Notas de Aula
SMA-0380 Análise
Revisão para a Terceira Prova
A Integral de Riemann-Stieltjes, Seqüências e Séries de Funções

Alexandre Nolasco de Carvalho

July 5, 2023

Contents

1 A integral de Riemann-Stieltjes

1.1 Introdução: A integral de Riemann

No que se segue, vamos apresentar a integral de Riemann.

Dados $a < b$, seja $\mathscr{B}([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ é limitada}\}$.

Definição 1. *Dizemos que $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ é uma partição de $[a,b]$ se*

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b. \tag{1}$$

Se $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\|\mathcal{P}\| := \sup\{\Delta x_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ será chamada de malha da partição $\mathcal{P}$.

Se $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$, $M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ e chamamos de **soma superior** e **inferior** da função f relativas à $\mathcal{P}$, às somas

$$U(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\, \Delta x_i, \qquad L(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \Delta x_i.$$

Note que

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$
- $L(\mathcal{P}, f) \leqslant U(\mathcal{P}, f)$ pois $m_i \leqslant M_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
- $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m \leqslant m_i \leqslant M_i \leqslant M$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
- $m(b-a) \leqslant L(\mathcal{P}, f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = U(\mathcal{P}, f) \leqslant M(b-a)$
- Os conjuntos $\left\{U(\mathcal{P}, f) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}_{[a,b]}\right\}$ e $\left\{L(\mathcal{P}, f) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}_{[a,b]}\right\}$ são limitados inferiormente e superiormente, respectivamente, onde $\mathscr{P}_{[a,b]} = \{\mathcal{P} : \mathcal{P} \text{ é partição de } [a,b]\}$.

Definimos a **integral superior de Riemann** de f em $[a,b]$ por

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}} U(\mathcal{P},f)$$

e a **integral inferior de Riemann** de f em $[a,b]$ por

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}} L(\mathcal{P},f)\,.$$

Dizemos que f é **Riemann integrável em** $[a,b]$ se

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x).$$

O valor comum acima é chamado **integral de Riemann** de f em $[a,b]$ e denotado por $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

$$\mathscr{R}([a,b]) = \{f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R}) : f \text{ Riemann integrável em } [a,b]\}.$$

Nem toda função limitada é Riemann integrável. De fato, seja $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{para} \quad x \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 1, & \text{para} \quad x \in \mathbb{I}\cap[0,1]. \end{cases} \tag{2}$$

É claro que f é limitada em $[0,1]$. Mostremos que f **não** é Riemann integrável em $[0,1]$.

De fato: Se $\mathcal{P} = \{0 = x_0, x_1, \cdots, x_n = 1\} \in \mathscr{P}_{[0,1]}$, como $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = 1$ e $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = 0$,

$$U(\mathcal{P},f) = \sum_{i=1}^n M_i\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 1,$$
$$L(\mathcal{P},f) = \sum_{i=1}^n m_i\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0\,\Delta x_i = 0.$$

Sendo assim,

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 1 \neq \underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0.$$

e f não é Riemann integrável em $[0,1]$.

1.2 Integral de Riemann-Stieltjes: Definição e caracterização

A seguir introduziremos a integral de Riemann-Stieltjes. Seja $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ não-decrescente. Claramente α é limitada em $[a,b]$.

Dada $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$, para $1 \leqslant i \leqslant n$, seja

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \geq 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

e, dada $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$, defina

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta\alpha_i,$$
$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta\alpha_i,$$

com $M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, como antes.

Note que

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \alpha(b) - \alpha(a)$$

e

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\alpha_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\alpha_i = U(\mathcal{P}, f, \alpha)$$
$$m\,[\alpha(b) - \alpha(a)] = \sum_{i=1}^{n} m\,\Delta\alpha_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\alpha_i = U(\mathcal{P}, f, \alpha)$$
$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\alpha_i \leqslant M\sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = M\,[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

onde $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, como antes.

Disto segue que os conjuntos

$$\{L(\mathcal{P}, f, \alpha)\,;\,\mathcal{P} \in \mathscr{P}_{[a,b]}\} \text{ e } \{U(\mathcal{P}, f, \alpha)\,;\,\mathcal{P} \in \mathscr{P}_{[a,b]}\}$$

são, respectivamente, limitado superiormente e inferiormente em $\mathbb{R}$. Logo definimos a integral superior e a integral inferior de Riemann-Stieltjes da função f em $[a, b]$, relativamente a α por

$$\overline{\int_a^b} f\, d\alpha = \inf_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}} U(\mathcal{P}, f, \alpha) \text{ e } \underline{\int_a^b} f\, d\alpha = \sup_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}} L(\mathcal{P}, f, \alpha)\,.$$

A função f é **Riemann-Stieltjes integrável em $[a, b]$, relativamente a α** se

$$\overline{\int_a^b} f\, d\alpha = \underline{\int_a^b} f\, d\alpha\,,$$

e o valor acima é chamado **integral de Riemann-Stieltjes de f em $[a, b]$, relativamente a função** α. e será denotado por

$$\int_a^b f\, d\alpha \text{ ou } \int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$$

Denote por $\mathscr{R}(\alpha, [a, b]) = \{f \in \mathscr{B}([a, b], \mathbb{R}) : f$ é Riemann-Stieltjes integrável $[a, b]$, relativamente a $\alpha\}$.

Se $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dada por $\alpha(x) = x$, $x \in [a, b]$ a integral de Riemann-Stieltjes, relativamente a α, coincide com a integral de Riemann, ou seja,

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f(x)dx$$

pois, neste caso, $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Note que $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ só precisa ser não-decrescente em $[a, b]$, para podermos definir a integral de Riemann-Stieltjes de funções $f \in \mathscr{B}([a, b], \mathbb{R})$ relativamente a α.

Vamos supor, daqui em diante, que

$$\alpha(b) > \alpha(a). \tag{3}$$

Caso contrário, a integral de Riemann-Stieltjes de f relativamente a α seria nula para toda $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$.

A seguir passaremos a investigar em que situações existe a integral de Riemann-Stieltjes, relativamente à função α, para uma função limitada, a valores reais, definida no intervalo $[a,b]$.

Definição 2 (Refinamento)**.** *Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{P}^* \in \mathscr{P}_{[a,b]}$, dizemos que a partição $\mathcal{P}^*$ é um* **refinamento da partição** *$\mathcal{P}$, se*

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^*,$$

ou seja, todo ponto de $\mathcal{P}$ é um ponto de $\mathcal{P}^*$.

Sejam $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathscr{P}_{[a,b]}$. Definimos

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2. \tag{4}$$

Então $\mathcal{P}^* \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ e $\mathcal{P}^*$ é um refinamento comum a $\mathcal{P}_1$ e a $\mathcal{P}_2$.

Proposição 1. *Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{P}^* \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ com $\mathcal{P}^* \supset \mathcal{P}$. Então,*

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leqslant L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \tag{5}$$

$$U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha)\,. \tag{6}$$

Prova: Se $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$ não há nada a fazer. Se $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{P}^*$, seja $x^* \in \mathcal{P}^* \setminus \mathcal{P}$. Considere, inicialmente, o caso

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \{x^*\}.$$

Logo, se $\mathcal{P}$ tem n elementos, $\mathcal{P}^*$ tem $n+1$ elementos e

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{a = x_0, x_1, \cdots, x_{i_0-1}, x_{i_0}, \cdots, x_n = b, \\ \mathcal{P}^* &= \{a = x_0, x_1, \cdots,\ x_{i_0-1},\ x^*, x_{i_0},\ \ \cdots, x_n \ \ = b\} \\ &= \{a = x^*_0, x^*_1, \cdots, x^*_{i_0-1}, x^*_{i_0}, x^*_{i_0+1}, \cdots, x^*_{n+1} = b\} \end{aligned}$$

Se $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ e $m^*_j = \inf\limits_{x \in [x^*_{j-1}, x^*_j]} f(x)$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$. $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$, $1 \leqslant i \leqslant n$ e $\Delta\alpha^*_j = \alpha(x^*_j) - \alpha(x^*_{j-1})$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$.

Assim,

$$L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{j=1}^{n+1} m_j^* \,\Delta\alpha_j^* - \sum_{i=1}^{n} m_i \,\Delta\alpha_i$$
$$= m_{i_0}^* \,\Delta\alpha_{i_0}^* + m_{i_0+1}^* \,\Delta\alpha_{i_0+1}^* - m_{i_0} \,\Delta\alpha_{i_0}$$
$$= m_{i_0}^* \,\Delta\alpha_{i_0}^* + m_{i_0+1}^* \,\Delta\alpha_{i_0+1}^* - m_{i_0} [\underbrace{\alpha(x_{i_0}) - \alpha(x^*)}_{\Delta\alpha_{i_0+1}^*} - \underbrace{\alpha(x^*) - \alpha(x_{i_0-1})}_{\Delta\alpha_{i_0}^*}]$$
$$= [m_{i_0}^* - m_{i_0}][\alpha(x^*) - \alpha(x_{i_0-1})] + [m_{i_0+1}^* - m_{i_0}][\alpha(x_{i_0}) - \alpha(x^*)] \geqslant 0$$

ou seja,

$$L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \geqslant 0.$$

O caso geral segue por indução. A desigualdade para a soma superior é obtida de maneira análoga (Exercício).□

Como consequência do resultado anterior temos

Teorema 1. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada em $[a, b]$. Então*

$$\underline{\int_a^b} f \, d\alpha \leqslant \overline{\int_a^b} f \, d\alpha \,. \tag{7}$$

Prova: Do resultado anteior, se $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ e $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$

$$L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) \leqslant L\,(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leqslant U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leqslant U(\mathcal{P}_2, f, \alpha).$$

e

$$\underline{\int_a^b} f \, d\alpha = \sup_{\mathcal{P}_1 \in \mathscr{P}} L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) \leqslant \inf_{\mathcal{P}_2 \in \mathscr{P}} U(\mathcal{P}_2, f, \alpha) = \overline{\int_a^b} f \, d\alpha$$

completando a prova.□

Corolário 1. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada em $[a, b]$.*

Então $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $\mathcal{P} \in \mathscr{P}$, tal que

$$0 \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon.$$

Prova: Note que, dado $\epsilon > 0$, se $\mathcal{P} \in \mathscr{P}$ é tal que a desigualdade acima está satisfeita,

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leqslant \sup_{\mathcal{P}' \in \mathscr{P}} L(\mathcal{P}', f, \alpha) = \underline{\int_a^b} f\, d\alpha$$

$$\leqslant \overline{\int_a^b} f\, d\alpha = \inf_{\mathcal{P}' \in \mathscr{P}} U(\mathcal{P}', f, \alpha) \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha)$$

e

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f\, d\alpha - \underline{\int_a^b} f\, d\alpha \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon.$$

Segue que $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$.

Por outro lado, se $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$,

$$\inf_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}} U(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sup_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}} L(\mathcal{P}, f, \alpha).$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, existem partições $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathscr{P}$ tais que

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) \leqslant U(\mathcal{P}_2, f, \alpha) < \overline{\int_a^b} f\, d\alpha + \frac{\epsilon}{2} = \int_a^b f\, d\alpha + \frac{\epsilon}{2},$$

e

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \geqslant L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) > \underline{\int_a^b} f\, d\alpha - \frac{\epsilon}{2} = \int_a^b f\, d\alpha - \frac{\epsilon}{2},$$

onde $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Ou seja $0 \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon.\square$

Teorema 2. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada e $\epsilon > 0$ dado*

- *1) Se existe $\mathcal{P} \in \mathscr{P}$ tal que $0 \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon$ então $0 \leqslant U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) < \epsilon$, para todo refinamento $\mathcal{P}^*$ de $\mathcal{P}$.*

- *2) Se existe $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\}$ tal que $0 \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon$ e, para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, dados $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, então*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)|\, \Delta\alpha_i < \epsilon\,. \tag{8}$$

e, se $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta\alpha_i - \int_a^b f\,d\alpha\right| < \epsilon. \tag{9}$$

Prova: 1) Seja $\mathcal{P} \in \mathscr{P}$ tal que $0 \leqslant U(\mathcal{P},f,\alpha) - L(\mathcal{P},f,\alpha) < \epsilon$ e $\mathcal{P}^*$ um refinamento de $\mathcal{P}$. O resultado segue de

$$L(\mathcal{P},f,\alpha) \leqslant L(\mathcal{P}^*,f,\alpha) \leqslant U(\mathcal{P}^*,f,\alpha) \leqslant U(\mathcal{P},f,\alpha).$$

2) Sabemos que, para cada $i \in \{1,2,\cdots,n\}$, se $s_i, t_i \in [x_{i-1},x_i]$ então $f\left(s_i\right), f\left(t_i\right) \in [m_i, M_i]$ e $|f\left(s_i\right) - f\left(t_i\right)| \leqslant M_i - m_i$ onde $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ e $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$. Portanto

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)|\,\Delta\alpha_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta\alpha_i = U(\mathcal{P},f,\alpha) - L(\mathcal{P},f,\alpha) < \epsilon$$

e o resultado segue.

Se $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$, dado $\epsilon > 0$, existe uma $\mathcal{P} \in \mathscr{P}([a,b])$ tal que

$$L(\mathcal{P},f,\alpha) \leqslant \int_a^b f\ d\alpha \leqslant U(\mathcal{P},f,\alpha) < L(\mathcal{P},f\,,\alpha) + \epsilon$$

Escolhendo $t_i \in [x_{i-1},x_i]$, $f(t_i) \in [m_i, M_i]$

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P},f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\alpha_i &\leqslant \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\alpha_i = U(\mathcal{P},f,\alpha) < L(\mathcal{P},f,\alpha) + \epsilon \end{aligned}$$

e o resultado segue.□

1.3 Classes de Funções Riemann-Stieltjes Integráveis

Teorema 3.

$$C([a,b]\,;\,\mathbb{R}) \subsetneq \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$$

Prova: Dado $\epsilon > 0$, escolhamos $\eta > 0$, de modo que

$$\eta = \frac{\epsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)}\,. \tag{10}$$

e, como f é uniformemente continua, seja $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $x, t \in [a, b]$, $|x - t| < \delta$ implica $|f(x) - f(t)| < \eta$.

Seja $\mathcal{P} = \{a = x_0, \cdots, x_n = b\}$ tal que $\|\mathcal{P}\| = \sup\{\Delta x_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} < \delta$.

Como f é contínua, podemos escolher $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tais que $m_i = f(t_i)$ e $M_i = f(s_i)$. Logo, $|t_i - s_i| \leqslant \Delta x_i < \delta$ e

$$|M_i - m_i| = |f(x_i) - f(t_i)| < \eta$$

e

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta\alpha_i < \eta \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \epsilon.$$

Segue que $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$.□

Teorema 4. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é monótona em $[a, b]$ e $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e não-decrescente. Então $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$.*

Prova: Dado $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, escolha uma partição $\mathcal{P}$ tal que

$$\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Isto é possível pois α satisfaz a propriedade do valor intermediário. Se f é não-decrescente (o outro caso é análogo). Então

$$M_i = f(x_i)\,, \quad m_i = f(x_{i-1}) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

e portanto

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \cdot [f(b) - f(a)] < \epsilon \end{aligned}$$

se n for suficientemente grande. Segue que, $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b])$.□

Teorema 5. *Se $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ possui somente um número finito de pontos de descontinuidade e $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função não-decrescente que é contínua nos pontos onde f é descontínua. Então $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b])$.*

Prova: Dado $\epsilon > 0$, se $M = \sup |f(x)|$ e $E = \{y_1, \cdots, y_k\}$ o conjunto (finito) das descontinuidades de f. Como α é contínua em todos os pontos de E, podemos cobrir E por intervalos disjuntos $[a,b] \supset [u_j, v_j] \ni y_j$, $1 \leqslant i \leqslant k$ tais que

$$\sum_{j=1}^{k} (\alpha(v_j) - \alpha(u_j)) < \epsilon.$$

Podemos escolher estes intervalos de modo que se $y_j \notin \{a,b\}$ então $y_j \in I_j = (u_j, v_j)$ (se $y_1 = a$ ($y_k = b$), $I_1 = [a, v_1)$ ($I_k = (u_k, b]$)).

O conjunto $K = [a,b] \backslash \bigcup_{j=1}^{k} (u_j, v_j)$ é compacto e f é uniformemente contínua em K. Seja $\delta > 0$ tal que $s, t \in K$, $|s - t| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \epsilon$.

Agora escolhemos uma partição $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$, da seguinte forma: $u_j, v_j \in \mathcal{P}$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Nenhum ponto de (u_j, v_j) pertence a $\mathcal{P}$. Se $x_{i-1} \neq u_j$, para todo $1 \leqslant j \leqslant k$, então $\Delta x_i < \delta$.

Note que $M_i - m_i \leqslant 2M$ para todo i e $M_i - m_i \leqslant \epsilon$ exceto quando x_{i-1} é algum dos u_j. Logo

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq [\alpha(b) - \alpha(a)]\epsilon + 2M\epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b])$.□

1.4 Propriedades

Teorema 6. *Se $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b])$, $f([a,b]) \subset [m, M]$ e $\phi : [m, M] \to \mathbb{R}$ é contínua então, $h = \phi \circ f \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b])$.*

Prova: Dado $\epsilon > 0$, como ϕ é uniformemente contínua em $[m, M]$, existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que $s, t \in [m, M]$, $|s - t| \leq \delta \Rightarrow |\phi(s) - \phi(t)| < \epsilon$.

Como $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$, existe $\mathcal{P}=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ tal que

$$U(\mathcal{P},f,\alpha)-L(\mathcal{P},f,\alpha)<\delta^2.$$

Se $r \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ e $M_i^r = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} r(x), m_i^r = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} r(x)$. Seja $A=\{i : 1 \leqslant i \leqslant n \text{ e } M_i^f - m_i^f < \delta\}$ e $B=\{i : 1 \leqslant i \leqslant n \text{ e } M_i^f - m_i^f \geqslant \delta\}$, então, para $i \in A$, a escolha de δ implica que $M_i^h - m_i^h \leqslant \epsilon$.

Para $i \in B$, $M_i^h - m_i^h \leqslant 2K$, onde $K=\sup_{t\in[m,M]}|\phi(t)|$. Logo, da escolha de $\mathcal{P}$,

$$\delta \sum_{i\in B} \Delta\alpha_i \leqslant \sum_{i\in B}\left(M_i^f - m_i^f\right)\Delta\alpha_i < \delta^2$$

e $\sum_{i\in B}\Delta\alpha_i < \delta < \epsilon$. Segue que

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P},h,\alpha)-L(\mathcal{P},h,\alpha) &= \sum_{i\in A}\left(M_i^h - m_i^h\right)\Delta\alpha_i + \sum_{i\in B}\left(M_i^h - m_i^h\right)\Delta\alpha_i \\ &\leqslant \epsilon[\alpha(b)-\alpha(a)] + 2K\delta < \epsilon[\alpha(b)-\alpha(a)+2K]. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário segue que $h \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$.□

Teorema 7. *(a) Se $f_1 \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$ e $f_2 \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$ então $f_1+f_2 \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$, $c\cdot f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$ para todo $c \in \mathbb{R}$, e*

$$\int_a^b (f_1+f_2)\,d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha,$$
$$\int_a^b cf d\alpha = c\int_a^b f d\alpha.$$

(b) Se $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ em $[a,b]$ então

$$\int_a^b f_1 d\alpha \leqslant \int_a^b f_2 d\alpha$$

(c) Se $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$ e $c \in (a,b)$ então $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,c]) \cap \mathscr{R}(\alpha,[c,b])$, e

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha$$

1. (d) *Se* $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$ *e if* $|f(x)| \leqslant M$ *então*

$$\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leqslant M[\alpha(b)-\alpha(a)].$$

(e) *Se* $f \in \mathscr{R}\left(\alpha_1,[a,b]\right)$ *e* $f \in \mathscr{R}\left(\alpha_2,[a,b]\right)$ *então* $f \in \mathscr{R}\left(\alpha_1+\alpha_2,[a,b]\right)$ *e*

$$\int_a^b f d\left(\alpha_1+\alpha_2\right)=\int_a^b f d\alpha_1+\int_a^b f d\alpha_2$$

se $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$ *e* $\mathbb{R} \ni c>0$ *então* $f \in \mathscr{R}(c\alpha,[a,b])$ *e*

$$\int_a^b f d(c\alpha)=c\int_a^b f d\alpha$$

Prova: Se $f=f_1+f_2$ e $\mathcal{P}$ é qualquer partição $[a,b]$, temos

$$\begin{aligned} & L\left(\mathcal{P}, f_1, \alpha\right)+L\left(\mathcal{P}, f_2, \alpha\right) \leqslant L(\mathcal{P}, f, \alpha) \\ & \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) \leqslant U\left(\mathcal{P}, f_1, \alpha\right)+U\left(\mathcal{P}, f_2, \alpha\right). \end{aligned}$$

Se $f_1 \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$ e $f_2 \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$ e $\epsilon>0$ existem $\mathcal{P}_j \in \mathscr{P}([a,b])$ $(j=1,2)$ tal que

$$U\left(\mathcal{P}, f_j, \alpha\right)-L\left(\mathcal{P}, f_j, \alpha\right) \leqslant U\left(\mathcal{P}_j, f_j, \alpha\right)-L\left(\mathcal{P}_j, f_j, \alpha\right)<\frac{\epsilon}{2},$$

onde $\mathcal{P}$ é refinamento comum a $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$. Logo

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha)-L(\mathcal{P}, f, \alpha)<\epsilon.$$

Segue que $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$.

Com esta mesma $\mathcal{P}$ remos

$$U\left(\mathcal{P}, f_J, \alpha\right)<\int_a^b f_j d\alpha+\epsilon \quad (j=1,2)$$

e

$$\int_a^b f d\alpha \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha)<\int_a^b f_1 d\alpha+\int_a^b f_2 d\alpha+2\epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário conluímos que

$$\int_a^b f d\alpha \leqslant \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha$$

Este mesmo resultado para $-f_1$ e $-f_2$, nos dá a desigualdade reversa e a igualdade está provada.

As provas das demais afirmativas são semelhantes (exercício). Na parte (c) a estratégia é considerar refinamentos que contém o ponto c, na aproximação da integral.$\square$

Teorema 8. *Se* $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b])$ *e* $g \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b])$ *então*

- (a) $fg \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b])$*;*
- (b) $|f| \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b])$ *e* $\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leqslant \int_a^b |f| d\alpha.$

Prova: Se $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b])$ e $\phi(t) = t^2$ então $\phi \circ f = f^2 \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b])$. A identidade

$$4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2$$

completa a prova de (a).

Se $\phi(t) = |t|$, $\phi \circ f = |f| \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b])$. Escolha $c = \pm 1$ tal que

$$c \int f d\alpha \geqslant 0$$

$$\left|\int f d\alpha\right| = c \int f d\alpha = \int c f d\alpha \leqslant \int |f| d\alpha$$

pois $cf \leq |f|$. Isto prova b).$\square$

Definição 3. *A função degrau unitário* I *é definida por*

$$I(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqslant 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

Teorema 9. *Se $a < s < b$, $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ é contínua em s, e $\alpha(x) = I(x-s)$, então*

$$\int_a^b f\, d\alpha = f(s)$$

Prova: Considere as partições $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, onde $x_0 = a$, e $x_1 = s < x_2 < x_3 = b$. Então

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) = M_2, \quad L(\mathcal{P}, f, \alpha) = m_2.$$

Como f é contínua em s, vemos M_2 e m_2 convergem para $f(s)$ quando $x_2 \to s$.$\square$

Teorema 10. *Se $c_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ é convergente, $\{s_n\}$ é uma seqüência de pontos distintos em (a,b),*

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I\left(x - s_n\right)$$

e f é contínua em $[a,b]$ então

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f\left(s_n\right).$$

Prova: Por comparação a série é convergente para cada x. Sua soma $\alpha(x)$ é claramente monótona, $\alpha(a) = 0$ e $\alpha(b) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Dado $\epsilon > 0$ escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{N+1}^{\infty} c_n < \epsilon$. Faça

$$\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n I\left(x - s_n\right), \quad \alpha_2(x) = \sum_{N+1}^{\infty} c_n I\left(x - s_n\right).$$

Dos teoremas anteriores

$$\int_a^b f d\alpha_1 = \sum_{i=1}^{N} c_n f\left(s_n\right)$$

Como $\alpha_2(b) - \alpha_2(a) = \sum_{N+1}^{\infty} c_n < \epsilon$

$$\left| \int_a^b f d\alpha_2 \right| \leqslant M\epsilon$$

onde $M = \sup |f(x)|$. Como $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, segue que

$$\left| \int_a^b f d\alpha - \sum_{i=1}^{N} c_n f\left(s_n\right) \right| \leqslant M\epsilon$$

Se fazemos $N \to \infty$, obtemos o resultado.$\square$

1.5 Mudança de variável

Teorema 11. *Sejam $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ não-decrescente e diferenciável com $\alpha' \in \mathscr{R}([a,b])$ e $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$. Então $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$ se, e só se, $f\alpha' \in \mathscr{R}([a,b])$. Neste caso*

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx.$$

Prova: Dado $\epsilon > 0$ existe $\mathcal{P} = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathscr{P}([a,b])$ tal que

$$U\left(\mathcal{P}, \alpha'\right) - L\left(\mathcal{P}, \alpha'\right) < \epsilon \qquad (\bullet)$$

Do Teorema do Valor Médio existe $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$\Delta\alpha_i = \alpha'\left(t_i\right)\Delta x_i, \ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Se $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ então

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\alpha'\left(s_i\right) - \alpha'\left(t_i\right)\right| \Delta x_i < \epsilon.$$

Seja $M = \sup |f(x)|$. Como

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(s_i\right)\Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(s_i\right)\alpha'\left(t_i\right)\Delta x_i$$

segue que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(s_i\right) \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f\left(s_i\right) \alpha'\left(s_i\right) \Delta x_i\right| \leqslant M\epsilon. \tag{$*$}$$

Em particular,

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(s_i\right) \Delta\alpha_i \leqslant U\left(\mathcal{P}, f\alpha'\right) + M\epsilon$$

para todas as escolhas $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, de modo que

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) \leqslant U\left(\mathcal{P}, f\alpha'\right) + M\epsilon.$$

O mesmo argumento nos leva de $(*)$ a

$$U\left(\mathcal{P}, f\alpha'\right) \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) + M\epsilon.$$

e portanto

$$\left|U(\mathcal{P}, f, \alpha) - U\left(\mathcal{P}, f\alpha'\right)\right| \leqslant M\epsilon. \tag{$\dagger$}$$

Agora note que $(\bullet)$ permanece válida de $\mathcal{P}$ for substituída por um refinamento. Logo $(\dagger)$ também permance válida. Concluímos que

$$\left|\overline{\int_a^b} f d\alpha - \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx\right| \leqslant M\epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx$$

para qualquer $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$. A igualdade para as integrais inferiores segue da mesma maneira de $(*)$. $\square$

Os dois teoremas anteriores ilustram a generalidade e a flexibilidade inerentes ao processo de integração de Stieltjes.

Se α é uma função degrau pura, a integral se reduz a uma série finita ou infinita.

Se α tem uma derivada integrável, a integral se reduz a uma integral de Riemann usual.

Isso torna possível, em muitos casos, estudar as integrais e séries simultaneamente.

Para ilustrar este ponto, considere um exemplo físico. O momento de inércia de um fio reto de comprimento unitário, em torno de um eixo que passa por uma extremidade, em ângulo reto com o fio, é

$$\int_0^1 x^2 dm \tag{‡}$$

onde $m(x)$ é a massa contida no intervalo $[0, x]$. Se o fio for considerado com densidade contínua ρ, ou seja, se $m'(x) = \rho(x)$, então (33) se transforma em

$$\int_0^1 x^2 \rho(x) dx$$

Por outro lado, se o fio for composto de massas m_i concentradas nos pontos x_i, (‡) torna-se

$$\sum_i x_i^2 m_i$$

Portanto (‡) contém o caso anterior e também o caso no qual m é contínua mas não é diferenciável em todos os pontos.

Teorema 12 (Mudança de variável)**.** *Sejam $\phi : [A, B] \to [a, b]$ contínua e bijetora com $\phi(A) = a$ e $\phi(B) = b$, α é não-decrescente, $\beta = \alpha \circ \phi$ e $g = f \circ \varphi$. Se $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ então $g \in \mathscr{R}(\beta, [A, B])$ e*

$$\int_A^B g d\beta = \int_a^b f d\alpha$$

Prova: Se $\mathcal{P} = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ e $\mathcal{Q} = \{y_0, \ldots, y_n\} \in \mathscr{P}_{[A,B]}$, com $x_i = \varphi(y_i)$. Todas as partições de $[A, B]$ são obtidas desta forma.

Como os valores de f em $[x_{i-1}, x_i]$ e de g em $[y_{i-1}, y_i]$ são os mesmos,

$$U(\mathcal{Q}, g, \beta) = U(\mathcal{P}, f, \alpha), \quad L(\mathcal{Q}, g, \beta) = L(\mathcal{P}, f, \alpha).$$

Como $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b]), \mathcal{P}$ pode ser escolhida de forma que ambas $U(\mathcal{P}, f, \alpha)$ e $L(\mathcal{P}, f, \alpha)$ estão próximas a $\displaystyle\int_a^b f d\alpha$.

Segue que $g \in \mathscr{R}(\beta, [A, B])$ e o resultado esta demonstrado.$\square$

Agora vamos considerar o seguinte caso especial. Tomamos $\alpha(x) = x$. Etão $\beta = \varphi$. Suponha que $\varphi' \in \mathscr{R}([A, B])$. Aplicando os dois resultados anteriores temos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_A^B f(\varphi(y))\varphi'(y)dy.$$

1.6 Teorema fundamental do cálculo e Integração por partes

A seguir mostraremos que a derivação e a integração, em algum sentido, são operações inversas.

Teorema 13. *Se $f \in \mathscr{R}([a, b])$. Para $a \leqslant x \leqslant b$, faça*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Então $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é Lipschitz contínua (portando diferenciável exceto em um conjunto com medida exterior nula) e, se f é contínua em $x_0 \in [a, b]$, então F é differenciável em x_0, e

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Prova: Como $f \in \mathscr{R}([a, b])$, $\sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t)| = M < \infty$. Se $a \leqslant x < y \leqslant b$, então

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leqslant M(y - x),$$

e segue que F é Lipschitz contínua.

Agora, se f é contínua em x_0, dado $\epsilon > 0$, escolha $\delta > 0$ tal que

$$t \in [a, b],\ |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Logo, se $x_0 - \delta < s \leqslant x_0 \leqslant t < x_0 + \delta$ e $a \leqslant s < t \leqslant b$ temos

$$\left| \frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{t - s} \int_s^t [f(u) - f(x_0)]\, du \right| < \epsilon.$$

Segue que $F'(x_0) = f(x_0)$.$\square$

Teorema 14 (O teorema fundamental do cálculo)**.** *Se* $f \in \mathscr{R}([a,b])$ *e existe função diferenciável* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *tal que* $F' = f$*, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Prova: Dado $\epsilon > 0$ seja $\mathcal{P} = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathscr{P}([a,b])$ tal que $U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < \epsilon$. Do Teorema do Valor Médio

$$F\left(x_i\right) - F\left(x_{i-1}\right) = f\left(t_i\right) \Delta x_i, \text{ para algum } t_i \in \left[x_{i-1}, x_i\right],$$

para $i = 1, \ldots, n$. Logo $\sum_{i=1}^n f\left(t_i\right) \Delta x_i = F(b) - F(a)$ e

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx \right| < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário o resultado segue.$\square$

Teorema 15 (Integração por partes)**.** *Se* $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$*, são diferenciáveis,* $F' = f, G' = g \in \mathscr{R}([a,b])$*. Então*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

Prova: Faça $H(x) = F(x)G(x)$. $H' \in \mathscr{R}([a,b])$ como soma de produtos de funções em $\mathscr{R}([a,b])$. O resultado segue do teorema anterior a H.$\square$

1.7 Caracterização de Funções Riemann Integráveis

Definição 4. *Se* $f \in \mathscr{B}([a,b], \mathbb{R})$ *defina* $\omega^f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *por* $\omega^f(x) = \lim\limits_{\nu \to 0} \omega^f_\nu(x)$*, onde*

$$\omega^f_\nu(x) = \sup\{|f(s) - f(t)| : s, t \in [a,b] \cap (x - \nu, s + \nu)\}$$

Note que, para cada $x \in [a,b]$, $(0, \infty) \ni \nu \mapsto \omega^f_\nu(x) \in [0, \infty)$ é não-decrescente, logo $\omega^f(x)$ está bem definida para cada $x \in [a,b]$.

É claro que f é contínua em $p \in [a,b]$ se, e somente se, $\omega^f(p) = 0$.

De fato, $\omega^f(p) = 0$

- se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < \nu < \delta \Rightarrow \omega_\nu^f(p) < \epsilon$ ou

- se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < \nu < \delta \Rightarrow |f(s) - f(p)| < \epsilon$, para todo $s \in (p-\nu, p+\nu) \cap [a,b]$ ou

- se, e somente se, f é contínua em p.

Lema 1. *O conjunto $E_\delta^f = \{x \in [a,b] : \omega^f(x) \geqslant \delta\}$ é compacto.*

Prova: Seja $x \in \overline{E_\delta^f}$ e $E_\delta^f \ni x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Vamos mostrar que $x \in E_\delta^f$ para concluir que E_δ^f é fechado. Disto segue a compacidade.

Sabemos que $\omega^f(x_n) \geq \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e queremos concluir que $\omega^f(x) \geq \delta$.

Sejam $0 < \nu' < \nu$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n - \nu', x_n + \nu') \subset (x - \nu, x + \nu)$.

Então, $\delta \leqslant \omega^f(x_n) \leqslant \omega_{\nu'}^f(x_n) \leqslant \omega_\nu^f(x)$ e $\omega^f(x) = \lim\limits_{\nu \to 0} w_\nu^f(x) \geqslant \delta$. $\square$

Lema 2. *Seja $f \in \mathscr{B}([a,b], \mathbb{R})$ e $\mathcal{P} = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \mathscr{P}([a,b])$. Se*

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},\ m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}\ e$$

$$\omega_i = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

então $\omega_i = M_i - m_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Prova: Para todo $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, $\omega_i \geqslant |f(x) - f(y)| \geqslant f(x) - f(y)$ e, portanto,

$$\omega_i \geqslant M_i - f(y),\ \forall\, y \in [x_{i-1}, x_i]$$

Disto segue que $\omega_i \geqslant M_i - m_i$. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$ existem $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ tais que $M_i \leq f(x) + \frac{\epsilon}{2}$ e $m_i \geqslant f(y) - \frac{\epsilon}{2}$. Sendo assim,

$$M_i - m_i \leqslant f(x) - f(y) + \epsilon \leqslant \omega_i + \epsilon.$$

Disto segue que $M_i - m_i \leqslant \omega_i$ e temos a igualdade.

Teorema 16. *Se $f \in \mathscr{B}([a,b], \mathbb{R})$ e $\omega^f(x) < \epsilon$, para todo $x \in [a,b]$ então, existe $\mathcal{P} = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \mathscr{P}([a,b])$ tal que $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(M_i - m_i) < \epsilon$ onde $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ e $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.*

Prova: Note que, para cada $x \in [a, b]$ existe $\delta_x > 0$ tal que $\omega^f_{\delta_x}(x) < \epsilon$.

A cobertura $\{I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x) : x \in [a, b]\}$ de $[a, b]$ tem uma subcobertura finita $I_{x_1}, \cdots, I_{x_n}$.

Os pontos a e b juntamente com os extremos dos intervalos I_{x_i} que pertencem a (a, b) formam a partição desejada.$\square$

Teorema 17. $\mathscr{R}([a, b]) = \{f \in \mathscr{B}([a, b], \mathbb{R}) : m^*(E^f_\delta) = 0, \forall \delta > 0\}$

Prova: Primeiramente mostraremos que se $f \in \mathscr{R}([a, b])$ então $m^*(E^f_\delta) = 0, \forall \delta > 0$.

Se $f \in \mathscr{R}([a, b])$, $\delta > 0$ e $\epsilon > 0$, seja $\mathcal{P} = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \mathscr{P}([a, b])$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} [M_i - m_i](x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\,(x_i - x_{i-1}) < \epsilon\delta.$$

Se $E_{\delta,i} := (x_{i-1}, x_i) \cap E^f_\delta \neq \varnothing$, então $\omega_i \geqslant \delta$.

De fato, se $x \in E_{\delta,i}$, $\omega^f(x) \geqslant \delta$ e existe $\nu > 0$ tal que $(x - \nu, x + \nu) \subset (x_{i-1}, x_i)$ e $\omega^f_\nu(x) \geqslant \omega^f(x) \geqslant \delta$ e portanto $\omega_i \geq \delta$.

Seja $I = \{i \in \{1, \cdots, n\} : E_{\delta,i} \neq \varnothing\}$

$$\delta \sum_{i \in I} (x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i \in I} \omega_i (x_i - x_{i-1}) \leqslant \epsilon\delta$$

e, portanto, $\sum_{i \in I} (x_i - x_{i-1}) < \epsilon$.

Estes intervalos cobrem $E^f_\delta \backslash \mathcal{P}$, como $\mathcal{P}$ é finito, $m^*\left(E^f_\delta\right) = 0$.

Agora, se $m^*\left(E^f_\delta\right) = 0$, $\forall \delta > 0$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\epsilon}{2(b-a)}$.

Seja $\mathcal{P}_0 \in \mathscr{P}([a, b])$ tal que a soma dos comprimentos dos intervalos que intersectam E^f_δ é menor do que $\frac{\epsilon}{2(M-m)}$.

Os intervalos restantes podem ser subdivididos (teorema anterior) de modo a obter um refinamento $\mathcal{P} = \{x_0, \cdots, x_n\}$ de $\mathcal{P}_0$ tal que $\omega_i < \delta$ se $E_{\delta,i} = \varnothing$. Seja $I = \{i : E_{\delta,i} \neq \varnothing\}$ e $J = \{i : E_{\delta,i} = \varnothing\}$.

Assim $\sum_{i \in I} (x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{2(M-m)}$ e, se $i \in J$, $\omega_i < \delta = \frac{\epsilon}{2(b-a)}$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i \in I} \omega_i (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \in J} \omega_i (x_i - x_{i-1}) < \epsilon$$

e $f \in \mathscr{R}([a, b])$.$\square$

Teorema 18. *Se* $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ *seja* $E_f = \{x \in [a,b] : f$ *é descontínua em* $x\}$. *Então* $\mathscr{R}([a,b]) = \{f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R}) : m^*(E_f) = 0\}$.

Prova: Basta notar que $E_f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E^f_{\frac{1}{n}}$ e usar o teorema anterior.□

Corolário 2. *Se* $f, g \in \mathscr{R}([a,b])$ *então* $f.g \in \mathscr{R}([a,b])$ *e se* $f(x) \neq 0$, *para todo* $x \in [a,b]$, *então* $\frac{1}{f} \in \mathscr{R}([a,b])$.

Corolário 3. *Se* $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ *só tem descontinuidades de primeira espécie então* E^f *é enumerável e portanto* f *é integrável. Em particular, se* $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ *é monótona então* $f \in \mathscr{R}([a,b])$.

Prova: Se $\sigma_f(x) = \max\{|f(x) - f(x^+)|, |f(x) - f(x^-)|\}$,

$$E^f = \{x \in [a,b] : \sigma_f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{onde} \quad E^f_n = \{x \in [a,b] : \sigma_f(x) \geqslant \frac{1}{n}\}.$$

Se $x \in E^f_n$ e $x \in (a,b)$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(t) - f(x^+)| < \frac{1}{4n}$ para todo $t \in (x, x+\delta)$ e $|f(t) - f(x^-)| < \frac{1}{4n}$ para todo $t \in (x-\delta, x)$.

Logo, $\forall t \in (x-\delta, x+\delta)$, $t \neq x$, $\sigma(t) \leqslant \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$. Como todos os pontos de E^f_n são isolados E^f_n é enumerável e E^f também é.□

2 Seqüências e séries de funções

2.1 Convergência pontual de seqüências e séries

Definição 5 (Convergência pontual de seqüências e séries)**.** *Seja* $\{f_n\}, n = 1, 2, 3, \ldots$, *uma seqüência de funções definidas em* $D \subset \mathbb{R}$ *e tomando valores em* $\mathbb{R}$. *Se* $\{f_n(x)\}$ *é convergente para todo* $x \in D$, *definimos a função limite da seqüência* $\{f_n\}$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in D.$$

Analogamente, se $\sum f_n(x)$ *converge para todo* $x \in D$ *definimos*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in D,$$

e a função f *é chamada de soma da série* $\sum f_n$.

O principal problema que surge no processo de passagem ao limite descrito na definição anterior é determinar se as propriedades importantes das funções são preservadas por passagem ao limite.

Por exemplo, se as funções f_n são contínuas, diferenciáveis ou integráveis, o mesmo vale para a função limite? Que relação há entre f_n' e f' ou entre as integrais de f_n e de f?

Note que, f é contínua em um ponto de acumulação x de D se

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \boxed{f(x) = \lim_{t\to x} f(t)} = \lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

ou seja, se a ordem em que os processos de limite são executados é irrelevante.

Mostraremos agora, por meio de vários exemplos, que os processos limite não podem, em geral, ser intercambiados sem afetar o resultado.

Posteriormente, daremos condições para que a ordem em que as operações de limite são realizadas seja irrelevante.

Exemplo 1. *Considere a seqüência dupla. Para* $m, n \in \mathbb{N}^*$ *seja*

$$s_{m,n} = \frac{m}{m+n}.$$

Então, para n fixo, $\lim_{m\to\infty} s_{m,n} = 1$, *de forma que*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} s_{m,n} = 1.$$

Por outro lado, para cada m fixo, $\lim_{n\to\infty} s_{m,n} = 0$ *de forma que*

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} s_{m,n} = 0.$$

Exemplo 2. *Seja*

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \quad (x \text{ real; } n = 0, 1, 2, \ldots),$$

e considere

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

Como $f_n(0) = 0$, temos $f(0) = 0$. Para $x \neq 0$, a série geométrica acima é convergente com soma $1 + x^2$. Logo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ 1 + x^2 & (x \neq 0) \end{cases}$$

de forma que a função soma de uma série de funções contínuas pode ser descontínua.

Exemplo 3. *Para* $m = 1, 2, 3, \ldots$, *faça*

$$f_m(x) = \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$$

Quando $m!x$ *é um inteiro,* $f_m(x) = 1$. *Para todos os demais valores de* x, $f_m(x) = 0$. *Agora seja*

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x).$$

Para x irracional, $f_m(x) = 0$ para todo m; portanto $f(x) = 0$. Para $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, p, q inteiros, $q \neq 0$, $m!x$ é inteiro se $m \geqslant q$, e $f(x) = 1$. Logo

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n} = \begin{cases} 0 & (x \text{ irrational }), \\ 1 & (x \text{ rational }). \end{cases}$$

Desta forma, obtemos uma função descontínua em todos os pontos e que, portanto, não é Riemann-integrável.

Exemplo 4. *Seja*

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*,$$

e

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Então $f'(x) = 0$*,* $\forall x \in \mathbb{R}$*, e*

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$$

de forma que $\{f_n'\}$ *não converge para* f'*. Por exemplo,*

$$f_n'(0) = \sqrt{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

enquanto que $f'(0) = 0$*.*

Exemplo 5. *Seja*

$$f_n(x) = n^2 x \left(1 - x^2\right)^n, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

Para $0 < x \leqslant 1$*, temos*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Como $f_n(0) = 0$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*,*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{n^2}{2n+2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Se na definição de f_n trocarmos n^2 por n teremos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2},$$

enquanto que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, e

$$\int_0^1 \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx = 0$$

Desta forma, o limite das integrais não precisa ser igual a integral do limite, mesmo que ambos sejam finitos.

Após esses exemplos, que mostram o que pode dar errado se os processos limite forem trocados sem cuidado, definimos agora um novo modo de convergência, mais forte do que a convergência pontual, que nos permitirá chegar a resultados positivos e interessantes.

2.2 Convergência uniforme de seqüências e séries

Definição 6 (Convergência uniforme de seqüências e séries)**.** *Seja* $\{f_n\}, n \in \mathbb{N}$*, uma seqüência de funções definidas em* $D \subset \mathbb{R}$ *e tomando valores em* $\mathbb{R}$*. Dizemos que* $\{f_n\}$*,* $n \in \mathbb{N}$*, converge uniformemente para* f *em* D *se, dado* $\epsilon > 0$*, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon, \quad \forall n \geqslant N.$$

Dizemos que a série $\sum f_n(x)$ *converge uniformemente em* D *se a seqüência* $\{s_n\}$ *de somas parciais definida por*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = s_n(x)$$

converge uniformemente em D*.*

O critério de Cauchy para convergência uniforme é o seguinte.

Teorema 19 (Critério de Cauchy para convergência uniforme)**.** *A seqüência de funções* $\{f_n\}$*, definidas em* $D \subset \mathbb{R}$ *e tomando valores em* $\mathbb{R}$*, converge uniformemente em* D *se, e somente se, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $m \geqslant N$*,* $n \geqslant N$*,*

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \epsilon \tag{11}$$

Prova: Suponha que $\{f_n\}$ convirja uniformemente em D e seja f a função limite. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N$, implica

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, para todo $x \in D$ e $n, m \geqslant N$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leqslant \epsilon.$$

Ou seja

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \epsilon, \ \forall n, m \geqslant N.$$

Reciprocamente, suponha que a condição (11) vale. Logo, $\{f_n(x)\}$ converge, para todo x, para um limite que chamamos de $f(x)$.

Assim a seqüência $\{f_n\}$ converge em D, para f. Temos que provar que a convergência é uniforme.

Seja $\epsilon > 0$ dado e escolha $N \in \mathbb{N}$ para que (11) seja válida. Fixe n e faça $m \to \infty$ em (11). Como $f_m(x) \stackrel{m \to \infty}{\longrightarrow} f(x)$ temos

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon, \forall n \geq N \text{ e } \forall x \in D.$$

Isto completa a prova.$\square$

Para séries, existe um teste muito conveniente para convergência uniforme, devido a Weierstrass.

Teorema 20 (Teste M de Weierstrass). *Seja $\{f_n\}$uma sequência de funções definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$. Suponha que*

$$\sup_{x \in D} |f_n(x)| \leqslant M_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $\sum M_n$ converge então $\sum f_n$ converge uniformemente em D.

A recíproca não vale.

Prova: Se $\sum M_n$ converge, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \sum_{i=n}^{m} f_i(x) \right| \leqslant \sum_{i=n}^{m} M_i \leqslant \epsilon, \ \forall x \in D, \ \forall m, n \geqslant N.$$

A convergência uniforme agora segue do Critério de Cauchy para convergência uniforme.$\square$

A recíproca é, em geral, falsa pois, para $f_n(x) = \frac{x^2\left(1-x^2\right)^{n+2}}{\ln(n+3)}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, a série converge uniformemente e $M_n = \frac{(1+\frac{1}{n+2})^{-(n+2)}}{(n+3)\ln(n+3)}$, portanto $\sum M_n$ diverge.

2.3 Convergência uniforme e continuidade

Teorema 21 (1)**.** *Suponha* $f_n \to f$ *uniformemente em um conjunto* D *e seja* x *um ponto de acumulação de* D*. Se*

$$\lim_{t\to x} f_n(t) = a_n \ n \in \mathbb{N}$$

então $\{a_n\}$ *é convergente, e*

$$\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Dito de outra forma

$$\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t).$$

Prova: Dado $\epsilon > 0$, da convergência uniforme, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leqslant \epsilon,\ \forall n, m \geqslant N, \forall t \in D$$

Fazendo $t \to x$

$$|a_n - a_m| \leqslant \epsilon,\ \forall n, m \geqslant N.$$

Logo $\{a_n\}$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, convergente, digamos para a.

Agora

$$|f(t) - a| \leqslant |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - a_n| + |a_n - a|\,.$$

Escolhemos n tal que (da convergência uniforme)

$$\sup_{t\in D} |f(t) - f_n(t)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}$$

e tal que $|a_n - a| \leqslant \frac{\epsilon}{3}$. Para este n fixo escolhemos $\delta > 0$ tal que

$$|f_n(t) - a_n| \leqslant \frac{\epsilon}{3},\ t \in D, 0 < |t - x| < \delta.$$

Segue que

$$|f(t) - a| \leqslant \epsilon,\ t \in D,\ 0 < |t - x| < \delta.$$

ou seja $\lim_{t\to x} f(t) = a$. Isto mostra o resultado.□

Teorema 22. *Se $\{f_n\}$ é uma seqüência de funções contínuas definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$ e $f_n \to f$ uniformemente em D, então f é contínua em D.*

Este resultado muito importante e é um corolário imediato do Teorema anterior.

A recíproca é, em geral, falsa como pode ser visto no exemplo $f_n(x) = n^2 x \left(1 - x^2\right)^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Mas há um caso em que a recíproca é verdadeira.

Teorema 23. *Seja $K \subset \mathbb{R}$ um compacto. Se*

(a) $\{f_n\}$ uma sequência de funções contínuas em K,

(b) $f_n(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$, $\forall x \in K$ e f é contínua em K e

(c) $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$, $\forall x \in K$ e $\forall n \in \mathbb{N}$,

então $f_n \to f$ uniformemente em K.

Prova: Seja $g_n = f_n - f$. Então g_n é contínua, $g_n \to 0$ ponto a ponto e $g_n \geqslant g_{n+1}$. Provaremos que $g_n \to 0$ uniformemente em K.

Dado $\epsilon > 0$, seja $K_n = \{x \in K : g_n(x) \geqslant \epsilon\}$.

Como g_n é contínua, K_n é compacto. Como $g_n \geqslant g_{n+1}$, $K_n \supset K_{n+1}$.

Fixe $x \in K$. Como $g_n(x) \to 0$, $x \notin K_n$ para n suficientemente grande e portanto $x \notin \bigcap K_n$. Em outras palavras, $\bigcap K_n$ é vazia. Segue que K_N é vazio para algum N.

Disto segue que $0 \leqslant g_n(x) < \epsilon$ para todo $x \in K$ e para todo $n \geqslant N$.$\square$

Observe que a compacidade é realmente necessária aqui. Se

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1}, \; x \in (0,1), \; n \in \mathbb{N},$$

então $f_n(x) \to 0$ monotonicamente em $(0,1)$, mas a convergência não é uniforme.

Definição 7. *If* $D \subset \mathbb{R}$, $\mathscr{C}(D)$ *denota o conjunto de todas as funções* $f : D \to \mathbb{R}$ *que são contínuas e limitadas. A cada* $f \in \mathscr{C}(D)$ *associamos a sua norma do supremo*

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

Como f é limitada, $\|f\| < \infty$. É claro que $\|f\| = 0$ se, e somente se, $f(x) = 0$ para todo $x \in D$ e dadas $f, g \in \mathscr{C}(D)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\| + \|g\|, \ \forall x \in D \text{ e} \\ &|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leqslant |\lambda|\|f\|, \ \forall x \in D. \end{aligned}$$

Portanto

$$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|, \ \|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|.$$

Definimos a distância entre $f \in \mathscr{C}(D)$ e $g \in \mathscr{C}(D)$ por $\|f - g\|$.

Com esta noção de distância, dada uma seqüência$\{f_n\}$ em $\mathscr{C}(D)$ podemos definir as noções de convergência e de seqüências de Cauchy exatamente como antes.

Uma seqüência $\{f_n\}$ converge uniformemente para f se, e somente se, $\|f_n - f\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Teorema 24. *Com a noção de distância acima* $\mathscr{C}(D)$ *é um espaço métrico completo.*

Prova: Seja $\{f_n\}$ uma sequência de Cauchy em $\mathscr{C}(D)$. Isto significa que dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\| < \epsilon$, $\forall m, n \geqslant N$.

Como vimos anteriormente, existe uma função contínua para a qual $\{f_n\}$ converge uniformemente. Além disso, f é limitada, pois existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x) - f_n(x)| < 1$, $\forall x \in D$, e f_n é limitada.

Assim $f \in \mathscr{C}(D)$ e $\|f - f_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pois $f_n \to f$ uniformemente em D.$\square$

2.4 Convergência uniforme e integração

Teorema 25. *Seja* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *não-decrescente. Se* $f_n \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b])$, $n \in \mathbb{N}$, *e* $f_n \to f$ *uniformemente em* $[a,b]$, *então* $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b])$, *e*

$$\int_a^b f d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n d\alpha$$

(*A existência do limite é parte da conclusão.*)

Prova: Faça

$$\epsilon_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| .$$

Então

$$f_n - \epsilon_n \leqslant f \leqslant f_n + \epsilon_n$$

e as integrais superior e inferior de f satisfazem

$$\int_a^b (f_n - \epsilon_n)\, d\alpha \leqslant \underline{\int_a^b} f d\alpha \leqslant \overline{\int_a^b} f d\alpha \leqslant \int_a^b (f_n + \epsilon_n)\, d\alpha.$$

Segue que

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f d\alpha - \underline{\int_a^b} f d\alpha \leqslant 2\epsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

Como $\epsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, as integrais superiores e inferiores de f coinciden e $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a.b])$. Além disso

$$\left| \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f_n d\alpha \right| \leqslant \epsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

Isto implica o resultado.$\square$

Corolário 4. *Se* $f_n \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b]$ *e*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

com a série convergindo uniformemente em $[a,b]$, *então*

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n d\alpha$$

Em outras palavras, a série pode ser integrada termo a termo.

3 Famílias equicontínuas de funções

Vimos que toda seqüência limitada de números reais contém uma subseqüência convergente, e surge a questão de saber se algo semelhante é verdadeiro para seqüências de funções. Para tornar a questão mais precisa, definiremos dois tipos de limitação.

Definição 8. *Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções definidas em um conjunto D.*

Dizemos que $\{f_n\}$ é pontualmente limitada em D se $\{f_n(x)\}$ é limitada, $\forall x \in D$, ou seja, se existe função $\phi : D \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f_n(x)| \leqslant \phi(x), \quad x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

Dizemos que $\{f_n\}$ é uniformemente limitada em D se existe $M \geqslant 0$ tal que

$$|f_n(x)| \leqslant M, \quad x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 26 (1)**.** *Se $\{f_n\}$ é uma seqüência pontualmente limitada de funções definidas em um conjunto contável D, então $\{f_n\}$ tem uma subseqüência $\{f_{n_k}\}$ tal que $\{f_{n_k}(x)\}$ converge para cada $x \in D$.*

Prova: Sejam $\{x_i\}, i = 1, 2, 3, \ldots$, os pontos de D, dispostos em seqüência. Como $\{f_n(x_1)\}$ é limitado, existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente e tal que $\left\{f_{\varphi_1(n)}(x_1)\right\}$ é convergente.

Consideremos agora as seqüências $S_1, S_2, S_3, \ldots$, representadas por

$$\begin{array}{cccccc}
S_1 : & f_{\varphi_1(1)} & f_{\varphi_1(2)} & f_{\varphi_1(3)} & f_{\varphi_1(4)} & \cdots \\
S_2 : & f_{\varphi_2(1)} & f_{\varphi_2(2)} & f_{\varphi_2(3)} & f_{\varphi_2(4)} & \cdots \\
S_3 : & f_{\varphi_3(1)} & f_{\varphi_3(2)} & f_{\varphi_3(3)} & f_{\varphi_3(4)} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

e com as seguintes propriedades:

(a) $\varphi_j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é estritamente crescente e $\varphi_{j+1}(\mathbb{N}) \subset \varphi_j(\mathbb{N})$

(b) $\left\{f_{\varphi_j(n)}\left(x_j\right)\right\}$ converge, ($\{f_n\left(x_j\right)\}$ limitada garante esta escolha).

Agora consideramos a seqüência diagonal

$$S : f_{\varphi_1(1)} \quad f_{\varphi_2(2)} \quad f_{\varphi_3(3)} \quad f_{\varphi_4(4)} \cdots .$$

Por construção, a seqüência S (exceto possivelmente seus primeiros $n-1$ termos) é uma subseqüência de S_n. Portanto, $\left\{f_{\phi_n(n)}\left(x_i\right)\right\}$ converge, como $n \to \infty$, para cada $x_i \in D$.$\square$

Vimos que toda seqüência limitada de números reais contém uma subseqüência convergente, e surge a questão de saber se algo semelhante é verdadeiro para seqüências de funções. Para tornar a questão mais precisa, definiremos dois tipos de limitação.

Definição 9. *Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções definidas em um conjunto D.*

Dizemos que $\{f_n\}$ é pontualmente limitada em D se $\{f_n(x)\}$ é limitada, $\forall x \in D$, ou seja, se existe função $\phi : D \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f_n(x)| \leqslant \phi(x), \quad x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

Dizemos que $\{f_n\}$ é uniformemente limitada em D se existe $M \geqslant 0$ tal que

$$|f_n(x)| \leqslant M, \quad x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 27 (1)**.** *Se $\{f_n\}$ é uma seqüência pontualmente limitada de funções definidas em um conjunto contável D, então $\{f_n\}$ tem uma subseqüência $\{f_{n_k}\}$ tal que $\{f_{n_k}(x)\}$ converge para cada $x \in D$.*

- Se $\{f_n\}$ é pontualmente limitada em D e $D_1 \subset D$ é contável, existe subseqüência $\{f_{n_k}\}$ tal que $\{f_{n_k}(x)\}$ converge, $\forall x \in D_1$.

- Mesmo que $\{f_n\}$ seja uma seqüência uniformemente limitada de funções contínuas em compacto D, não precisa existir uma subseqüência que convirja pontualmente em D.

- Consideraremos este fato no exemplo a seguir, que seria bastante problemático de provar com a matemática que que temos em mãos até agora, faremos a prova utilizando um teorema que será demonstrado em outra disciplina.

Exemplo 6. *Seja*

$$f_n(x) = \sin nx, \quad x \in [0, 2\pi], n \in \mathbb{N}.$$

Suponha que exista uma seqüência $\{n_k\}$ tal que $\{\sin n_k x\}$ converge, para cada $x \in [0, 2\pi]$. Nesse caso devemos ter

$$\lim_{k\to\infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x) = 0, \quad x \in [0, 2\pi]$$

por isso

$$\lim_{k\to\infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 = 0, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (será visto em outra disciplina)

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 \, dx = 0.$$

Mas, cálculos simples mostram que

$$\int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 \, dx = 2\pi$$

o que resulta numa contradição.

- A seqüência $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$, $x \in [0, 1]$, é convergente pontualmente mas não é uniformemente limitada. É fácil ver que **convergência uniforme** implica em **limitação uniforme**.

- Outra questão é se toda seqüência convergente contém uma subseqüência uniformemente convergente.

- Nosso próximo exemplo mostra que isso não vale em geral, mesmo que a seqüência seja uniformemente limitada em um conjunto compacto.

Exemplo 7. *Seja*

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}, \quad x \in [0,1], n \in \mathbb{N}.$$

Então $|f_n(x)| \leqslant 1$, $\forall x \in [0,1]$ e $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo $\{f_n\}$ é uniformemente limitada em $[0,1]$. Além disso

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad x \in [0,1].$$

mas

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

e nenhuma subseqüência pode convergir uniformemente em $[0,1]$.

O conceito de equicontinuidade para uma família de funções é a chave para a consecução do nosso projeto.

Definição 10. *Uma família $\mathscr{F}$ de funções definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$ é dita equicontínua em D se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$x, y \in D, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon, \ \forall f \in \mathscr{F}.$$

É claro que uma função pertencente a uma família equicontínua é uniformemente contínua. A seqüência anterior não é equicontínua (considere $\epsilon = \frac{1}{2}$, $x = 0$ e $y = \frac{1}{n}$).

Mostraremos que existe uma relação próxima entre equicontinuidade e convergência uniforme de seqüências de funções contínuas.

Teorema 28. *Se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto, $f_n \in \mathscr{C}(K)$ para $n \in \mathbb{N}$ e se $\{f_n\}$ converge uniformemente em K, então $\{f_n\}$ é equicontínua em K.*

Prova: Seja $\epsilon > 0$ dado. Como $\{f_n\}$ converge uniformemente, existe um inteiro N tal que

$$\|f_n - f_N\| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall n > N$$

Como funções contínuas são uniformemente contínuas em conjuntos compactos, existe um $\delta > 0$ tal que

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\epsilon}{3} < \epsilon, \quad x, y \in K, |x - y| < \delta \text{ e } 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Se $n > N$ e $x, y \in K, |x - y| < \delta$, segue que

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_n(y)| < \epsilon.$$

Isto prova o teorema.□

Teorema 29. *Se K é compacto e a seqüência $\{f_n\}$ em $\mathscr{C}(K)$ é pontualmente limitada e equicontínua em K, então*

(a) $\{f_n\}$ é uniformemente limitada em K,

(b) $\{f_n\}$ tem uma subseqüência uniformemente convergente.

Prova: (a) Da equicontinuidade da seqüência $\{f_n\}$, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3} < \epsilon, \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \ \forall x, y \in K, |x - y| < \delta.$$

Como K é compacto, sejam $p_1, \ldots, p_r$ em K tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^{r} V_\delta(p_i)$ onde, para $x \in K$, $V_\delta(x) = \{y \in K : |y - x| < \delta\}$.

Como $\{f_n\}$ é pontualmente limitada, existe $M_i < \infty$ tal que $|f_n(p_i)| < M_i$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se $M = \max(M_1, \ldots, M_r)$, então $|f_n(x)| < M + \epsilon$, $\forall x \in K$. Isso prova (a).

(b) Seja E um subconjunto denso contável de K. Do Teorema (1) $\{f_n\}$ tem uma subseqüência $\{f_{n_i}\}$ tal que $\{f_{n_i}(x)\}$ converge para cada $x \in E$.

Coloque $f_{n_i} = g_i$, para simplificar a notação. Vamos provar que $\{g_i\}$ converge uniformemente em K.

Da equicontinuidade, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que

$$|g_i(x) - g_i(y)| < \frac{\epsilon}{3}, \ \forall i \in \mathbb{N} \text{ e } \ \forall x, y \in K, |x - y| < \delta.$$

Como E é denso em K e K é compacto, existem finitos pontos $x_1, \ldots, x_m$ em E tais que

$$K \subset V_\delta(x_1) \cup \cdots \cup V_\delta(x_m)$$

Dado $\epsilon > 0$ escolha $\delta > 0$ como no início da prova. Se $x \in K$, $x \in V(x_\kappa, \delta)$ para algum κ, de modo que

$$|g_i(x) - g_i(x_\kappa)| < \frac{\epsilon}{3}$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Se $i, j \geqslant N$, segue que

$$\begin{aligned} |g_i(x) - g_j(x)| &\leqslant |g_i(x) - g_i(x_\kappa)| + |g_i(x_\kappa) - g_j(x_\kappa)| + |g_j(x_\kappa) - g_j(x)| \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Isso completa a prova.□

Definição 11. *Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções definidas em um conjunto D.*

Dizemos que $\{f_n\}$ é pontualmente limitada em D se $\{f_n(x)\}$ é limitada, $\forall x \in D$, ou seja, se existe função $\phi : D \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f_n(x)| \leqslant \phi(x), \quad x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

Dizemos que $\{f_n\}$ é uniformemente limitada em D se existe $M \geqslant 0$ tal que

$$|f_n(x)| \leqslant M, \quad x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 30 (1)**.** *Se $\{f_n\}$ é uma seqüência pontualmente limitada de funções definidas em um conjunto contável D, então $\{f_n\}$ tem uma subseqüência $\{f_{n_k}\}$ tal que $\{f_{n_k}(x)\}$ converge para cada $x \in D$.*

O conceito de equicontinuidade para uma família de funções é a chave para a consecução do projeto de mostrar que uma seqüência 'limitada' de funções (e alguma hipótese adicional) tem uma subseqüência 'convergente'.

Definição 12. *Uma família* $\mathscr{F}$ *de funções definidas em* $D \subset \mathbb{R}$ *e tomando valores em* $\mathbb{R}$ *é dita equicontínua em* D *se, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$x, y \in D, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon, \ \forall f \in \mathscr{F}.$$

Teorema 31. *Se* $K \subset \mathbb{R}$ *é compacto,* $f_n \in \mathscr{C}(K)$ *para* $n \in \mathbb{N}$ *e se* $\{f_n\}$ *converge uniformemente em* K*, então* $\{f_n\}$ *é equicontínua em* K*.*

Prova: Dado $\epsilon > 0$, da convergência uniforme de $\{f_n\}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f_N(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall n \geqslant N.$$

K compacto $\Rightarrow$ f_n's uniformemente contínuas e existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\epsilon}{3} < \epsilon, \quad x, y \in K, |x - y| < \delta \text{ e } \boxed{1 \leqslant i \leqslant N}.$$

Se $\boxed{n > N}$ e $x, y \in K, |x - y| < \delta$, segue que

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_n(y)| < \epsilon.$$

Isto prova o teorema.$\square$

Teorema 32. *Se* K *é compacto e a seqüência* $\{f_n\}$ *em* $\mathscr{C}(K)$ *é pontualmente limitada e equicontínua em* K*, então*

(a) $\{f_n\}$ *é uniformemente limitada em* K*,*

(b) $\{f_n\}$ *tem uma subseqüência uniformemente convergente.*

Prova: (a) Como $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é equicontínua, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3} < \epsilon, \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \ \forall x, y \in K, |x - y| < \delta.$$

Como K é compacto, sejam $p_1, \ldots, p_r$ em K tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^{r} V_\delta(p_i)$ onde, para $x \in K$, $V_\delta(x) = \{y \in K : |y - x| < \delta\}$.

Como $\{f_n\}$ é pontualmente limitada, existe $M_i < \infty$ tal que $|f_n(p_i)| < M_i$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se $M = \max(M_1, \ldots, M_r)$, então $|f_n(x)| < M + \epsilon$, $\forall x \in K$.

(b) Seja $E \subset \bar{E} = K$ contável. Do Teorema (1) $\{f_n\}$ tem uma subseqüência $\{f_{n_i}\}$ tal que $\{f_{n_i}(x)\}$ converge para cada $x \in E$.

Provaremos que $\{g_i := f_{n_i}\}$ converge uniformemente em K. Da equicontinuidade, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que

$$|g_i(x) - g_i(y)| < \frac{\epsilon}{3}, \ \forall i \in \mathbb{N} \text{ e } \ \forall x, y \in K, |x - y| < \delta.$$

Como K é compacto e $\bar{E} = K$, existem $x_1, \ldots, x_m$ em E tais que

$$K \subset V_\delta(x_1) \cup \cdots \cup V_\delta(x_m).$$

Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que, para $1 \leqslant \kappa \leqslant m$ e $i, j \geqslant N$, $|g_i(x_\kappa) - g_j(x_\kappa)| < \frac{\epsilon}{3}$. Se $x \in K$, $x \in V(x_\kappa, \delta)$, para algum $1 \leqslant \kappa \leqslant m$, e $|g_i(x) - g_i(x_\kappa)| < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Se $i, j \geqslant N$, segue que

$$|g_i(x) - g_j(x)| \leqslant |g_i(x) - g_i(x_\kappa)| + |g_i(x_\kappa) - g_j(x_\kappa)| + |g_j(x_\kappa) - g_j(x)| < \epsilon.$$

Segue que $\{g_i\}$ converge uniformemente.□

4 O Teorema de Stone-Weierstrass

4.1 O Teorema de Aproximação de Weierstrass

Teorema 33 (de Aproximação de Weierstrass)**.** *Dados* $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ *e* $\epsilon > 0$, *existe um polinômio* $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ *tal que* $\|p - f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon$.

Prova: Faremos a prova para $a = 0$ e $b = 1$. O caso geral será deixado como exercício ($[0,1] \ni x \mapsto y = x(b-a) + a \in [a,b]$).

Seja $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ e os polinômios de Bernstein

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

associados a f. Note que se $f \equiv 1$, então

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1. \tag{12}$$

Derivando a identidade anterior, obtemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} &[kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}[k(1-x) - (n-k)x] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k - nx) = 0.\end{aligned}$$

Multiplicando por $x(1-x)$ obtemos que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}(k - nx) = 0.$$

Derivando novamente e multiplicando por $x(1-x)$ e usando (12)

$$-nx(1-x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}(k - nx)^2 = 0. \tag{13}$$

Dividindo esta última expressão por n^2 obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}(x - \frac{k}{n})^2 = \frac{x(1-x)}{n}. \tag{14}$$

É claro que

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|.$$

Como f é uniformemente contínua em $[0,1]$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|x - \frac{k}{n}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\frac{k}{n})| < \epsilon/2$.

Agora, para qualquer $x \in [0,1]$ fixo, separamos a soma do lado direito em duas partes, denotadas por Σ e Σ', onde

- Σ é a soma dos termos para os quais $|x - \frac{k}{n}| < \delta$ e
- Σ' é a soma dos termos remanescentes.

É claro que $\Sigma < \epsilon/2$. Provaremos que, para n suficientemente grande e independentemente de x, $\Sigma' < \epsilon/2$.

Como f é limitada existe $K > 0$ tal que $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| \leqslant K$. Segue que

$$\sum{}' \leqslant 2K \sum_{\substack{1\leqslant k \leq n \\ |x-\frac{k}{n}|\geqslant \delta}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} =: 2K\sum{}''.$$

De (14) obtemos que

$$\frac{\delta^2}{2K}\sum{}' \leqslant \delta^2\sum{}'' \leqslant \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Isto prova o resultado. $\square$

4.2 O Teorema de Stone-Weierstrass

Seja $X \subset \mathbb{R}$ um compacto e $C(X,\mathbb{R})$ os espaço das funções contínuas de X em $\mathbb{R}$ com a norma usual, isto é,

$$\|f - g\| = \max_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

Em $C(X,\mathbb{R})$ definimos a soma $f + g$ e multiplicação $f \cdot g$ de duas funções além da multiplicação af de um escalar a por uma função f de forma usual.

Um conjunto $A \subset C(X,\mathbb{R})$ é dito uma álgebra se $f, g \in A$, $a \in \mathbb{R}$ implica $f + g \in A$, $f \cdot g \in A$ e $af \in A$.

Exemplo 8. *O conjunto dos polinômios trigonométricos é uma álgebra em* $C([a,b],\mathbb{R})$.

Definição 13 (Álgebra gerada)**.** *Se* $E \subset C(X,\mathbb{R})$ *a interseção de todas as álgebras contendo* E *é uma álgebra, denotada por* $A(E)$*, chamada álgebra gerada por* E.

Exemplo 9. *O conjunto dos polinômios reais em uma variável real são a álgebra gerada por* $\{1, x\}$.

Teorema 34. *Se* $A \subset C(X, \mathbb{R})$ *é uma álgebra então*

$$A^- = \{f \in C(X, \mathbb{R}) : f \textit{ é limite uniforme de funções em } A\}$$

também é uma álgebra.

Prova: Se $f \in A^-$ and $g \in A^-$, existem seqüências $\{f_n\}, \{g_n\}$ em A tais $f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f, g_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ uniformemente em X. Segue que, para todo $c \in \mathbb{R}$

$$A \ni f_n + g_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f + g, \quad A \ni f_n\, g_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} fg, \quad A \ni cf_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} cf$$

uniformemente em K. Logo $f + g \in A^-$, $fg \in \mathscr{B}$, and $cf \in A^-$, e A^- é uma ágebra. $\square$

Teorema 35 (Stone-Weierstrass)**.** *Seja* $A \subset C(X, \mathbb{R})$ *uma álgebra tal que* $A = A^-$, $1 \in A$ *e se* $x, y \in X$, $x \neq y$, *existe* $f \in A$ *tal que* $f(x) \neq f(y)$. *Então,* $A = C(X, \mathbb{R})$.

Se $\max\limits_{x\in X}|f(x)| < M$, $\epsilon > 0$, $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ for um polinômio (do Teorema de Aproximação de Weierstrass) tal que

$$||t| - p(t)| < \epsilon, \quad \forall t \in [-M, M],$$

e $p(f) = a_0 + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_n f^n$, então $p(f) \in A$ e

$$||f(x)| - p(f(x))| < \epsilon, \quad x \in X.$$

Segue do fato que A é fechada em $C(X, \mathbb{R})$ que $|f| \in A$.

A seguir mostremos que se $h, g \in A$ então $\max\{h, g\} \in A$ e $\min\{h, g\} \in A$. Isto segue do fato que

$$\min\{h, g\} = \frac{1}{2}(h + g) - \frac{1}{2}|h - g| \in A \quad \text{e}$$

$$\max\{h, g\} = \frac{1}{2}(h + g) + \frac{1}{2}|h - g| \in A.$$

Seja $x, y \in X$ com $x \neq y$ e $f \in C(X, \mathbb{R})$. A função constante g^x com valor $f(x)$ está em A (aqui usamos que $1 \in A$).

Seja $h^y \in A$ tal que $h^y(x) \neq h^y(y)$. Sem perda de generalidade assumimos $h^y(x) = 0$ (aqui usamos novamente que $1 \in A$).

Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$f_{xy} = g^x + ah^y \in A$$

satisfaz $f_{xy}(x) = f(x)$ e $f_{xy}(y) = f(y)$.

Seja $\epsilon > 0$, para cada $y \in X$ existe um intervalo aberto I_y tal que $y \in I_y$ e $f_{xy}(z) < f(z) + \epsilon$, $\forall z \in I_y$.

Como X é compacto temos que $I_{y_1}, \ldots, I_{y_n}$ cobrem X para alguma escolha de $y_1, \ldots, y_n$. Seja

$$f_x = \min\{f_{xy_1}, \ldots, f_{xy_n}\}.$$

Então $f_x \in A$, $\boxed{f_x(x) = f(x)}$ e $\boxed{f_x(z) < f(z) + \epsilon, \forall z \in X.}$

Agora,para $x \in X$, existe um intervalo aberto I_x tal que, $\forall z \in I_x$

$$f_x(z) > f(z) - \epsilon.$$

Como X é compacto, um número finito desses intervalos $I_{x_1}, \ldots, I_{x_n}$ cobrem X. Seja

$$F = \max\{f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}\}.$$

Então $F \in A$ e $\forall z \in X$,

$$|f(z) - F(z)| < \epsilon$$

o que prova o teorema. $\square$

5 Séries de potências

Agora consideraremos funções do tipo um particular tipo de série de funções. São as chamadas séries de potências que vimos brevemente quando tratamos do critério da raiz e são da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{ou}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n.$$

Sem perda de generalidade consideraremos o caso $a=0$.

Proposição 2. *Sejam x_0, x_1 números reais não nulos.*

- *Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,x_0^n$ for convergente, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ será absolutamente convergente, para cada $x \in (-|x_0|, |x_0|)$.*

- *Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,x_1^n$ for divergente, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ será divergente, para cada x com $|x| > |x_1|$.*

Prova: Sabemos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_0^n$ é convergente e $x_0 \neq 0$. Logo $\lim_{n\to\infty} c_n x_0^n = 0$ e existe $M \geqslant 0$, tal que $|c_n\,x_0^n| \leqslant M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ então

$$|c_n\,x^n| = |c_n x_0^n||\frac{x^n}{x_0^n}| \leqslant M|\frac{x}{x_0}|^n = M\,r^n,\ n \in \mathbb{N},$$

onde $r = |\frac{x}{x_0}| < 1$. Do critério da comparação para séries de termos não-negativos, a série $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n\,x^n|$ é convergente $\forall x \in (-|x_0|, |x_0|)$.

Por outro lado, se $|x_2| > |x_1|$ a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_2^n$ não pode ser convergente pois isto implicaria a convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ que é divergente. $\square$

Disto segue que

Teorema 36. *Dada a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,x^n$ uma, e somente uma, das situações abaixo ocorre:*

- *a série de potências converge somente em $x=0$;*

- *a série de potências converge absolutamente* $\forall x \in \mathbb{R}$*;*

- *existe* $R > 0$*, tal que a série de potências é absolutamente convergente* $\forall x \in (-R, R)$ *e divergente para todo* x *com* $|x| > R$*.*

No último caso nada podemos afirmar quando $x = R$ ou $x = -R$ e a análise terá que ser feita caso a caso como vimos anteriormente. Também neste caso, do critério da raiz, $\dfrac{1}{R} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$

Teorema 37. *Se* $R \in (0, \infty]$*, é tal que a série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *é convergente,* $\forall x \in (-R\,, R)$ *e* $f : (-R\,, R) \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,\ \forall x \in (-R, R).$$

Então, para $r \in (0\,, R)$*, a série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ *será uniformemente convergente em* $[-r, r]$*. A função* f *será diferenciável em* $(-R, R)$ *e*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n\, x^{n-1},\ \forall x \in (-R\,, R),$$

A função f *será integrável em* $[0, x] \subset (-R, R)$ *e*

$$\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1},\ \forall x \in (-R\,, R).$$

Sendo assim, a série pode ser derivada e integrada, termo a termo.

Nas condições do teorema anterior a função f é de classe C^∞ isto é $f \in C^\infty((-R, R), \mathbb{R})$. E, para cada $k \in \mathbb{N}$, teremos

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n\,(n-1)\cdots(n-k+1)\, c_n\, x^{n-k},\ \forall x \in (-R, R).$$

Em particular, para cada $k \in \mathbb{N}$, teremos

$$f^{(k)}(0) = k!c_k, \text{ ou seja } c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Logo, a série de potências que define f é a série de Taylor de f.

Existem funções $f \in C^\infty((-R, R), \mathbb{R})$, de modo que

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R},$$

como por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{para cada} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{para} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Verifica-se que $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e que

$$f^{(n)}(0) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Exemplo 10. *A série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *converge* $\forall x \in \mathbb{R}$ *e sua soma é* e^x.

Por outro, a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ *só converge para* $x = 0$.

A série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ *converge para* $\frac{1}{1+x}$ *se, e somente se,* $x \in (-1, 1)$.

Integrando $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \log(1 + x)$, $x \in (-1, 1]$

$$e \ \operatorname{arctg}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

Agora consideramos a seguinte questão. Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge em ambos os extremos, R e $-R$, do seu intervalo de convergência $(-R, R)$, podemos garantir que a convergência seja uniforme em $[-R, R]$? A resposta positiva é dada pelo

Teorema 38 (Abel)**.** *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *uma série de potências com raio de convergência* $R \in (0, \infty)$*. Se* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ *converge, então* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge uniformemente no intervalo* $[0, R]$ *e* $\lim_{x \to R-} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

A prova do Teorema de Abel usa o lema a seguir.

Lema 3. *Se* $\{s_n\} = \{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n\}$ *é limitada, isto é,* $\sup\{|s_n| : n \in \mathbb{N}\} = K < \infty$*, e* $\{b_n\}$ *é uma seqüência não-crescente de números não negativos então* $|\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_p b_p| \leqslant K b_1$*,* $\forall p \in \mathbb{N}$*.*

Prova:

$$\begin{aligned} |\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_p b_p| &= |s_1 b_1 + (s_2 - s_1) b_2 + \ldots + (s_p - s_{p-1}) b_p| \\ &= |s_1(b_1 - b_2) + \ldots + s_{p-1}(b_{p-1} - b_p) + s_p b_p| \\ &\leqslant K(b_1 - b_2 + \ldots + b_{p-1} - b_p + b_p) = K b_1. \end{aligned}$$

Prova do Teorema de Abel: Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \to |a_{n+1} R^{n+1} + \ldots + a_{n+p} R^{n+p}| < \epsilon, \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Para $n > N$ e $\alpha_p = a_{n+p} R^{n+p}$, $p \in \mathbb{N}$. Os α_p satisfazem a hipótese do lema anterior, com $K = \epsilon$. Para todo $x \in [0, R]$, temos

$$|a_{n+1} x^{n+1} + \ldots + a_{n+p} x^{n+p}| = |\alpha_1 \left(\frac{x}{R}\right) + \ldots + \alpha_p \left(\frac{x}{R}\right)^p | \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

Do lema, com $b_p = (\frac{x}{R})^p$, segue que, $\forall n > N$ e $\forall x \in [0, R]$,

$$|a_{n+1} x^{n+1} + \ldots + a_{n+p} x^{n+p}| \leqslant \epsilon \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \leqslant \epsilon, \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Isto prova que $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em $[0, R]$ e, como $a_n x^n$ é contínuo em $[0, R]$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é contínua em $[0, R]$. Logo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = f(R) = \lim_{x \to R-} f(x) = \lim_{x \to R^-} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)$.$\square$

Observações.

1. As mesmas conclusões do Teorema de Abel valem com $-R$ em lugar de R. Basta tomar a série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^n$.

2. A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente no seu intervalo de convergência $(-R, R)$ se, e só se, converge nos pontos R e $-R$.

3. A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ converge uniformemente em $[-1+\delta, 1]$, para cada $\delta > 0$ mas não converge uniformemente em $(-1, 1]$.

6 Funções Analíticas

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é analítica se é C^∞ e, dado $x_0 \in I$, existe $R > 0$ tal que $V_R(x_0) = (x_0 - R, x_0 + R) \subset I$ e

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots, \ \forall x \in V_R(x_0)$$

Assim, o valor de uma função analítica em cada ponto é dado pela sua série de Taylor.

Vimos que, toda função dada por uma série de potências é C^∞ e, se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, então $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, isto é, toda série de potências é uma série de Taylor.

Logo, $f : I \to \mathbb{R}$, é analítica se, dado $x_0 \in I$, existem $R > 0$, com $(x_0 - R, x_0 + R) \subset I$, e uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ tal que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Ou seja, o valor de f é dado pela soma de uma série de potências do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ em cada $x_0 \in I$.

Note que a série varia com o ponto x_0 (os coeficientes são dados em termos das derivadas $f^{(n)}(x_0)$). Mesmo que a função seja analítica em toda a reta, sua série de potências em torno de um ponto x_0 não precisa convergir em toda a reta.

Teorema 39. *A soma e o produto de funções analíticas $f, g : l \to \mathbb{R}$ é uma função analítica em I.*

De fato, se dado $x_0 \in I$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $|x-x_0| < r$ e $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ se $|x-x_0| < s$ e $t = \min\{r, s\}$, então $f(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)(x-x_0)^n$, e $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, com $c_n = a_0b_n + \ldots + a_nb_0$, se $|x-x_0| < t$ (Teorema (B)).

Uma das propriedades que distinguem as funções analíticas das funções C^∞ é dada pelo

Teorema 40. *Se uma função analítica $f : I \to \mathbb{R}$ se anula, juntamente com todas as suas derivadas, num ponto de I, então f é identicamente nula.*

Prova: Se A é o conjunto dos pontos de I nos quais f se anula juntamente com todas as suas derivadas. A é aberto. Agora consideremos o conjunto B, formado pelos pontos $x \in I$ para os quais $f(x)$ ou alguma derivada $f^{(n)}(x)$ é diferente de zero. Como as derivadas são contínuas B também é aberto de I. Como $I = A \cup B$ e $A \cap B = \varnothing$. Como $A \neq \varnothing$ segue que $A = I$.$\square$

Corolário 5. *Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ analíticas. Se, para algun $x_0 \in I$, tem-se $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0), n \in \mathbb{N}$. então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$.*

Lema 4. *Seja f uma função C^∞ num intervalo I. Seja $X \subset I$ um conjunto com um ponto de acumulação $x_0 \in I$. Se $f(x) = 0$ para todo $x \in X$, então $f^{(n)}(x_0) = 0$ para todo $n \geqslant 0$.*

Prova: Seja $\{x_n\}$ uma seqüência estritamente monótona de pontos de X, com $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Então $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Além disso, $f'(x_0) =$

$\lim \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = 0$. Pelo Teorema de Rolle, $\forall n \in \mathbb{N}$, existe y_n entre x_n e x_{n+1}, tal que $f'(y_n) = 0$.

Claramente $\{y_n\}$ é estritamente monótona e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$. Logo $f''(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f'(y_n) - f'(x_0)}{y_n - x_0} = 0$. Argumentando por indução podemos mostrar que todas as derivadas de f se anulam em x_0.$\square$

Teorema 41. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $X \subset I$ um conjunto que tem um ponto de acumulação $x_0 \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ analítica. Se $f(x) = 0$, $\forall x \in X$, então $f(x) = 0$, $\forall x \in I$.*

Corolário 6. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $X \subset I$ um conjunto que tem um ponto de acumulação $x_0 \in I$ e $f, g : I \to \mathbb{R}$ analíticas. Se $f(x) = g(x)$, $\forall x \in X$, então $f(x) = g(x)$, $\forall x \in I$.*

Teorema 42. *Seja $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Para todo $x_0 \in (-R, R)$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ se $|x - x_0| < R - |x_0|$.*

Prova: Se $|x-x_0| < R-|x_0|$ então $|x_0|+|x-x_0| < R$. Logo a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para $x = |x_0| + |x - x_0|$. isto é, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|(|x_0| + |x - x_0|)^n < +\infty$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k}|x - x_0|^k < +\infty.$$

Logo

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = \sum_{k\geqslant 0} a_n \left[x_0 + (x - x_0)\right]^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k}(x - x_0)^k \qquad \text{[Teorema (A)]} \\
&= \sum_{k\geqslant 0} \left[\sum_{n\geqslant k} a_n \binom{n}{k} x_0^{n-k}\right](x - x_0)^k = \sum_{k\geqslant 0} b_k (x - x_0)^k,
\end{aligned}$$

Corolário 7. *Sejam* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *séries de potências convergentes no intervalo* $(-R, R)$ *e* $X \subset (-R, R)$ *um conjunto com um ponto de acumulação nesse intervalo. Se* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum b_n x^n$ *para todo* $x \in X$ *então* $a_n = b_n$ *para* $n \in \mathbb{N}$*.*

7 Apêndice

7.1 Seqüência dupla

Uma seqüência dupla (x_{nk}) é uma função $x : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada par (n, k) de números naturais um número real x_{nk}.

$$\begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{array}$$

Consideremos as somas repetidas $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} \right)$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk} \right)$.

Mesmo quando ‘convergem’, elas podem dar diferentes resultados.

Por exemplo, somando primeiro as linhas no quadro abaixo, obtemos $\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}) = 0$ enquanto se somarmos primeiro as colunas, teremos $\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}) =$

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1.$

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \to & 0 \\
0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & \cdots & \to & 0 \\
0 & 0 & \frac{7}{8} & -\frac{7}{8} & 0 & \cdots & \to & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{15}{16} & -\frac{15}{16} & \cdots & \to & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \cdots & \cdots & &
\end{array}$$

Surge o problema de obter condições que assegurem a igualdade das duas somas repetidas. Nosso primeiro resultado será o

Lema 5. *Se $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é dada por $f_n(j) = x_{n1} + \ldots + x_{nj}$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em $\mathbb{N}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}$ converge, $\forall n \in \mathbb{N}$, então*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}\right)$$

Prova: Segue do fato que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\lim_{j\to\infty} f_n(j)\right] &= \lim_{j\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(j)\right] = \lim_{j\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j} x_{nk}\right] \\
&= \lim_{j\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{j}\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}. \square
\end{aligned}$$

Teorema 43 (A)**.** *Dada $\{x_{nk}\}$, se $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk}| = a_n$ para cada n e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ então*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}\right).$$

Esta afirmação implica, em particular, que todas as séries contidas na igualdade acima são convergentes.

Prova: Pondo $f_n(k) = x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nk}$, como no lema, temos $|f_n(k)| \leqslant a_n$ para todo k e todo n. Logo $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é uniformemente convergente em $k \in \mathbb{N}$ pelo Teste M de Weierstrass. O lema anterior implica o resultado.$\square$

7.2 Produto de Cauchy séries

A seguir definimos o produto de Cauchy de duas séries numéricas.

Definição 14. *Dadas as séries* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *o seu produto de Cauchy é a série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *onde* $\displaystyle c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Observação 1. *Este produto é inspirado no produto de polinômios.*

O produto de séries convergentes pode não ser convergente. Basta considerar a série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ (exercício).

Teorema 44 (B). *Se* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente com soma* A, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *é convergente com soma* B, *então o seu produto de Cauchy* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $n \in \mathbb{N}$, *é convergente com soma* AB.

Prova: Se $\displaystyle A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $\displaystyle B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $\displaystyle C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ e $\beta_n = B_n - B$, $n \in \mathbb{N}$, então $A_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$, $\quad B_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} B$ e $\beta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Queremos mostrar que $C_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} AB$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
C_n &= c_0 + c_1 + \cdots + c_n \\
&= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0) \\
&= a_0(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) + a_1(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \cdots + a_{n-1}(b_0 + b_1) + a_nb_0 \\
&= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \cdots a_{n-1}B_1 + a_nB_0 \\
&= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n(B + \beta_0) \\
&= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)B + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0 \\
&= A_nB + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_{n-1}\beta_1 + a_n\beta_0.
\end{aligned}$$

Se $\gamma_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_{n-1}\beta_1 + a_n\beta_0$, $n \in \mathbb{N}$.

$$C_n = A_nB + \gamma_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

e o resultado estará provado se mostrarmos que $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$.

Como $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente seja $\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$

Como $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ é convergente, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $|\beta_n| = |B_n - B| < \varepsilon$ sempre que $n \geqslant N$.

Logo, para $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
|\gamma_n| &= |(\beta_0a_n + \cdots + \beta_Na_{n-N}) + (\beta_{N+1}a_{n-N-1} + \cdots + \beta_na_0)| \\
&\leqslant |\beta_0a_n + \cdots + \beta_Na_{n-N}| + |\beta_{N+1}||a_{n-N-1}| + \cdots + |\beta_n||a_0| \\
&< |\beta_0a_n + \cdots + \beta_Na_{n-N}| + \varepsilon\left(|a_{n-N-1}| + \cdots + |a_0|\right) \\
&\leqslant |\beta_0a_n + \cdots + \beta_Na_{n-N}| + \varepsilon\alpha.
\end{aligned}$$

logo $0 \leqslant \limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \leqslant \varepsilon\alpha$, para todo $\epsilon > 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$, completando a demonstração.$\square$

7.3 Lema do Sol Nascente - Rising sun lemma

O lema do sol nascente é devido a Frigyes Riesz ([1]). O nome do lema vem de imaginar o gráfico da função g como uma paisagem montanhosa, com o

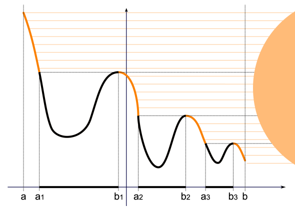

Figure 1: Ilustração sobre o porque do nome “Lema do Sol Nascente”.

sol brilhando horizontalmente da direita. O lema descreve o conjunto dos pontos de (a, b) que estão na sombra.

Lema 6 (Lema do Sol Nascente)**.** *Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e*

$$S = \{x \in [a, b] : \text{ existe } y \in (x, b] \text{ com } g(y) > g(x)\}$$

Note que $b \notin S$ e a pode ou não estar em S. Defina $E = S \cap (a, b)$.

Então E é um conjunto aberto e pode ser escrito como uma união contável de intervalos disjuntos

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$$

com $g(a_k) = g(b_k)$, exceto se $a_{k_0} = a \in S$, para algum k_0. Neste caso $g(a) < g(b_{k_0})$. Além disso, se $x \in (a_k, b_k)$, então $g(x) < g(b_k)$.

Prova: Note que, se $[c, d) \subset S$ e $d \notin S$ então $g(c) < g(d)$.

De fato, se $g(c) \geqslant g(d)$, $g(z) = \max\{g(x) : x \in [c, d]\}$ para algum $z \in [c, d)$. Como $z \in S$, existe $y \in (z, b]$ com $g(z) < g(y)$.

Claramente, $y \in (d, b]$ e $g(d) \leqslant g(z) < g(y)$. Isso implica que $d \in S$, o que é uma contradição.

Da continuidade de g, E é aberto, e portanto pode escrito, de maneira única, como união enumerável de intervalos abertos e disjuntos $\{(a_k, b_k) : k \in \mathbb{N}\}$.

Segue imediatamente da afirmativa anterior que $g(x) < g(b_k)$ para $x \in (a_k, b_k)$. Como g é contínua, também devemos ter $g(a_k) \leqslant g(b_k)$.

Se $a_k \neq a$ ou $a \notin S$, então $a_k \notin S$, então $g(a_k) \geqslant g(b_k)$. Assim, $g(a_k) = g(b_k)$ nesses casos. Por fim, se $a_k = a \in S$, a primeira parte da prova nos diz que $g(a) < g(b_k)$.$\square$

References

[1] F. Riesz, Sur un Théorème de Maximum de Mm. Hardy et Littlewood *J. London Math. Soc.* (1932) s1 - **7** (1): 10-13

[2] Elon L. Lima, *Curso de Análise - Vol. 1*, Projeto Euclides-INPA 2007

[3] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, International Series inPure and Applied Mathematics, McGraw-Hil, Inc. 1976.