$

Escolhemos n tal que (da convergência uniforme)

$$\sup_{t \in D} |f(t) - f_n(t)| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

e tal que $|a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{3}$. Para este n fixo escolhemos $\delta > 0$ tal que

$$|f_n(t) - a_n| \leq \frac{\epsilon}{3}, \quad t \in D, 0 < |t - x| < \delta.$$

Segue que

$$|f(t) - a| \leq \epsilon, \quad t \in D, 0 < |t - x| < \delta.$$

ou seja $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = a$. Isto mostra o resultado. \square

Teorema 127. *Se $\{f_n\}$ é uma seqüência de funções contínuas definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em \mathbb{R} e $f_n \rightarrow f$ uniformemente em D , então f é contínua em D .*

Este resultado muito importante e é um corolário imediato do Teorema anterior.

A recíproca é, em geral, falsa como pode ser visto no exemplo $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$, $0 \leq x \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Mas há um caso em que a recíproca é verdadeira.

Teorema 128. *Seja $K \subset \mathbb{R}$ um compacto. Se*

- (a) $\{f_n\}$ uma seqüência de funções contínuas em K ,
- (b) $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$, $\forall x \in K$ e f é contínua em K e
- (c) $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, $\forall x \in K$ e $\forall n \in \mathbb{N}$,

então $f_n \rightarrow f$ uniformemente em K .

Prova: Seja $g_n = f_n - f$. Então g_n é contínua, $g_n \rightarrow 0$ ponto a ponto e $g_n \geq g_{n+1}$. Provaremos que $g_n \rightarrow 0$ uniformemente em K .

Dado $\epsilon > 0$, seja $K_n = \{x \in K : g_n(x) \geq \epsilon\}$.

Como g_n é contínua, K_n é compacto. Como $g_n \geq g_{n+1}$, $K_n \supset K_{n+1}$.

Fixe $x \in K$. Como $g_n(x) \rightarrow 0$, $x \notin K_n$ para n suficientemente grande e portanto $x \notin \bigcap K_n$. Em outras palavras, $\bigcap K_n$ é vazia. Segue que K_N é vazio para algum N .

Disto segue que $0 \leq g_n(x) < \epsilon$ para todo $x \in K$ e para todo $n \geq N$. \square

Observe que a compacidade é realmente necessária aqui. Se

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1}, \quad x \in (0, 1), \quad n \in \mathbb{N},$$

então $f_n(x) \rightarrow 0$ monotonicamente em $(0, 1)$, mas a convergência não é uniforme.

Definição 58. *If $D \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{C}(D)$ denota o conjunto de todas as funções $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ que são contínuas e limitadas. A cada $f \in \mathcal{C}(D)$ associamos a sua norma do supremo*

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

Como f é limitada, $\|f\| < \infty$. É claro que $\|f\| = 0$ se, e somente se, $f(x) = 0$ para todo $x \in D$ e dadas $f, g \in \mathcal{C}(D)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|, \quad \forall x \in D \text{ e} \\ |\lambda f(x)| &= |\lambda| |f(x)| \leq |\lambda| \|f\|, \quad \forall x \in D. \end{aligned}$$

Portanto

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \quad \|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|.$$

Definimos a distância entre $f \in \mathcal{C}(D)$ e $g \in \mathcal{C}(D)$ por $\|f - g\|$.

Com esta noção de distância, dada uma seqüência $\{f_n\}$ em $\mathcal{C}(D)$ podemos definir as noções de convergência e de seqüências de Cauchy exatamente como antes.

Uma seqüência $\{f_n\}$ converge uniformemente para f se, e somente se, $\|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Teorema 129. *Com a noção de distância acima $\mathcal{C}(D)$ é um espaço métrico completo.*

Prova: Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{C}(D)$. Isto significa que dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\| < \epsilon$, $\forall m, n \geq N$.

Como vimos anteriormente, existe uma função contínua para a qual $\{f_n\}$ converge uniformemente. Além disso, f é limitada, pois existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x) - f_n(x)| < 1$, $\forall x \in D$, e f_n é limitada.

Assim $f \in \mathcal{C}(D)$ e $\|f - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ pois $f_n \rightarrow f$ uniformemente em D . \square

18.4 Convergência uniforme e integração

Teorema 130. *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ não-decrescente. Se $f_n \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$, $n \in \mathbb{N}$, e $f_n \rightarrow f$ uniformemente em $[a, b]$, então $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$, e*

$$\int_a^b f d\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n d\alpha$$

(A existência do limite é parte da conclusão.)

Prova: Faça

$$\epsilon_n = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|.$$

Então

$$f_n - \epsilon_n \leq f \leq f_n + \epsilon_n$$

e as integrais superior e inferior de f satisfazem

$$\int_a^b (f_n - \epsilon_n) d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha \leq \overline{\int_a^b f d\alpha} \leq \int_a^b (f_n + \epsilon_n) d\alpha.$$

Segue que

$$0 \leq \overline{\int_a^b f d\alpha} - \underline{\int_a^b f d\alpha} \leq 2\epsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

Como $\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, as integrais superiores e inferiores de f coincidem e $f \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$. Além disso

$$\left| \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f_n d\alpha \right| \leq \epsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

Isto implica o resultado. \square

Corolário 38. *Se $f_n \in \mathcal{R}(\alpha, [a, b])$ e*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

com a série convergindo uniformemente em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n d\alpha$$

Em outras palavras, a série pode ser integrada termo a termo.

19 Famílias equicontínuas de funções

Vimos que toda seqüência limitada de números reais contém uma subsequência convergente, e surge a questão de saber se algo semelhante é verdadeiro para seqüências de funções. Para tornar a questão mais precisa, definiremos dois tipos de limitação.

Definição 59. *Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções definidas em um conjunto D .*

Dizemos que $\{f_n\}$ é pontualmente limitada em D se $\{f_n(x)\}$ é limitada, $\forall x \in D$, ou seja, se existe função $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$|f_n(x)| \leq \phi(x), \quad x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

Dizemos que $\{f_n\}$ é uniformemente limitada em D se existe $M \geq 0$ tal que

$$|f_n(x)| \leq M, \quad x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 131 (1). *Se $\{f_n\}$ é uma seqüência pontualmente limitada de funções definidas em um conjunto contável D , então $\{f_n\}$ tem uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ tal que $\{f_{n_k}(x)\}$ converge para cada $x \in D$.*

Prova: Sejam $\{x_i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, os pontos de D , dispostos em seqüência. Como $\{f_n(x_1)\}$ é limitado, existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estritamente crescente e tal que $\{f_{\varphi_1(n)}(x_1)\}$ é convergente.

Consideremos agora as seqüências S_1, S_2, S_3, \dots , representadas por

$$\begin{array}{cccccc} S_1 : & f_{\varphi_1(1)} & f_{\varphi_1(2)} & f_{\varphi_1(3)} & f_{\varphi_1(4)} & \cdots \\ S_2 : & f_{\varphi_2(1)} & f_{\varphi_2(2)} & f_{\varphi_2(3)} & f_{\varphi_2(4)} & \cdots \\ S_3 : & f_{\varphi_3(1)} & f_{\varphi_3(2)} & f_{\varphi_3(3)} & f_{\varphi_3(4)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

e com as seguintes propriedades:

- (a) $\varphi_j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é estritamente crescente e $\varphi_{j+1}(\mathbb{N}) \subset \varphi_j(\mathbb{N})$

(b) $\{f_{\varphi_j(n)}(x_j)\}$ converge, $(\{f_n(x_j)\})$ limitada garante esta escolha).

Agora consideramos a seqüência diagonal

$$S : f_{\varphi_1(1)} \quad f_{\varphi_2(2)} \quad f_{\varphi_3(3)} \quad f_{\varphi_4(4)} \cdots$$

Por construção, a seqüência S (exceto possivelmente seus primeiros $n - 1$ termos) é uma subseqüência de S_n . Portanto, $\{f_{\varphi_n(n)}(x_i)\}$ converge, como $n \rightarrow \infty$, para cada $x_i \in D$. \square

Vimos que toda seqüência limitada de números reais contém uma subseqüência convergente, e surge a questão de saber se algo semelhante é verdadeiro para seqüências de funções. Para tornar a questão mais precisa, definiremos dois tipos de limitação.

Definição 60. *Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções definidas em um conjunto D .*

Dizemos que $\{f_n\}$ é pontualmente limitada em D se $\{f_n(x)\}$ é limitada, $\forall x \in D$, ou seja, se existe função $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$|f_n(x)| \leq \phi(x), \quad x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

Dizemos que $\{f_n\}$ é uniformemente limitada em D se existe $M \geq 0$ tal que

$$|f_n(x)| \leq M, \quad x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 132 (1). *Se $\{f_n\}$ é uma seqüência pontualmente limitada de funções definidas em um conjunto contável D , então $\{f_n\}$ tem uma subseqüência $\{f_{n_k}\}$ tal que $\{f_{n_k}(x)\}$ converge para cada $x \in D$.*

- Se $\{f_n\}$ é pontualmente limitada em D e $D_1 \subset D$ é contável, existe subseqüência $\{f_{n_k}\}$ tal que $\{f_{n_k}(x)\}$ converge, $\forall x \in D_1$.
- Mesmo que $\{f_n\}$ seja uma seqüência uniformemente limitada de funções contínuas em compacto D , não precisa existir uma subseqüência que convirja pontualmente em D .

- Consideraremos este fato no exemplo a seguir, que seria bastante problemático de provar com a matemática que temos em mãos até agora, faremos a prova utilizando um teorema que será demonstrado em outra disciplina.

Exemplo 50. *Seja*

$$f_n(x) = \sin nx, \quad x \in [0, 2\pi], n \in \mathbb{N}.$$

Suponha que exista uma seqüência $\{n_k\}$ tal que $\{\sin n_k x\}$ converge, para cada $x \in [0, 2\pi]$. Nesse caso devemos ter

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x) = 0, \quad x \in [0, 2\pi]$$

por isso

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 = 0, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (será visto em outra disciplina)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 dx = 0.$$

Mas, cálculos simples mostram que

$$\int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 dx = 2\pi$$

o que resulta numa contradição.

- A seqüência $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1]$, é convergente pontualmente mas não é uniformemente limitada. É fácil ver que **convergência uniforme** implica em **limitação uniforme**.
- Outra questão é se toda seqüência convergente contém uma subsequência uniformemente convergente.

- Nosso próximo exemplo mostra que isso não vale em geral, mesmo que a seqüência seja uniformemente limitada em um conjunto compacto.

Exemplo 51. *Seja*

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}, \quad x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}.$$

Então $|f_n(x)| \leq 1$, $\forall x \in [0, 1]$ e $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo $\{f_n\}$ é uniformemente limitada em $[0, 1]$. Além disso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

mas

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

e nenhuma subsequência pode convergir uniformemente em $[0, 1]$.

O conceito de equicontinuidade para uma família de funções é a chave para a consecução do nosso projeto.

Definição 61. *Uma família \mathcal{F} de funções definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em \mathbb{R} é dita equicontínua em D se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$x, y \in D, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

É claro que uma função pertencente a uma família equicontínua é uniformemente contínua. A seqüência anterior não é equicontínua (considere $\epsilon = \frac{1}{2}$, $x = 0$ e $y = \frac{1}{n}$).

Mostraremos que existe uma relação próxima entre equicontinuidade e convergência uniforme de seqüências de funções contínuas.

Teorema 133. *Se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto, $f_n \in \mathcal{C}(K)$ para $n \in \mathbb{N}$ e se $\{f_n\}$ converge uniformemente em K , então $\{f_n\}$ é equicontínua em K .*

Prova: Seja $\epsilon > 0$ dado. Como $\{f_n\}$ converge uniformemente, existe um inteiro N tal que

$$\|f_n - f_N\| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall n > N$$

Como funções contínuas são uniformemente contínuas em conjuntos compactos, existe um $\delta > 0$ tal que

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\epsilon}{3} < \epsilon, \quad x, y \in K, |x - y| < \delta \text{ e } 1 \leq i \leq N.$$

Se $n > N$ e $x, y \in K, |x - y| < \delta$, segue que

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_n(y)| < \epsilon.$$

Isto prova o teorema. \square

Teorema 134. *Se K é compacto e a seqüência $\{f_n\}$ em $\mathcal{C}(K)$ é pontualmente limitada e equicontínua em K , então*

(a) $\{f_n\}$ é uniformemente limitada em K ,

(b) $\{f_n\}$ tem uma subseqüência uniformemente convergente.

Prova: (a) Da equicontinuidade da seqüência $\{f_n\}$, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3} < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall x, y \in K, |x - y| < \delta.$$

Como K é compacto, sejam p_1, \dots, p_r em K tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^r V_\delta(p_i)$ onde, para $x \in K$, $V_\delta(x) = \{y \in K : |y - x| < \delta\}$.

Como $\{f_n\}$ é pontualmente limitada, existe $M_i < \infty$ tal que $|f_n(p_i)| < M_i, \forall n \in \mathbb{N}$.

Se $M = \max(M_1, \dots, M_r)$, então $|f_n(x)| < M + \epsilon, \forall x \in K$. Isso prova (a).

(b) Seja E um subconjunto denso contável de K . Do Teorema (1) $\{f_n\}$ tem uma subseqüência $\{f_{n_i}\}$ tal que $\{f_{n_i}(x)\}$ converge para cada $x \in E$.

Coloque $f_{n_i} = g_i$, para simplificar a notação. Vamos provar que $\{g_i\}$ converge uniformemente em K .

Da equicontinuidade, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que

$$|g_i(x) - g_i(y)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall i \in \mathbb{N} \text{ e } \forall x, y \in K, |x - y| < \delta.$$

Como E é denso em K e K é compacto, existem finitos pontos x_1, \dots, x_m em E tais que

$$K \subset V_\delta(x_1) \cup \dots \cup V_\delta(x_m)$$

Dado $\epsilon > 0$ escolha $\delta > 0$ como no início da prova. Se $x \in K$, $x \in V(x_\kappa, \delta)$ para algum κ , de modo que

$$|g_i(x) - g_i(x_\kappa)| < \frac{\epsilon}{3}$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Se $i, j \geq N$, segue que

$$\begin{aligned} |g_i(x) - g_j(x)| &\leq |g_i(x) - g_i(x_\kappa)| + |g_i(x_\kappa) - g_j(x_\kappa)| + |g_j(x_\kappa) - g_j(x)| \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Isso completa a prova. \square

Definição 62. *Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções definidas em um conjunto D .*

Dizemos que $\{f_n\}$ é pontualmente limitada em D se $\{f_n(x)\}$ é limitada, $\forall x \in D$, ou seja, se existe função $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$|f_n(x)| \leq \phi(x), \quad x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

Dizemos que $\{f_n\}$ é uniformemente limitada em D se existe $M \geq 0$ tal que

$$|f_n(x)| \leq M, \quad x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 135 (1). *Se $\{f_n\}$ é uma seqüência pontualmente limitada de funções definidas em um conjunto contável D , então $\{f_n\}$ tem uma subseqüência $\{f_{n_k}\}$ tal que $\{f_{n_k}(x)\}$ converge para cada $x \in D$.*

O conceito de equicontinuidade para uma família de funções é a chave para a consecução do projeto de mostrar que uma seqüência ‘limitada’ de funções (e alguma hipótese adicional) tem uma subseqüência ‘convergente’.

Definição 63. Uma família \mathcal{F} de funções definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em \mathbb{R} é dita equicontínua em D se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in D, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Teorema 136. Se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto, $f_n \in \mathcal{C}(K)$ para $n \in \mathbb{N}$ e se $\{f_n\}$ converge uniformemente em K , então $\{f_n\}$ é equicontínua em K .

Prova: Dado $\epsilon > 0$, da convergência uniforme de $\{f_n\}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f_N(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall n \geq N.$$

K compacto $\Rightarrow f_n$'s uniformemente contínuas e existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\epsilon}{3} < \epsilon, \quad x, y \in K, |x - y| < \delta \text{ e } \boxed{1 \leq i \leq N}.$$

Se $\boxed{n > N}$ e $x, y \in K, |x - y| < \delta$, segue que

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_n(y)| < \epsilon.$$

Isto prova o teorema. \square

Teorema 137. Se K é compacto e a seqüência $\{f_n\}$ em $\mathcal{C}(K)$ é pontualmente limitada e equicontínua em K , então

(a) $\{f_n\}$ é uniformemente limitada em K ,

(b) $\{f_n\}$ tem uma subseqüência uniformemente convergente.

Prova: (a) Como $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é equicontínua, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3} < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall x, y \in K, |x - y| < \delta.$$

Como K é compacto, sejam p_1, \dots, p_r em K tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^r V_\delta(p_i)$ onde, para $x \in K$, $V_\delta(x) = \{y \in K : |y - x| < \delta\}$.

Como $\{f_n\}$ é pontualmente limitada, existe $M_i < \infty$ tal que $|f_n(p_i)| < M_i, \forall n \in \mathbb{N}$.

Se $M = \max(M_1, \dots, M_r)$, então $|f_n(x)| < M + \epsilon, \forall x \in K$.

(b) Seja $E \subset \bar{E} = K$ contável. Do Teorema (1) $\{f_n\}$ tem uma subsequência $\{f_{n_i}\}$ tal que $\{f_{n_i}(x)\}$ converge para cada $x \in E$.

Provaremos que $\{g_i := f_{n_i}\}$ converge uniformemente em K . Da equicontinuidade, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que

$$|g_i(x) - g_i(y)| < \frac{\epsilon}{3}, \forall i \in \mathbb{N} \text{ e } \forall x, y \in K, |x - y| < \delta.$$

Como K é compacto e $\bar{E} = K$, existem x_1, \dots, x_m em E tais que

$$K \subset V_\delta(x_1) \cup \dots \cup V_\delta(x_m).$$

Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que, para $1 \leq \kappa \leq m$ e $i, j \geq N$, $|g_i(x_\kappa) - g_j(x_\kappa)| < \frac{\epsilon}{3}$. Se $x \in K$, $x \in V(x_\kappa, \delta)$, para algum $1 \leq \kappa \leq m$, e $|g_i(x) - g_i(x_\kappa)| < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Se $i, j \geq N$, segue que

$$|g_i(x) - g_j(x)| \leq |g_i(x) - g_i(x_\kappa)| + |g_i(x_\kappa) - g_j(x_\kappa)| + |g_j(x_\kappa) - g_j(x)| < \epsilon.$$

Segue que $\{g_i\}$ converge uniformemente. \square

20 O Teorema de Stone-Weierstrass

20.1 O Teorema de Aproximação de Weierstrass

Teorema 138 (de Aproximação de Weierstrass). *Dados $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ e $\epsilon > 0$, existe um polinômio $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|p - f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon$.*

Prova: Faremos a prova para $a = 0$ e $b = 1$. O caso geral será deixado como exercício ($[0, 1] \ni x \mapsto y = x(b - a) + a \in [a, b]$).

Seja $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ e os polinômios de Bernstein

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

associados a f . Note que se $f \equiv 1$, então

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1. \quad (23)$$

Derivando a identidade anterior, obtemos que

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}] \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} [k(1-x) - (n-k)x] \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} (k-nx) = 0. \end{aligned}$$

Multiplicando por $x(1-x)$ obtemos que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (k-nx) = 0.$$

Derivando novamente e multiplicando por $x(1-x)$ e usando (23)

$$-nx(1-x) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (k-nx)^2 = 0. \quad (24)$$

Dividindo esta última expressão por n^2 obtemos

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 = \frac{x(1-x)}{n}. \quad (25)$$

É claro que

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|.$$

Como f é uniformemente contínua em $[0, 1]$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|x - \frac{k}{n}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\frac{k}{n})| < \epsilon/2$.

Agora, para qualquer $x \in [0, 1]$ fixo, separamos a soma do lado direito em duas partes, denotadas por Σ e Σ' , onde

- Σ é a soma dos termos para os quais $|x - \frac{k}{n}| < \delta$ e
- Σ' é a soma dos termos remanescentes.

É claro que $\Sigma < \epsilon/2$. Provaremos que, para n suficientemente grande e independentemente de x , $\Sigma' < \epsilon/2$.

Como f é limitada existe $K > 0$ tal que $\sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \leq K$. Segue que

$$\Sigma' \leq 2K \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x - \frac{k}{n}| \geq \delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} =: 2K \Sigma''.$$

De (25) obtemos que

$$\frac{\delta^2}{2K} \Sigma' \leq \delta^2 \Sigma'' \leq \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Isto prova o resultado. \square

20.2 O Teorema de Stone-Weierstrass

Seja $X \subset \mathbb{R}$ um compacto e $C(X, \mathbb{R})$ os espaço das funções contínuas de X em \mathbb{R} com a norma usual, isto é,

$$\|f - g\| = \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Em $C(X, \mathbb{R})$ definimos a soma $f + g$ e multiplicação $f \cdot g$ de duas funções além da multiplicação af de um escalar a por uma função f de forma usual.

Um conjunto $A \subset C(X, \mathbb{R})$ é dito uma álgebra se $f, g \in A$, $a \in \mathbb{R}$ implica $f + g \in A$, $f \cdot g \in A$ e $af \in A$.

Exemplo 52. *O conjunto dos polinômios trigonométricos é uma álgebra em $C([a, b], \mathbb{R})$.*

Definição 64 (Álgebra gerada). *Se $E \subset C(X, \mathbb{R})$ a interseção de todas as álgebras contendo E é uma álgebra, denotada por $A(E)$, chamada álgebra gerada por E .*

Exemplo 53. O conjunto dos polinômios reais em uma variável real são a álgebra gerada por $\{1, x\}$.

Teorema 139. Se $A \subset C(X, \mathbb{R})$ é uma álgebra então

$$A^- = \{f \in C(X, \mathbb{R}) : f \text{ é limite uniforme de funções em } A\}$$

também é uma álgebra.

Prova: Se $f \in A^-$ and $g \in A^-$, existem seqüências $\{f_n\}, \{g_n\}$ em A tais $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f, g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ uniformemente em X . Segue que, para todo $c \in \mathbb{R}$

$$A \ni f_n + g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f + g, \quad A \ni f_n g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} fg, \quad A \ni cf_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} cf$$

uniformemente em K . Logo $f + g \in A^-, fg \in \mathcal{B}$, and $cf \in A^-$, e A^- é uma álgebra. \square

Teorema 140 (Stone-Weierstrass). *Seja $A \subset C(X, \mathbb{R})$ uma álgebra tal que $A = A^-, 1 \in A$ e se $x, y \in X, x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Então, $A = C(X, \mathbb{R})$.*

Se $\max_{x \in X} |f(x)| < M, \epsilon > 0, p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ for um polinômio (do Teorema de Aproximação de Weierstrass) tal que

$$||t| - p(t)| < \epsilon, \quad \forall t \in [-M, M],$$

e $p(f) = a_0 + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_n f^n$, então $p(f) \in A$ e

$$||f(x)| - p(f(x))| < \epsilon, \quad x \in X.$$

Segue do fato que A é fechada em $C(X, \mathbb{R})$ que $|f| \in A$.

A seguir mostremos que se $h, g \in A$ então $\max\{h, g\} \in A$ e $\min\{h, g\} \in A$. Isto segue do fato que

$$\min\{h, g\} = \frac{1}{2}(h + g) - \frac{1}{2}|h - g| \in A \quad \text{e}$$

$$\max\{h, g\} = \frac{1}{2}(h + g) + \frac{1}{2}|h - g| \in A.$$

Seja $x, y \in X$ com $x \neq y$ e $f \in C(X, \mathbb{R})$. A função constante g^x com valor $f(x)$ está em A (aqui usamos que $1 \in A$).

Seja $h^y \in A$ tal que $h^y(x) \neq h^y(y)$. Sem perda de generalidade assumimos $h^y(x) = 0$ (aqui usamos novamente que $1 \in A$).

Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$f_{xy} = g^x + ah^y \in A$$

satisfaz $f_{xy}(x) = f(x)$ e $f_{xy}(y) = f(y)$.

Seja $\epsilon > 0$, para cada $y \in X$ existe um intervalo aberto I_y tal que $y \in I_y$ e $f_{xy}(z) < f(z) + \epsilon, \forall z \in I_y$.

Como X é compacto temos que I_{y_1}, \dots, I_{y_n} cobrem X para alguma escolha de y_1, \dots, y_n . Seja

$$f_x = \min\{f_{xy_1}, \dots, f_{xy_n}\}.$$

Então $f_x \in A$, $f_x(x) = f(x)$ e $f_x(z) < f(z) + \epsilon, \forall z \in X$.

Agora, para $x \in X$, existe um intervalo aberto I_x tal que, $\forall z \in I_x$

$$f_x(z) > f(z) - \epsilon.$$

Como X é compacto, um número finito desses intervalos I_{x_1}, \dots, I_{x_n} cobrem X . Seja

$$F = \max\{f_{x_1}, \dots, f_{x_n}\}.$$

Então $F \in A$ e $\forall z \in X$,

$$|f(z) - F(z)| < \epsilon$$

o que prova o teorema. \square

21 Séries de potências

Agora consideraremos funções do tipo um particular tipo de série de funções. São as chamadas séries de potências que vimos brevemente quando tratamos do critério da raiz e são da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{ou}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n.$$

Sem perda de generalidade consideraremos o caso $a = 0$.

Proposição 19. *Sejam x_0, x_1 números reais não nulos.*

- *Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ for convergente, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ será absolutamente convergente, para cada $x \in (-|x_0|, |x_0|)$.*
- *Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ for divergente, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ será divergente, para cada x com $|x| > |x_1|$.*

Prova: Sabemos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_0^n$ é convergente e $x_0 \neq 0$. Logo

$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n x_0^n = 0$ e existe $M \geq 0$, tal que $|c_n x_0^n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Se $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ então

$$|c_n x^n| = |c_n x_0^n| \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n = M r^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

onde $r = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$. Do critério da comparação para séries de termos não-negativos, a série $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ é convergente $\forall x \in (-|x_0|, |x_0|)$.

Por outro lado, se $|x_2| > |x_1|$ a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_2^n$ não pode ser convergente pois isto implicaria a convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ que é divergente. \square

Disto segue que

Teorema 141. *Dada a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ uma, e somente uma, das situações abaixo ocorre:*

- *a série de potências converge somente em $x = 0$;*

- a série de potências converge absolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$;
- existe $R > 0$, tal que a série de potências é absolutamente convergente $\forall x \in (-R, R)$ e divergente para todo x com $|x| > R$.

No último caso nada podemos afirmar quando $x = R$ ou $x = -R$ e a análise terá que ser feita caso a caso como vimos anteriormente. Também neste caso, do critério da raiz, $\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$

Teorema 142. Se $R \in (0, \infty]$, é tal que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ é convergente, $\forall x \in (-R, R)$ e $f : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad \forall x \in (-R, R).$$

Então, para $r \in (0, R)$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ será uniformemente convergente em $[-r, r]$. A função f será diferenciável em $(-R, R)$ e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad \forall x \in (-R, R),$$

A função f será integrável em $[0, x] \subset (-R, R)$ e

$$\int_0^x f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}, \quad \forall x \in (-R, R).$$

Sendo assim, a série pode ser derivada e integrada, termo a termo.

Nas condições do teorema anterior a função f é de classe C^∞ isto é $f \in C^\infty((-R, R), \mathbb{R})$. E, para cada $k \in \mathbb{N}$, teremos

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n x^{n-k}, \quad \forall x \in (-R, R).$$

Em particular, para cada $k \in \mathbb{N}$, teremos

$$f^{(k)}(0) = k!c_k, \text{ ou seja } c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Logo, a série de potências que define f é a série de Taylor de f .

Existem funções $f \in C^\infty((-R, R), \mathbb{R})$, de modo que

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \text{ para } x \in \mathbb{R},$$

como por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{para cada } x \neq 0 \\ 0, & \text{para } x = 0 \end{cases}.$$

Verifica-se que $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e que

$$f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (26)$$

Exemplo 54. A série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$ e sua soma é e^x .

Por outro, a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ só converge para $x = 0$.

A série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ converge para $\frac{1}{1+x}$ se, e somente se, $x \in (-1, 1)$.

Integrando $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \log(1+x)$, $x \in (-1, 1]$

$$\text{e } \arctg(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Agora consideramos a seguinte questão. Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge em ambos os extremos, R e $-R$, do seu intervalo de convergência $(-R, R)$, podemos garantir que a convergência seja uniforme em $[-R, R]$? A resposta positiva é dada pelo

Teorema 143 (Abel). *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \in (0, \infty)$. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ converge, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente no intervalo $[0, R]$ e $\lim_{x \rightarrow R^-} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.*

A prova do Teorema de Abel usa o lema a seguir.

Lema 11. *Se $\{s_n\} = \{\alpha_1 + \dots + \alpha_n\}$ é limitada, isto é, $\sup\{|s_n| : n \in \mathbb{N}\} = K < \infty$, e $\{b_n\}$ é uma seqüência não-crescente de números não negativos então $|\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_p b_p| \leq K b_1, \forall p \in \mathbb{N}$.*

Prova:

$$\begin{aligned} |\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_p b_p| &= |s_1 b_1 + (s_2 - s_1) b_2 + \dots + (s_p - s_{p-1}) b_p| \\ &= |s_1(b_1 - b_2) + \dots + s_{p-1}(b_{p-1} - b_p) + s_p b_p| \\ &\leq K(b_1 - b_2 + \dots + b_{p-1} - b_p + b_p) = K b_1. \end{aligned}$$

Prova do Teorema de Abel: Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \rightarrow |a_{n+1} R^{n+1} + \dots + a_{n+p} R^{n+p}| < \epsilon, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Para $n > N$ e $\alpha_p = a_{n+p} R^{n+p}, p \in \mathbb{N}$. Os α_p satisfazem a hipótese do lema anterior, com $K = \epsilon$. Para todo $x \in [0, R]$, temos

$$|a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_{n+p} x^{n+p}| = |\alpha_1 \left(\frac{x}{R}\right) + \dots + \alpha_p \left(\frac{x}{R}\right)^p| \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

Do lema, com $b_p = \left(\frac{x}{R}\right)^p$, segue que, $\forall n > N$ e $\forall x \in [0, R]$,

$$|a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_{n+p} x^{n+p}| \leq \epsilon \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \leq \epsilon, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Isto prova que $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em $[0, R]$ e, como $a_n x^n$ é contínuo em $[0, R]$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é contínua em $[0, R]$. Logo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n =$

$$f(R) = \lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow R^-} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right). \square$$

Observações.

1. As mesmas conclusões do Teorema de Abel valem com $-R$ em lugar de R . Basta tomar a série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$.
2. A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente no seu intervalo de convergência $(-R, R)$ se, e só se, converge nos pontos R e $-R$.
3. A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ converge uniformemente em $[-1 + \delta, 1]$, para cada $\delta > 0$ mas não converge uniformemente em $(-1, 1]$.

22 Funções Analíticas

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é analítica se é C^∞ e, dado $x_0 \in I$, existe $R > 0$ tal que $V_R(x_0) = (x_0 - R, x_0 + R) \subset I$ e

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots, \quad \forall x \in V_R(x_0)$$

Assim, o valor de uma função analítica em cada ponto é dado pela sua série de Taylor.

Vimos que, toda função dada por uma série de potências é C^∞ e, se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, então $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, isto é, toda série de potências é uma série de Taylor.

Logo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, é analítica se, dado $x_0 \in I$, existem $R > 0$, com $(x_0 - R, x_0 + R) \subset I$, e uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Ou seja, o valor de f é dado pela soma de uma série de potências do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ em cada $x_0 \in I$.

Note que a série varia com o ponto x_0 (os coeficientes são dados em termos das derivadas $f^{(n)}(x_0)$). Mesmo que a função seja analítica em toda a reta, sua série de potências em torno de um ponto x_0 não precisa convergir em toda a reta.

Teorema 144. *A soma e o produto de funções analíticas $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função analítica em I .*

De fato, se dado $x_0 \in I$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, $|x - x_0| < r$ e $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ se $|x - x_0| < s$ e $t = \min\{r, s\}$, então $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x - x_0)^n$, e $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$, com $c_n = a_0b_n + \dots + a_nb_0$, se $|x - x_0| < t$ (Teorema (B)).

Uma das propriedades que distinguem as funções analíticas das funções C^∞ é dada pelo

Teorema 145. *Se uma função analítica $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se anula, juntamente com todas as suas derivadas, num ponto de I , então f é identicamente nula.*

Prova: Se A é o conjunto dos pontos de I nos quais f se anula juntamente com todas as suas derivadas. A é aberto. Agora consideremos o conjunto B , formado pelos pontos $x \in I$ para os quais $f(x)$ ou alguma derivada $f^{(n)}(x)$ é diferente de zero. Como as derivadas são contínuas B também é aberto de I . Como $I = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$. Como $A \neq \emptyset$ segue que $A = I$. \square

Corolário 39. *Sejam $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ analíticas. Se, para algum $x_0 \in I$, tem-se $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$. então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$.*

Lema 12. *Seja f uma função C^∞ num intervalo I . Seja $X \subset I$ um conjunto com um ponto de acumulação $x_0 \in I$. Se $f(x) = 0$ para todo $x \in X$, então $f^{(n)}(x_0) = 0$ para todo $n \geq 0$.*

Prova: Seja $\{x_n\}$ uma seqüência estritamente monótona de pontos de X , com $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Então $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$. Além disso, $f'(x_0) =$

$\lim \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = 0$. Pelo Teorema de Rolle, $\forall n \in \mathbb{N}$, existe y_n entre x_n e x_{n+1} , tal que $f'(y_n) = 0$.

Claramente $\{y_n\}$ é estritamente monótona e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$. Logo $f''(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(y_n) - f'(x_0)}{y_n - x_0} = 0$. Argumentando por indução podemos mostrar que todas as derivadas de f se anulam em x_0 . \square

Teorema 146. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $X \subset I$ um conjunto que tem um ponto de acumulação $x_0 \in I$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ analítica. Se $f(x) = 0$, $\forall x \in X$, então $f(x) = 0$, $\forall x \in I$.*

Corolário 40. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $X \subset I$ um conjunto que tem um ponto de acumulação $x_0 \in I$ e $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ analíticas. Se $f(x) = g(x)$, $\forall x \in X$, então $f(x) = g(x)$, $\forall x \in I$.*

Teorema 147. *Seja $f : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Para todo $x_0 \in (-R, R)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ se $|x - x_0| < R - |x_0|$.*

Prova: Se $|x - x_0| < R - |x_0|$ então $|x_0| + |x - x_0| < R$. Logo a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para $x = |x_0| + |x - x_0|$. isto é, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|x_0| + |x - x_0|)^n < +\infty$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} |x - x_0|^k < +\infty.$$

Logo

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{k \geq 0} a_n [x_0 + (x - x_0)]^n \\ &= \sum_{n \geq 0} a_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_0^{n-k} (x - x_0)^k \quad [\text{Teorema (A)}] \\ &= \sum_{k \geq 0} \left[\sum_{n \geq k} a_n \binom{n}{k} x_0^{n-k} \right] (x - x_0)^k = \sum_{k \geq 0} b_k (x - x_0)^k, \end{aligned}$$

Corolário 41. *Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ séries de potências convergentes no intervalo $(-R, R)$ e $X \subset (-R, R)$ um conjunto com um ponto de acumulação nesse intervalo. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ para todo $x \in X$ então $a_n = b_n$ para $n \in \mathbb{N}$.*

23 Apêndice

23.1 Seqüência dupla

Uma seqüência dupla (x_{nk}) é uma função $x : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par (n, k) de números naturais um número real x_{nk} .

$$\begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Consideremos as somas repetidas $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} \right)$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk} \right)$.

Mesmo quando ‘convergem’, elas podem dar diferentes resultados.

Por exemplo, somando primeiro as linhas no quadro abaixo, obtemos $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} \right) = 0$ enquanto se somarmos primeiro as colunas, teremos $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = 1$.

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \rightarrow 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & \cdots \rightarrow 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{8} & -\frac{7}{8} & 0 & \cdots \rightarrow 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{15}{16} & -\frac{15}{16} & \cdots \rightarrow 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \dots & \dots \end{array}$$

Surge o problema de obter condições que assegurem a igualdade das duas somas repetidas. Nosso primeiro resultado será o

Lema 13. Se $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f_n(j) = x_{n1} + \dots + x_{nj}$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em \mathbb{N} e $\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}$ converge, $\forall n \in \mathbb{N}$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk} \right)$$

Prova: Segue do fato que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lim_{j \rightarrow \infty} f_n(j) \right] = \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(j) \right] = \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^j x_{nk} \right] \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^j \sum_{n=1}^{\infty} x_{nk} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 148 (A). Dada $\{x_{nk}\}$, se $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk}| = a_n$ para cada n e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk} \right).$$

Esta afirmação implica, em particular, que todas as séries contidas na igualdade acima são convergentes.

Prova: Pondo $f_n(k) = x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nk}$, como no lema, temos $|f_n(k)| \leq a_n$ para todo k e todo n . Logo $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é uniformemente convergente em $k \in \mathbb{N}$ pelo Teste M de Weierstrass. O lema anterior implica o resultado. \square

23.2 Produto de Cauchy séries

A seguir definimos o produto de Cauchy de duas séries numéricas.

Definição 65. Dadas as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ o seu produto de Cauchy é a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ onde $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Observação 6. *Este produto é inspirado no produto de polinômios.*

O produto de séries convergentes pode não ser convergente. Basta considerar a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ (exercício).

Teorema 149 (B). *Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente com soma A ,*

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ é convergente com soma B , então o seu produto de Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$,

$\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, $n \in \mathbb{N}$, é convergente com soma AB .

Prova: Se $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$, $C_n = \sum_{k=0}^n c_k$ e $\beta_n = B_n - B$, $n \in \mathbb{N}$,

então $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$, $B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$ e $\beta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Queremos mostrar que $C_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} AB$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} C_n &= c_0 + c_1 + \cdots + c_n \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) \\ &= a_0(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) + a_1(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) \\ &\quad + \cdots + a_{n-1}(b_0 + b_1) + a_n b_0 \\ &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_{n-1} B_1 + a_n B_0 \\ &= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n(B + \beta_0) \\ &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)B + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0 \\ &= A_n B + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_{n-1} \beta_1 + a_n \beta_0. \end{aligned}$$

Se $\gamma_n = a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_{n-1} \beta_1 + a_n \beta_0$, $n \in \mathbb{N}$.

$$C_n = A_n B + \gamma_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

e o resultado estará provado se mostrarmos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$.

Como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente seja $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ é convergente, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $|\beta_n| = |B_n - B| < \varepsilon$ sempre que $n \geq N$.

Logo, para $n \geq N$,

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &= |(\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}) + (\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \cdots + \beta_n a_0)| \\ &\leq |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1}| |a_{n-N-1}| + \cdots + |\beta_n| |a_0| \\ &< |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon (|a_{n-N-1}| + \cdots + |a_0|) \\ &\leq |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon \alpha. \end{aligned}$$

logo $0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |\gamma_n| \leq \varepsilon \alpha$, para todo $\varepsilon > 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$, completando a demonstração. \square

23.3 Lema do Sol Nascente - Rising sun lemma

O lema do sol nascente é devido a Frigyes Riesz ([1]). O nome do lema vem de imaginar o gráfico da função g como uma paisagem montanhosa, com o sol brilhando horizontalmente da direita. O lema descreve o conjunto dos pontos de (a, b) que estão na sombra.

Lema 14 (Lema do Sol Nascente). *Seja $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e*

$$S = \{x \in [a, b] : \text{existe } y \in (x, b] \text{ com } g(y) > g(x)\}$$

Note que $b \notin S$ e a pode ou não estar em S . Defina $E = S \cap (a, b)$.

Então E é um conjunto aberto e pode ser escrito como uma união contável de intervalos disjuntos

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$$

com $g(a_k) = g(b_k)$, exceto se $a_{k_0} = a \in S$, para algum k_0 . Neste caso $g(a) < g(b_{k_0})$. Além disso, se $x \in (a_k, b_k)$, então $g(x) < g(b_k)$.

Prova: Note que, se $[c, d) \subset S$ e $d \notin S$ então $g(c) < g(d)$.

De fato, se $g(c) \geq g(d)$, $g(z) = \max\{g(x) : x \in [c, d]\}$ para algum $z \in [c, d)$. Como $z \in S$, existe $y \in (z, b]$ com $g(z) < g(y)$.

Claramente, $y \in (d, b]$ e $g(d) \leq g(z) < g(y)$. Isso implica que $d \in S$, o que é uma contradição.

Da continuidade de g , E é aberto, e portanto pode ser escrito, de maneira única, como união enumerável de intervalos abertos e disjuntos $\{(a_k, b_k) : k \in \mathbb{N}\}$.

Segue imediatamente da afirmativa anterior que $g(x) < g(b_k)$ para $x \in (a_k, b_k)$. Como g é contínua, também devemos ter $g(a_k) \leq g(b_k)$.

Se $a_k \neq a$ ou $a \notin S$, então $a_k \notin S$, então $g(a_k) \geq g(b_k)$. Assim, $g(a_k) = g(b_k)$ nesses casos. Por fim, se $a_k = a \in S$, a primeira parte da prova nos diz que $g(a) < g(b_k)$. \square

References

- [1] F. Riesz, Sur un Théorème de Maximum de Mm. Hardy et Littlewood
J. London Math. Soc. (1932) s1 - **7** (1): 10-13
- [2] Elon L. Lima, *Curso de Análise - Vol. 1*, Projeto Euclides-INPA 2007
- [3] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc. 1976.