Notas de Aula
SMA-0380 Análise

Revisão para a Segunda Prova

Limites, Continuidade e Diferenciabilidade

Alexandre Nolasco de Carvalho

May 31, 2023

Contents

1 Topologia da Reta **6**

1.1 Abertos, Fechados, Compactos e Conexos 6
1.2 Coberturas e Compactos 10
1.3 Medida Exterior 12
1.4 O Lema do Recobrimento de Vitali 14

2 Funções - Limites e Continuidade **15**

2.1 Critério negativo para existência de limites 17
2.2 Limites Laterais 18
2.3 Propriedades do Limite 20
2.4 Limites Superior e Inferior 24

3 Continuidade **26**

3.1 Propriedades da Continuidade 27
3.2 Funções contínuas: Resuldados fundamentais 28
3.2.1 O Teorema da Conservação do Sinal 29
3.2.2 O Teorema do Anulamento 29
3.2.3 O Teorema do Valor Intermediário 30
3.2.4 O Teorema de Weierstrass e Aplicações 30

4 Continuidade **32**

4.1 Continuidade e Abertos 32
4.2 Continuidade e conexos 33
4.3 Continuidade e Compactos 33
4.4 Continuidade Uniforme 35
4.5 Descontinuidades 37
4.6 Semicontinuidade Superior e Inferior 38

5 Derivadas **39**

5.1 A função derivada 40
5.2 Derivadas de Ordens Superiores 41

5.3 Fórmulas e Regras de Derivação 42
5.4 Propriedades da Derivada 43
5.5 A Regra da Cadeia 45
5.6 Derivada da Função Inversa 45
5.7 Funções deriváveis em intervalos 49

6 O Teorema do Valor Médio e suas Conseqüências 53
6.1 Regra de L'Hospital 55
6.2 Teorema de Taylor 56

7 Funções Convexas e Funções analíticas 58
7.1 Funções Convexas 58
7.2 Funções Analíticas e Séries de Taylor 59

8 Funções de Variação Limitada (BV) 60
8.1 Funções de Variação Limitada (BV) 60
8.2 Funções Monótonas e Lipschitzianas são BV 61
8.3 Monotonicidade e Diferenciabilidade 62
8.4 Lipschitz Continuidade e Diferenciabilidade 64

1 Topologia da Reta

1.1 Abertos, Fechados, Compactos e Conexos

Definição 1. *Seja $A \subset \mathbb{R}$.*

1) *Um ponto $a \in A$ é interior a A se existe $r > 0$ tal que $(a-r, a+r) \subset A$.*

2) *O conjunto A é aberto se todos os seus pontos são interiores.*

3) *O conjunto A é fechado em $\mathbb{R}$ se seu complementar é aberto.*

4) *O interior A^{o} de A é o conjunto dos pontos interiores a A.*

5) *O fecho $\bar{A}$ de A é a interseção de todos os fechados que contém A.*

Teorema 1. *Seja Λ um conjunto e $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de conjuntos.*

1) *Se cada A_λ é aberto, $\cup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ é aberto.*

2) *Se cada A_λ é aberto e Λ é um conjunto finito, $\cap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ é aberto.*

3) *Se cada A_λ é fechado, $\cap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ é fechado.*

4) *Se cada A_λ é fechado e Λ é um conjunto finito, $\cup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ é fechado.*

Exemplo 1. *Todo intervalo aberto é aberto. O interior de $[a, b]$ é (a, b). O interior A^{o} de A é o maior aberto contido em A. O fecho de A é o menor fechado que contém A.*

Teorema 2. *Todo subconjunto aberto A de $\mathbb{R}$ se exprime, de maneira única, como união enumerável de intervalos abertos disjuntos*

Prova: Primeiramente note que se Λ é um conjunto, para cada λ, $I_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda)$ é um intervalo e $p \in \cap_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda$ então $\cup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda = (a, b)$ onde $a = \inf_{\lambda\in\Lambda}$ e $b = \sup_{\lambda\in\Lambda}$. De fato, é claro que $\cup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda \subset (a, b)$. Para provar a outra inclusão note que $p \in (a, b)$ e se $x \in (a, b)$, ou $x \leq p$ ou $x > p$. Agora,

- se $x \leq p$, do fato que $a = \inf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda < x$, existe $\mu_1 \in \Lambda$ tal que $a_{\mu_1} < x \leq p < b_{\mu_1}$.
- se $x > p$, do fato que $b = \sup_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda > x$, existe $\mu_2 \in \Lambda$ tal que $a_{\mu_2} < p < x < b_{\mu_2}$.

Em qualquer dos casos $x \in \cup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$.

Para o restante da prova, dado $x \in A$ seja I_x a união de todos os intervalos abertos contidos em A e que contém x. Segue que

1) $I_x = (a_x, b_x) \subset A$,
2) se $x, y \in A$, ou $I_x \cap I_y = I_x = I_y$ ou $I_x \cap I_y = \varnothing$ e
3) $\cup_{x\in A} I_x = A$.

Tomando, para cada intervalo desta decomposição um único racional vemos que A pode ser escrito como união enumerável de intervalos disjuntos. Para ver que esta decomposição é única basta notar que cada intervalo aberto de uma tal decomposição está contido em algum dos I_x e não pode ser distinto de I_x.□

Corolário 1. *Se I é um intervalo aberto e $I = A \cup B$ onde A e B são conjuntos abertos e disjuntos então um deses conjuntos é vazio.*

Teorema 3. *Seja Λ um conjunto e $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de conjuntos.*

1) *Se cada A_λ é aberto, $\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ é aberto.*
2) *Se cada A_λ é aberto e Λ é um conjunto finito, $\cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ é aberto.*
3) *Se cada A_λ é fechado, $\cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ é fechado.*
4) *Se cada A_λ é fechado e Λ é um conjunto finito, $\cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ é fechado.*

Exemplo 2. *Todo intervalo aberto é aberto. O interior de $[a, b]$ é (a, b). O interior A^o de A é o maior aberto contido em A. O fecho de A é o menor fechado que contém A.*

Teorema 4. *Todo subconjunto aberto A de $\mathbb{R}$ se exprime, de maneira única, como união enumerável de intervalos abertos disjuntos*

Prova: Primeiramente note que se Λ é um conjunto, para cada λ, $I_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda)$ é um intervalo e $p \in \cap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ então $\cup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = (a, b)$ onde $a = \inf_{\lambda\in\Lambda}$ e $b = \sup_{\lambda\in\Lambda}$. De fato, é claro que $\cup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subset (a, b)$. Para provar a outra inclusão note que $p \in (a, b)$ e se $x \in (a, b)$, ou $x \leq p$ ou $x > p$. Agora,

- se $x \leq p$, do fato que $a = \inf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda < x$, existe $\mu_1 \in \Lambda$ tal que $a_{\mu_1} < x \leq p < b_{\mu_1}$.
- se $x > p$, do fato que $b = \sup_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda > x$, existe $\mu_2 \in \Lambda$ tal que $a_{\mu_2} < p < x < b_{\mu_2}$.

Em qualquer dos casos $x \in \cup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$.

Para o restante da prova, dado $x \in A$ seja I_x a união de todos os intervalos abertos contidos em A e que contém x. Segue que

1) $I_x = (a_x, b_x) \subset A$,
2) se $x, y \in A$, ou $I_x \cap I_y = I_x = I_y$ ou $I_x \cap I_y = \varnothing$ e
3) $\cup_{x\in A} I_x = A$.

Tomando, para cada intervalo desta decomposição um único racional vemos que A pode ser escrito como união enumerável de intervalos disjuntos. Para ver que esta decomposição é única basta notar que cada intervalo aberto de uma tal decomposição está contido em algum dos I_x e não pode ser distinto de I_x.$\square$

Corolário 2. *Se I é um intervalo aberto e $I = A \cup B$ onde A e B são conjuntos abertos e disjuntos então um deses conjuntos é vazio.*

Definição 2. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um ponto $p \in \mathbb{R}$ é aderente a A se existir seqüência $\{x_n\}$ em A tal que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$.*

Sabemos que se p é ponto de acumulação de A então p é aderente a A. Se p é aderente a A e p não é ponto de acumulação de A então $p \in A$. Todo ponto interior a A é aderente a A e é um ponto de acumulação de A.

Teorema 5. *Um ponto $p \in \mathbb{R}$ é aderente a A se, e só se, $A \cap (p-\epsilon, p+\epsilon) \neq \varnothing$ para todo $\epsilon > 0$.*

Corolário 3. *Se $A \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente (inferiormente) então $\sup A$ ($\inf A$) é aderente a A.*

Teorema 6. *O fecho A^- de $A \subset \mathbb{R}$ é o conjunto $\tilde{A}$ dos pontos aderentes de A.*

Prova: De fato, se $x \notin \tilde{A}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap A = \varnothing$ segue que $\tilde{A}$ é fechado e $A^- \subset \tilde{A}$. Se $x \notin A^-$ existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap A = \varnothing$ e $x \notin \tilde{A}$. $\square$

Definição 3. *Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ com $A \subset B$. Diremos que A é denso em B se $B \subset A^-$*

Teorema 7. *Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ com $A \subset B$. São equivalentes*

- *Todo ponto de B é aderente a A.*
- *Todo ponto de B é limite de uma seqüência de pontos de A.*
- *Para todo $\epsilon > 0$ e $b \in B$ $(b-\epsilon, b+\epsilon) \cap A \neq \varnothing$.*

Teorema 8. *Todo subconjunto B de $\mathbb{R}$ contém um subconjunto A que é enumerável e denso em B.*

Prova: Dado $n \in \mathbb{N}^*$ temos que $\mathbb{R} = \displaystyle\bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$. Para cada $p \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$ escolha $x_{np} \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right) \cap B$ quando esta interseção for não vazia. O conjunto A desses pontos é claramente denso em B (para cada $n \in \mathbb{N}^*$ e $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $|a-b| < \frac{1}{n}$) e é enumerável (a coleção de intervalos $\left\{\left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right) : p \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N}^*\right\}$ é enumerável). $\square$

Teorema 9. *Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado, não vazio e sem pontos isolados. Então F é não enumerável.*

Prova: Sejam $x, y \in F$ distintos, $r = |x-y|/2$ e $\tilde{F}_y = F \cap (x-r, x+r)$. Segue que $\tilde{F}_y$ é não vazio e não contém pontos isolados. Seja F_y a união de $\tilde{F}_y$ com os pontos de acumulação de $\tilde{F}_y$ no conjunto $\{x-r, x+r\}$. F_y é claramente fechado e não tem pontos isolados, é limitado e $y \notin F$.

Se $F \supset \{y_1, y_2, y_3, \cdots\}$ seja F_{y_1}. Tendo escolhido $F_{y_1}, \cdots F_{y_{n-1}}$, se $y_n \notin F_{y_{n-1}}$ escolhemos $F_{y_n} = F_{y_{n-1}}$ e se $y_n \in F_{y_{n-1}}$ escolhemos F_{y_n} fechado e sem pontos isolados tal que $y_n \notin F_{y_n} \subset F_{y_{n-1}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $x_n \in F_{y_n}$. A seqüência $\{x_n\}$ é limitada e portanto tem uma subseqüência $\{x_{\phi(n)}\}$ convergente com limite $\bar{x}$. É claro que $\bar{x} \in \cap_{n\in\mathbb{N}} F_{y_n}$ e $\bar{x} \neq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.$\square$

1.2 Coberturas e Compactos

Definição 4. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ e Λ um conjunto, uma coleção $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de conjuntos é chamada uma* **cobertura de** *A se $A \subset \cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda$.*

Se $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é uma cobertura e $\Lambda' \subset \Lambda$ e $A \subset \cup_{\lambda'\in\Lambda'}\mathcal{A}_{\lambda'}$, $\{\mathcal{A}_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ é dita uma **subcobertura da cobertura** *$\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.*

Se os conjuntos da cobertura são todos abertos a cobertura é dita uma **cobertura aberta***.*

Teorema 10 (Borel-Lebsegue)**.** *Dada uma cobertura $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de $[a,b]$ onde cada I_λ é um intervalo aberto existe $\Lambda' \subset \Lambda$ finito tal que $[a,b] \subset \cup_{\lambda'\in\Lambda'} I_{\lambda'}$.*

Prova: Seja $A = \{x \in [a,b] : \text{existe}\, \Lambda' \subset \Lambda \text{ finito com}\, [a,x] \subset \cup_{\lambda'\in\Lambda'} I_{\lambda'}\}$. É claro que $A \neq \varnothing$. Seja $s = \sup A$. É claro que $s \in [a,b]$ e que existe λ_s tal que $s \in I_{\lambda_s}$. Como I_{λ_s} é aberto $I_{\lambda_s} \cap A \neq \varnothing$. Segue que $s = b$ e que $[a,b]$ está contido em uma união finita de I_λ's.$\square$

Corolário 4. *Dada uma cobertura aberta* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *de* $[a,b]$ *existe* $\Lambda' \subset \Lambda$ *finito tal que* $[a,b] \subset \cup_{\lambda'\in\Lambda'} A_{\lambda'}$.

Basta lembrar que cada aberto da cobertura pode ser escrito como união enumerável de intervalos abertos (disjuntos).

Corolário 5. *Dada uma cobertura aberta* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *de um conjunto fechado e limitado* F *existe* $\Lambda' \subset \Lambda$ *finito tal que* $F \subset \cup_{\lambda'\in\Lambda'} A_{\lambda'}$.

De fato: Como F é fechado e limitado $F \subset [a,b]$. Como $A = F^c$ é aberto e $[a,b] \subset \cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \cup A$ temos que existe $\Lambda' \subset \Lambda$ finito tal que

$$[a,b] \subset \cup_{\lambda'\in\Lambda'} A_\lambda \cup A \quad \text{e} \quad F \subset \cup_{\lambda'\in\Lambda'} A_\lambda.\square$$

Teorema 11. *Dado* $K \subset \mathbb{R}$ *são equivalentes:*

1) K *é fechado e limitado.*

2) *Toda cobertura aberta de* K *possui uma subcobertura finita.*

3) *Todo subconjunto infinito de* K *possui um ponto de acumulação pertencente a* K.

4) *Toda seqüência de pontos de* K *possui uma subseqüência que converge para um ponto de* K.

Prova:

- 1) $\Rightarrow$ 2): Segue diretamente do corolário anterior.

- 2) $\Rightarrow$ 3): Se $A \subset K$ é infinito e não tem pontos de acumulação em K, para cada $k \in K$ existe $I_k = r_k > 0$ tal que $(k - r_k, k + r_k) \cap A = \{k\}$ ou $I_k \cap A = \varnothing$. Segue que $\cup_{k\in K} I_k \supset K$ é uma cobertura aberta sem subcobertura finita.

- 3) $\Rightarrow$ 4): Dada uma seqüência de pontos $\{k_n\}$ em K ela pode ter um número finito ou infinito de valores. Em qualquer dos casos possui uma subseqüência convergente.

- 4) $\Rightarrow$ 1): É claro que K é limitado pois caso contrário existiria uma seqüência $\{x_n\}$ em K com $x_0 \in K$ e $|x_n| \geqslant |x_{n-1}| + 1$ e esta não teria subseqüência convergente. Para ver que K é fechado simplesmente note que se $x \in K^-$ existe seqüência $x_n \in K$ tal que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, de 4), $x \in K$.$\square$

Definição 5. *Um conjunto é compacto se satisfaz uma das condições do teorema anterior.*

Corolário 6 (Teorema de Bolzado-Weierstrass)**.** *Todo conjunto infinito e limitado de números reais possui um ponto de acumulação.*

Corolário 7. *Toda seqüência decrescente de compactos não-vazios tem interseção não vazia.*

1.3 Medida Exterior

Se $I = (a, b)$ defina $\ell(I) = b - a$. Dado $A \subset \mathbb{R}$ existe uma família contável de intervalos abertos que cobrem A. Seja $\mathscr{U}_A$ a coleção de todas as coberturas contáveis de intervalos abertos de A.

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum \ell(I_n) : \{I_n\} \in \mathscr{U}_A \right\}$$

É claro que $m^*(\varnothing) = 0$, $m^*((a, b)) \leqslant b - a$, $m^*(\{x\}) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e que, se $A \subset B$ $m^*(A) \leqslant m^*(B)$.

Lema 1. $m^*[a, b] = m^*(a, b] = m^*[a, b) = m^*(a, b) = b - a$.

Prova: Como $[a, b] \subset (a - \frac{\epsilon}{2}, b + \frac{\epsilon}{2})$, $\forall \epsilon > 0$ temos $m^*([a, b]) \leq b - a$.

Por outro lado se $\{I_n\} \in \mathscr{U}_{[a,b]}$ existe uma subcoleção finita $\{I_{n_1}, \cdots, I_{n_k}\}$ de $\{I_n\}$ tal que $\cup_{i=1}^k I_{n_i} \supset [a, b]$ e

$$\sum_{i=1}^{k} \ell(I_{n_i}) \leqslant \sum \ell\left(I_n\right)$$

Podemos tomar uma subcobertura de $\{I_{n_1}, \cdots, I_{n_k}\}$ de forma que $a \in I_{n_{j_1}} = (y_1, x_1)$ e, recursivamente, se $x_j \leq b$, $x_j \in I_{n_{i_{j+1}}} = (y_{j+1}, x_{j+1})$ parando para $j_0 \leqslant k$ tal que $I_{n_{i_{j_0}}} \ni b$. Assim, como $y_j < x_{j-1} < x_j$,

$$\sum_{j=1}^{j_0} \ell(I_{n_{i_j}}) = \sum (x_j - y_j) > x_{j_0} - y_1 > b - a$$

e $m^*([a,b]) = b - a$.□

Lema 2. *Se $\{A_n\}$ é uma família contável de subconjuntos de $\mathbb{R}$ então*

$$m^*\left(\bigcup A_n\right) \leqslant \sum m^*(A_n)$$

Prova: Só temos que considerar o caso em que $\sum m^*(A_n) < \infty$.

Como $m^*(A_n)$ é finita, dado $\epsilon > 0$, seja $\{I_{n,i}\}_i \in \mathscr{U}_{A_n}$ tal que $A_n \subset \bigcup_i I_{n,i}$ e $\sum_i \ell\left(I_{n,i}\right) < m^*(A_n) + 2^{-n}\epsilon$. Logo $\{I_{n,i}\}_{n,i} \in \mathscr{U}_{\cup A_n}$ e

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup A_n\right) &\leqslant \sum_{n,i} \ell\left(I_{n,i}\right) = \sum_n \sum_i \ell\left(I_{n,i}\right) < \sum_n \left(m^*(A_n) + \epsilon 2^{-n}\right) \\ &= \sum m^*(A_n) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário o resultado segue.□

Corolário 8. 1) *Se $A \subset \mathbb{R}$ é enumerável, $m^*(A) = 0$.*

2) *Se $\{A_n\}$ é uma família contável de subconjuntos de $\mathbb{R}$ e $m^*(A_n) = 0$, $\forall n$ então $m^*(\bigcup_n A_n) = 0$*

Exercício 1. *Seja $I_j = [a_j, b_j]$, $1 \leqslant j \leqslant n$ com $b_j < a_{j+1}$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Mostre que*

$$m^*\Big(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

1.4 O Lema do Recobrimento de Vitali

Lema 3 (Recobrimento de Vitali)**.** *Seja* $E \subset [a,b]$*, consequentemente* $m^*(E) \leqslant b-a$*. Se* $\mathscr{I}$ *é uma cobertura de* E *por intervalos não degenerados e tal que, dados* $x \in E$ *e* $\epsilon > 0$*, existe* $I \in \mathscr{I}$ *tal que* $x \in I$ *e* $\ell(I) < \epsilon$*. Então, dado* $\epsilon > 0$*, existe uma coleção finita e disjunta* $\{I_1, \ldots, I_N\} \subset \mathscr{I}$ *tal que*

$$m^*\left(E \Big\backslash \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) < \epsilon.$$

Prova: Basta considerar o caso com cada intervalo de $\mathscr{I}$ fechado (caso contrário tomamos o seu fecho). Podemos assumir que $\mathscr{I} \ni I \subset \mathcal{O} = (a-1, b+1)$ e que $I \cap E \neq \varnothing$, $\forall I \in \mathscr{I}$.

Escolhemos uma seqüência $\{I_n\}$ de intervalos disjuntos de $\mathscr{I}$ da seguinte forma: Seja $I_1 \in \mathscr{I}$ qualquer e se $I_1, \ldots, I_n$ já foram escolhidos seja r_n o supremo dos comprimentos dos intervalos de $\mathscr{I}$ que não interseptam nenhum dos $I_1, \ldots, I_n$.

Claramente $r_n \leqslant \ell(\mathcal{O})$. Se $E \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, encontramos $I_{n+1} \in \mathscr{I}$ disjunto de $I_1, \ldots, I_n$ e tal que $\ell\left(I_{n+1}\right) > \frac{1}{2} r_n$.

Asim $\{I_n\}$ é uma seqüência disjunta de intervalos em $\mathscr{I}$ e, como $\bigcup I_n \subset \mathcal{O}$, $\sum \ell\left(I_n\right) \leqslant \ell(\mathcal{O})$. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{N+1}^{\infty} \ell\left(I_n\right) < \frac{\epsilon}{5}$$

Seja

$$R = E \Big\backslash \bigcup_{n=1}^{N} I_n.$$

Mostraremos $m^*(R) < \epsilon$. Se $x \in R$, como $F = \bigcup_{n=1}^{N} I_n$ é fechado e $x \notin F$, existe I in $\mathscr{I}$, $x \in I$ e $I \cap F = \varnothing$.

Agora, se $I \cap I_i = \varnothing$ para $i \leqslant \kappa$, temos $\ell(I) \leqslant r_\kappa < 2\ell(I_{\kappa+1})$. Como $\lim\limits_{\kappa\to\infty} \ell(I_\kappa) = 0$, o intervalo I deve intersectar pelo menos um dos intervalos I_κ.

Seja n o menor inteiro tal que $I \cap I_n \neq \varnothing$. Claramente $n > N$, e $\ell(I) \leqslant r_{n-1} < 2\ell(I_n)$. Como $x \in I$ e $I \cap I_n \neq \varnothing$ a distância de x ao ponto médio de I_n é no máximo $\ell(I) + \frac{1}{2}\ell(I_n) < \frac{5}{2}\ell(I_n)$.

Logo x pertence ao intervalo J_n tendo o mesmo ponto médio que I_n e 5 vezes o comprimento. Desta forma

$$R \subset \bigcup_{N+1}^{\infty} J_n \qquad \text{e}$$

$$m^*(R) \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \ell(J_n) = 5 \sum_{n=N+1}^{\infty} \ell(I_n) < \epsilon. \square$$

2 Funções - Limites e Continuidade

Definição 6 (Limite)**.** *Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D. Diremos que* ***o limite de*** *$f(x)$* ***quando*** *x* ***tende*** *p* ***é*** *L se, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D \ e \ \ 0 < |x - p| < \delta, \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Dito de outra forma, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, p) > 0$ tal que

$$f(D \cap (p - \delta, p + \delta)\backslash a) \subset (L - \epsilon, L + \epsilon).$$

Note que:

- Se não existe um número real L tal que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$ diremos que $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ não existe.
- O ponto p não precisa pertencer a D e mesmo que pertença o valor de f em p não é importante para a definição acima.

- Apenas os valores de f em pontos arbitrariamente próximos a p são importantes para a definição.

Teorema 12. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D. O limite de $f(x)$ quando x tende a p, caso exista, é único. Este limite será denotado por*

$$\lim_{x \to p} f(x) = L.$$

De fato: Se L e L' são limites de $f(x)$ quando x tende a p, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \text{ e } 0 < |x - p| < \delta, \implies |f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |f(x) - L'| < \varepsilon.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, com a escolha de δ acima e $x \in D$ satisfazendo $0 < |x - p| < \delta$, temos

$$|L - L'| = |L - f(x) + f(x) - L'| \leqslant |f(x) - L| + |L' - f(x)| < 2\epsilon.$$

Isto mostra que $L = L'$.$\square$

Quando nos referimos a uma função, fica implícito que ela tem um domínio especificado.

Dada a função $f : D \to \mathbb{R}$, dado $D' \subset D$ denotaremos por $f|_{D'} : D' \to \mathbb{R}$ a função definida por $f|_{D'}(x) = f(x)$, para $x \in D'$.

Nos referiremos a $f|_{D'}$ como a restrição de $f : D \to \mathbb{R}$ a D'.

Segue imediatamente da definição que

Teorema 13 (1)**.** *Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função, $D' \subset D$ e p um ponto de acumulação de D'. Se $\lim_{x \to p} f(x) = L$ então $\lim_{x \to p} f|_{D'}(x) = L$*

2.1 Critério negativo para existência de limites

Teorema 14. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função, D' e D'' subconjuntos de D e $p \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D' e de D''.*

- *Se*

  - *um dos limites $\lim_{x \to p} f|_{D'}(x)$ ou $\lim_{x \to p} f|_{D''}(x)$ não existe ou*
  - *ambos existem e $\lim_{x \to p} f|_{D'}(x) \neq \lim_{x \to p} f|_{D''}(x)$*

  então o limite $\lim_{x \to p} f(x)$ não existe.

- *Se $(D' \cup D'')\backslash\{p\} = D\backslash\{p\}$, o limite $\lim_{x \to p} f(x)$ existe se, e somente se, $\lim_{x \to p} f|_{D'}(x)$ e $\lim_{x \to p} f|_{D''}(x)$ existem e $\lim_{x \to p} f|_{D'}(x) = \lim_{x \to p} f|_{D''}(x)$.*

Prova: A prova da primeira parte segue diretamente de (1). Para a segunda parte, existe $\lim_{x \to p} f(x) = L$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D,\ 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon,$$

se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D',\ 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon \implies |f|_{D'}(x) - L| < \epsilon$$

e

$$x \in D'',\ 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon \implies |f|_{D''}(x) - L| < \epsilon.$$

se, e somente se,

$$\lim_{x \to p} f|_{D'}(x) = \lim_{x \to p} f|_{D''}(x).\square$$

2.2 Limites Laterais

Se $D \subset \mathbb{R}$, diremos que $p \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação à direita (esquerda) de D se é um ponto de acumulação de $D_p^+ = D \cap (p, \infty)$ ($D_p^- = D \cap (-\infty, p)$).

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p é um ponto de acumulação à direita (esquerda) de D. O **limite de** $f(x)$ **quando** x **tende a** p **pela direita (esquerda)** é

$$\lim_{x \to p^+} f(x) := \lim_{x \to p} f|_{D_p^+}(x) \qquad \left(\lim_{x \to p^-} f(x) := \lim_{x \to p} f|_{D_p^-}(x) \right)$$

Corolário 9. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p é um ponto de acumulação à direita e à esquerda de D. Então*

$$\lim_{x \to p} f(x)$$

existe se, e somente se, existem os limites laterais à direita e à esquerda e

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x).$$

Teorema 15. *Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D. Se existe $\lim_{x \to p} f(x) = L$ então f é limitada em uma vizinhança de p, isto é, existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tais que $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M$.*

De fato: Existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1$. Logo

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - L| + |L| \leqslant 1 + |L| = M, \quad \forall x \in D, \, 0 < |x - p| < \delta. \square$$

Teorema 16 (Confronto)**.** *Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ funções e p um ponto de acumulação de D. Se existe $\delta_0 > 0$ tal que, para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta_0$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ e $\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} h(x) = L$ então $\lim_{x \to p} g(x) = L$.*

De fato: Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_0 > \delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ e $|h(x) - L| < \epsilon$. Logo

$$L - \epsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < L + \epsilon, \quad \forall x \in D,\ 0 < |x - p| < \delta.$$

Segue que $L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$, $\forall x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$. Ou ainda

$$|g(x) - L| < \epsilon, \quad \forall x \in D,\ 0 < |x - p| < \delta. \square$$

Teorema 17 (Conservação do Sinal). *Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D. Se $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in D$ com $0 < |x - p| < \delta$.*

De fato: Dado $\epsilon = \frac{L}{2}$ existe $\delta > 0$ tal que

$$-\frac{L}{2} < f(x) - L < \frac{L}{2}$$

para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$. Logo $0 < \frac{L}{2} < f(x)$ para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$.$\square$

Teorema 18 (Comparação). *Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D. Se existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$ e existem $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L_f$ então $L_f \leqslant L_g$.*

De fato: Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow$

$$L_f - \frac{\epsilon}{2} \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant L_g + \frac{\epsilon}{2}.$$

Segue que $L_f - L_g \leqslant \epsilon$ e como $\epsilon > 0$ é arbitrário o resutlado segue.$\square$

Teorema 19 (Limite por seqüências). *Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D. O limite $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ existe para toda seqüência $\{x_n\}$ em $D \backslash \{p\}$ que converge para p.*

De fato: Se $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$ e $\{x_n\}$ é seqüência em $D\backslash\{p\}$ com $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$, para todo $x \in D$, $0 < |x-p| < \delta$.

Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - p| < \delta$ para todo $n \geqslant N$. Logo $|f(x_n) - L| < \epsilon$, para todo $n \geqslant N$. Isto mostra que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.$\square$

Para a recíproca primeiramente note que, se $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ existe para toda seqüência $\{x_n\}$ em $D\backslash\{p\}$ que converge para p todas as seqüência $\{f(x_n)\}$ têm o mesmo limite pois se duas tais seqüências tem imagens pela f com limites distintos, alternando os seus elementos contruímos uma seqüência $\{\tilde{x}_n\}$ em $D\backslash\{p\}$ que converge para p e tal que $\{f(\tilde{x}_n)\}$ não converge.

Agora, se $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ não é L, existe $\epsilon > 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in D$, $0 < |x_n - p| < \frac{1}{n}$ tal que $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Logo $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ não é L.$\square$

2.3 Propriedades do Limite

Sejam $f_i : D_{f_i} \to \mathbb{R}$, $i = 1$ e 2, funções. Suponha que p seja um ponto de acumulação de $D_{f_1} \cap D_{f_2}$ e que $\lim\limits_{x\to p} f_i(x) = L_i$, $i = 1, 2$. Então:

1) $\lim\limits_{x\to p}(f_1 + f_2)(x) = \lim\limits_{x\to p} f_1(x) + \lim\limits_{x\to p} f_2(x) = L_1 + L_2$.

2) $\lim\limits_{x\to p}\ k\ f_1(x) = k\, L_1$ onde $k =$ constante.

3) $\lim\limits_{x\to p} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim\limits_{x\to p} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to p} f_2(x) = L_1 \cdot L_2$.

4) $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to p} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to p} f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.

Sabendo de que estas propriedades facilitam, enormemente, o nosso trabalho, vamos fazer a demonstração das mesmas para poder utilizá-las, livremente.

Prova de 1): $\lim\limits_{x\to p}(f_1 + f_2)(x) = \lim\limits_{x\to p} f_1(x) + \lim\limits_{x\to p} f_2(x) = L_1 + L_2$

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_i > 0$ tal que

$$x \in D_{f_i},\ 0 < |x-p| < \delta_i \ \Rightarrow\ |f_i(x) - L_i| < \frac{\epsilon}{2},\ i = 1, 2.$$

Escolha $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então

$$\begin{aligned}
&x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1+f_2},\ 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow \\
&|(f_1+f_2)(x) - (L_1+L_2)| \leq |f_1(x) - L_1| + |f_2(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

ou seja $\lim\limits_{x\to p}(f_1+f_2)(x) = L_1 + L_2$.

Prova de 2): $\lim\limits_{x\to p}\ k\ f_1(x) = k\, L_1$ onde $\ k = \text{constante}$

Se $k = 0$ o resultado é trivial. Se $k \neq 0$, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1},\ 0 < |x-p| < \delta \ \Rightarrow\ |f_1(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{|k|}.$$

Então

$$x \in D_{f_1},\, 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |kf_1(x) - kL_1| = |k||f_1(x) - L_1| < |k|\frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon.$$

ou seja $\lim\limits_{x\to p}(kf_1)(x) = kL_1$.

Prova de 3): $\lim\limits_{x\to p}(f_1(x)\cdot f_2(x)) = \lim\limits_{x\to p} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to p} f_2(x) = L_1 \cdot L_2$

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1},\ 0 < |x-p| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |f_1(x) - L_1| < \min\left\{\frac{\epsilon}{2(|L_2|+1)}, 1\right\}.$$

e $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_2},\ 0 < |x-p| < \delta_2 \ \Rightarrow\ |f_2(x) - L_2| < \min\left\{\frac{\epsilon}{2(|L_1|+1)}, 1\right\}.$$

Logo $|f_2(x)| \leq |f_2(x) - L_2| + |L_2| < |L_2| + 1$ sempre que $x \in D_{f_2},\ 0 < |x-p| < \delta_2$.

Logo, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para $x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1 \cdot f_2}$, $0 < |x-p| < \delta$,

$$
\begin{aligned}
|(f_1 \cdot f_2)(x) - (L_1 \cdot L_2)| &\leq |(f_1(x) - L_1)f_2(x) + L_1(f_2(x) - L_2)| \\
&\leq |f_1(x) - L_1||f_2(x)| + |L_1||f_2(x) - L_2| \\
&\leq |f_1(x) - L_1|(|L_2| + 1) + |L_1||f_2(x) - L_2| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2(|L_2| + 1)}(|L_2| + 1) + |L_1|\frac{\epsilon}{2(|L_1| + 1)} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}
$$

ou seja $\lim\limits_{x \to p}(f_1 \cdot f_2)(x) = L_1 \cdot L_2$.

Prova de 4): $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to p} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to p} f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_1 > 0$ tal que

$$
x \in D_{f_1},\ 0 < |x - p| < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f_1(x) - L_1| < \frac{\epsilon|L_2|}{4}
$$

e $\delta_2 > 0$ tal que

$$
x \in D_{f_2},\ 0 < |x - p| < \delta_2 \ \Rightarrow \ |f_2(x) - L_2| < \min\left\{\frac{\epsilon|L_2|^2}{4(|L_1| + 1)}, \frac{|L_2|}{2}\right\}.
$$

Logo, se $x \in D_{f_2}$, $0 < |x - p| < \delta_2$

$$
|L_2| \leq |f_2(x) - L_2| + |f_2(x)| < \frac{|L_2|}{2} + |f_2(x)| \ \text{ e } \ \frac{|L_2|}{2} < |f_2(x)|.
$$

Logo, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para $x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1 \cdot f_2}$, $0 < |x - p| < \delta$,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{L_1}{L_2}\right| &= \frac{|(f_1(x) - L_1)L_2 + (L_2 - f_2(x))L_1|}{|f_2(x)||L_2|} \\
&\leq \frac{|f_1(x) - L_1||L_2| + |L_2 - f_2(x)||L_1|}{|L_2||L_2|/2} \\
&\leq 2\frac{|f_1(x) - L_1|}{|L_2|} + 2|L_2 - f_2(x)|\frac{|L_1|}{|L_2|^2} \\
&\leq 2\frac{\epsilon|L_2|}{4}\frac{1}{|L_2|} + 2\frac{\epsilon|L_2|^2}{4(|L_1| + 1)}\frac{|L_1|}{|L_2|^2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}
$$

ou seja $\lim\limits_{x \to p}(f_1 \cdot f_2)(x) = L_1 \cdot L_2$.

Teorema 20 (Critério de Cauchy). *Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ funções e p um ponto de acumulação de D. O $\lim_{x\to p} f(x)$ existe se, e somente se, f é de Cauchy em p, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in D$, $0 < |x-p| < \delta$ e $0 < |y-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

De fato: É claro que se $\lim_{x\to p} f(x) = L$ então f é de Cauchy em p. Reciprocamente, se f é de Cauchy em p e $\{x_n\}$ é uma seqüência em $D\backslash\{p\}$ que converge para p, $\{f(x_n)\}$ é de Cauchy e portanto convergente.$\square$

Limites no infinito

Seja D um subconjunto **ilimitado superiormente** de $\mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. Diremos que o limite de $f(x)$ quando x tende para **infinito** é $L \in \mathbb{R}$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $M = M(\epsilon) > 0$ tal que

$$x \in D,\ x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Escreveremos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

De modo análogo, quando D é ilimitado inferiormente, definimos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

O limite de uma seqüência é um caso particular de limite infinito. Neste caso $D = \mathbb{N}$ é ilimitado superioremente.

Limites infinitos

Seja D um subconjunto $\mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. Se p é um ponto de acumulação de D diremos que $f(x)$ **diverge** para $+\infty$ quando x tende para p se, dado $M > 0$, existe $\epsilon = \epsilon(M) > 0$ tal que

$$x \in D,\ 0 < |x-p| < \epsilon \Rightarrow f(x) > M.$$

Escreveremos

$$\lim_{x\to p} f(x) = +\infty.$$

De modo análogo definimos

$$\lim_{x\to p} f(x) = -\infty.$$

Se D é ilimitado superiormente (inferiormente) definimos também

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty \ (\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty).$$

2.4 Limites Superior e Inferior

Seja D um subconjunto $\mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. Se p é um ponto de acumulação de D. Suponha que exista um $\delta_0 > 0$ tal que

$$\sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta_0\} < \infty$$

Então, existe (ou diverge para $-\infty$) o limite

$$\overline{\lim_{x\to p}} f(x) := \lim_{\delta\to 0^+} \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\}$$

Escrevemos $\overline{\lim_{x\to p}} f(x) = +\infty$ quando f não é limitada superiormente em nenhuma vizinhança de p.

Semelhantemente, se

$$\inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\} > -\infty,$$

definimos (podendo ser $+\infty$)

$$\underline{\lim_{x\to p}} f(x) := \lim_{\delta\to 0^+} \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\}$$

Escreveremos $\underline{\lim_{x\to p}} f(x) = -\infty$ quando f não for limitada inferiormente em uma vizinhança de p.

Valor de Aderência

Definição 7. *Dizemos que $y \in \mathbb{R}$ é um valor de aderência de f no ponto p se existe seqüência $\{x_n\}$ em $D\backslash\{p\}$, $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} p$ e $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$.*

Teorema 21. *Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D.*

1) *Se ℓ é um valor de aderência de f em p, $\underline{\lim}_{x \to p} f(x) \leqslant \ell \leqslant \overline{\lim}_{x \to p} f(x)$.*

2) *Se f é limitada em uma vizinhança de p então $\overline{\lim}_{x \to p} f(x)$ e $\underline{\lim}_{x \to p} f(x)$ são valores de aderência de f.*

3) *$\lim_{x \to p} f(x)$ existe se, e somente se, f é limitada em uma vizinhança de p e o conjunto dos valores de aderência de f em p é unitário.*

4) *Se f é limitada em uma vizihança de p, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\underline{\lim} f(x) - \epsilon < f(x) < \overline{\lim} f(x) + \epsilon$ para todo $x \in D$ com $0 < |x - p| < \delta$.*

Prova de 1): Se $\underline{\lim}_{x \to p} f(x) = l$ e $\overline{\lim}_{x \to p} f(x) = L$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$l - \epsilon < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} < l + \epsilon$$
$$L - \epsilon < \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\} < L + \epsilon$$

$\forall\ 0 < \delta < \delta_\epsilon$. Escolha $\delta_0 < \delta_\epsilon$. Se ℓ é um valor de aderência de f em p, existe $x_n \in D \backslash \{p\}$, $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$, com $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$. Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - p| < \delta_0$, $\forall n \geqslant N$. Logo, $\forall n \geqslant N$,

$$\begin{aligned} l - \epsilon &< \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} \\ &\leqslant f(x_n) \leqslant \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} < L + \epsilon. \end{aligned}$$

Segue que $l - \epsilon \leqslant \ell \leqslant L + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ e portanto $l \leqslant \ell \leqslant L$. $\square$

Prova de 2): Note que, para algum $\delta_0 > 0$ temos que

$$-\infty < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} \leq \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} < \infty.$$

Como

$(0, \delta_0) \ni \delta \mapsto \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\}$ é não-decrescente e

$(0, \delta_0) \ni \delta \mapsto \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\}$ é não-crescente, existem os limites

$$\lim_{\delta\to 0^+} \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\} = l \text{ e}$$
$$\lim_{\delta\to 0^+} sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\} = L$$

Como p é um ponto de acumulação de D seja $\{x_n^l\}$ e $\{x_n^L\}$ seqüências em D tais que $0 < \max\{|x_n^l - p|, |x_n^L - p|\} < \frac{\delta_0}{n}$ e

$$\inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \frac{\delta_0}{n}\} \leqslant f(x_n^l) \leqslant \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \frac{\delta_0}{n}\} + \frac{1}{n}$$
$$\sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \frac{\delta_0}{n}\} - \frac{1}{n} \leqslant f(x_n^L) \leqslant \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \frac{\delta_0}{n}\}$$

O resultado agora segue tomando o limite nas espressões acima.□

Prova de 3): Se o limite existe então f é limitada em uma vizinhança de p e todos os valores de aderência coincidem e em particular o $\overline{\lim\limits_{x\to p}} f(x) = \underline{\lim\limits_{x\to p}} f(x)$. Por outro lado, se f é limitada em uma vizinhança de p e o conjunto dos valores de aderência é unitário $\overline{\lim\limits_{x\to p}} f(x) = \underline{\lim\limits_{x\to p}} f(x)$ e todos os valores de aderência coincidem. Disto segue que o limite existe.

Prova de 4): Se $\underline{\lim\limits_{x\to p}} f(x) = l$ e $\overline{\lim}_{x\to p} f(x) = L$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$l - \epsilon < \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\} < l + \epsilon$$
$$L - \epsilon < \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\} < L + \epsilon$$

$\forall\ 0 < \delta < \delta_\epsilon$. Segue que, para $\delta < \delta_\epsilon$ e $x \in D$, $0 < |x-p| < \delta$,

$$\begin{aligned} l - \epsilon &< \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\} \leqslant f(x) \\ &\leqslant \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x-p| < \delta\} < L + \epsilon. \end{aligned}$$ □

3 Continuidade

Definição 8 (Continuidade)**.** *Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$. Diremos que $f(x)$* ***é contínua em*** *p se, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D_f \text{ e } |x-p| < \delta, \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(p)| < \varepsilon\ .$$

Observação 1. *Note que,*

- *se* $p \in D_f$ *é um ponto de acumulação de* D_f, *então* f *é contínua em* p *se, e somente se,* $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$ *e*
- *se* p *é um ponto isolado de* D_f *então* f *é contínua em* p.

Exemplo 3. *(a) A função* $f(x) = k$ *é contínua em* $x = p$ *para cada* $p \in \mathbb{R}$.

(b) A função $f(x) = x$ *é contínua em* $x = p$ *para cada* $p \in \mathbb{R}$.

(c) A função $f(x) = x + 1$ *é contínua em* $x = p$ *para cada* $p \in \mathbb{R}$.

(d) A função $f(x) = x^2$ *é contínua em* $x = p$ *para cada* $p \in \mathbb{R}$.

(e) A função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \textit{se } x \neq 1 \\ 0 & \textit{se } x = 1 \end{cases}$ *não é contínua em* $x = 1$ *pois* $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2 \neq 0 = f(1)$.

Exercício: Verifique cada uma das afirmativas do exemplo anterior utilizando os resultados dos exemplos anteriores para as mesmas funções.

3.1 Propriedades da Continuidade

Recordemos as propriedades do limite.

Sejam $f_i : D_{f_i} \to \mathbb{R}$, $i = 1$ e 2, funções. Suponha que p seja um ponto de acumulação de $D_{f_1} \cap D_{f_2}$ e que $\lim\limits_{x\to p} f_i(x) = L_i$, $i = 1, 2$. Então:

1) $\lim\limits_{x\to p}(f_1 + f_2)(x) = \lim\limits_{x\to p} f_1(x) + \lim\limits_{x\to p} f_2(x) = L_1 + L_2$.

2) $\lim\limits_{x\to p}\ k\ f_1(x) = k\, L_1$ onde $k =$ constante.

3) $\lim\limits_{x\to p} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim\limits_{x\to p} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to p} f_2(x) = L_1 \cdot L_2$.

4) $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to p} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to p} f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.

Propriedades da Continuidade

Corolário 10. *Sejam $f_i : D_{f_i} \to \mathbb{R}$, $i = 1$ e 2, funções. Suponha que $p \in D_{f_1} \cap D_{f_2}$ e que f e g sejam contínuas em p. Então $f_1 + f_2$, $k \cdot f_1$, $f_1 \cdot f_2$ e, se $f_2(p) \neq 0$, f_1/f_2 são contínuas em p.*

Teorema 22 (Limite da Composta)**.** *Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ funções tais que $\mathrm{Im}(g) \subset D_f$ e $L \in D_f$. Se p é um ponto de acumulação de D_g, $\lim\limits_{x\to p} g(x) = L$ e f*

é contínua em L , então

$$\lim_{x\to p} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to p} g(x)\right) = f(L).$$

De fato: Como f é contínua em L, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_f > 0$ tal que

$$y \in D_f, \quad |y - L| < \delta_f \;\Rightarrow\; |f(y) - f(L)| < \epsilon.$$

Como $\lim\limits_{x\to p} g(x) = L$, dado $\delta_f > 0$ existe $\delta_g > 0$ tal que

$$x \in D_g, \quad 0 < |x - p| < \delta_g \;\Rightarrow\; |g(x) - L| < \delta_f.$$

Desta forma, como $\mathrm{Im}(g) \subset D_f$, $D_{f\circ g} = D_g$ e

$$x \in D_g = D_{f\circ g}, 0 < |x - p| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - L| < \delta_f \Rightarrow |f(g(x)) - f(L)| < \epsilon.$$

Logo $\lim\limits_{x\to p} f(g(x)) = f(L)$.$\square$

3.2 Funções contínuas: Resultados fundamentais

Recorde que:

Definição 9 (Continuidade)**.** *Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$. Diremos que $f(x)$* ***é contínua em*** *p se, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D_f \;\text{ e }\; |x - p\,| < \delta, \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

- Se p é um ponto de acumulação de D_f, f é contínua em p se, e somente se, $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

- Diremos que f é contínua se for contínua para todo $p \in D_f$.
- Soma, produto, quociente e composição de funções contínuas é uma função contínua.
- Funções racionais e funções trigonométricas são contínuas.

A prova do teorema a seguir segue da definição de continuidade e da caracterização de limites por seqüências.

Teorema 23. *Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ e $p \in D$. A função f é contínua em p se, e somente se, para toda seqüência $\{x_n\}$ em D com $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} p$ existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.*

Corolário 11. *Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ e $p \in D$. A função f é contínua em p se, e somente se, para toda seqüência $\{x_n\}$ em D com $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} p$ temos $f(x_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(p)$.*

3.2.1 O Teorema da Conservação do Sinal

Teorema 24 (Teorema da Conservação do Sinal)**.** *Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\bar{x} \in D_f$ tal que $f(\bar{x}) > 0$ ($f(\bar{x}) < 0$). Então, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) sempre que $x \in D_f$ e $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$.*

De fato: Como f é contínua em $\bar{x}$, dado $\epsilon = f(\bar{x}) > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$x \in D_f,\ x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(\bar{x}) - \epsilon, f(\bar{x}) + \epsilon)) = (0, 2f(\bar{x})).$$

Isto prova o resultado.$\square$

3.2.2 O Teorema do Anulamento

Teorema 25 (Teorema do Anulamento)**.** *Se*

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ é contínua e } f(a) < 0 < f(b)$$

($f(a) > 0 > f(b)$), então, existe $\bar{x} \in (a,b)$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.

De fato: Faremos apenas o caso $f(a) < 0 < f(b)$. Seja

$$A = \{x \in [a, b] : f(s) > 0, \text{ para todo } s \in [x, b]\}.$$

Note que $\varnothing \neq A \subset [a, b]$ (pois $f(b) > 0$). Seja $z = \inf A$. Do Teorema da Conservação do Sinal, $z \in (a, b)$ e $z \notin A$. Portanto $f(z) \leq 0$.

Por outro lado, do Teorema da Comparação, $f(z) = \lim\limits_{x \to z^+} f(x) \geq 0$ (pois $x > z \Rightarrow x \in A \Rightarrow f(x) > 0$). Logo, $f(z) = 0$.$\square$

3.2.3 O Teorema do Valor Intermediário

Teorema 26 (Teorema do Valor Intermediário)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e tal que $f(a) < f(b)$ $(f(a) > f(b))$. Se $f(a) < k < f(b)$ $(f(a) > k > f(b))$, então existe $\bar{x} \in (a, b)$ tal que $f(\bar{x}) = k$.*

De fato: Considere a função $g(x) = f(x) - k$. Então

$$g : [a, b] \to \mathbb{R} \text{é contínua, } g(a) < 0 \text{ e } g(b) > 0$$

e do Teorema do Anulamento, existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $g(\bar{x}) = 0$. Portanto $f(\bar{x}) = k$.$\square$

3.2.4 O Teorema de Weierstrass e Aplicações

Teorema 27 (de Weierstrass ou do Valor Extremo)**.** *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for contínua, existirão $p, q \in [a, b]$ tais que*

$$f(p) \leq f(x) \leq f(q), \quad \textit{para todo } x \in [a, b].$$

De fato: Verifiquemos, inicialmente, que $\text{Im}(f)$ é limitada.

Se este não fosse o caso, dado $n \in \mathbb{N}$, existiria $x_n \in [a, b]$ tal que, $x_0 \in [a, b]$ e $|f(x_n)| > \max\{n, |f(x_{n-1})|\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Seja $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Segue que $A \subset [a, b]$ tem um ponto de acumulação $r \in [a, b]$.

Como f é contínua em r, existe $\delta > 0$ tal que,

$$x \in (r-\delta, r+\delta) \cap [a,b] = B \;\Rightarrow\; |f(x) - f(r)| < 1.$$

Segue que $f(B)$ é limitado e contém infinitos pontos de $f(A)$ e isto é uma contradição. Segue que $\mathrm{Im}(f)$ é limitada.

Seja $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Então $f(x) \geq m$, $\forall\, x \in [a,b]$. Se f não é constante, m é ponto de acumulação de $\{y \in \mathrm{Im}(f) : y > m\}$.

Seja $x_0 \in [a,b]$ tal que $0 < f(x_0) - m$ e $x_k \in [a,b]$ tal que $0 < f(x_k) - m < \min\{\frac{1}{k}, f(x_{k-1}) - m\}$, para $k \in \mathbb{N}^*$.

O conjunto $A = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ é infinito e limitado, portanto A tem um ponto de acumulação p.

Como f é contínua em p, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe $\delta_n > 0$ tal que

$$x \in [a,b],\ |x-p| < \delta_n \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \frac{1}{n}.$$

Em particular, escolha $x_k \in A$ com $k > n$ e tal que $|x_k - p| < \delta_n$,

$$m - \frac{1}{n} < f(x_k) - \frac{1}{n} < f(p) < f(x_k) + \frac{1}{n} < m + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} < m + \frac{2}{n}.$$

Concluímos que $f(p) = m$.

A afirmativa restante segue de $-\inf \mathrm{Im}(-f) = \sup \mathrm{Im}(f)$. $\square$

Como uma conseqüência do Teorema do Valor Intermediário e do Teorema de Weierstrass, obtemos o seguinte resultado

Corolário 12. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se*

$$m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\} \text{ e } M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\},$$

então

$$Im(f) = f([a,b]) = [m, M].$$

4 Continuidade

4.1 Continuidade e Abertos

Definição 10. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset A$ diremos que B é aberto em A se para cada $b \in B$ existe um $r_b > 0$ tal que $A \cap (b - r_b, b + r_b) \subset B$.*

Note que.

- Todo conjunto é aberto nele mesmo.
- Se $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset A$, B é aberto em A se, e somente se, existe um aberto $\mathcal{O}_B$ de $\mathbb{R}$ tal que $B = \mathcal{O}_B \cap A$.
- Se A é aberto, $B \subset A$ é aberto em A se, e somente se, B é aberto em $\mathbb{R}$.

Recorde que, se $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função, $f^{-1}(\mathcal{O}) = \{d \in D : f(d) \in \mathcal{O}\}$.

Teorema 28. *Seja $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$. A função f é contínua se, e somente se, para todo aberto $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\mathcal{O})$ é aberto em D.*

Prova: Se $f : D \to \mathbb{R}$ é contínua, $\mathcal{O}$ é um aberto de $\mathbb{R}$ e $d \in f^{-1}(\mathcal{O})$, então $f(d) \in \mathcal{O}$ e dado $\epsilon > 0$ tal que $(f(d) - \epsilon, f(d) + \epsilon) \subset \mathcal{O}$, existe $\delta > 0$ tal que $f((d - \delta, d + \delta) \cap D) \subset (f(d) - \epsilon, f(d) + \epsilon)$. Isto mostra que $(d - \delta, d + \delta) \cap D \subset f^{-1}(\mathcal{O})$ e que $f^{-1}(\mathcal{O})$ é aberto em D.

Por outro lado de $f^{-1}(\mathcal{O})$ é aberto em D para dada $\mathcal{O}$ aberto em $\mathbb{R}$, se $d \in D$, dado $\epsilon > 0$ seja $\mathcal{O} = (f(d) - \epsilon, f(d) + \epsilon)$. Como $d \in f^{-1}((f(d) - \epsilon, f(d) + \epsilon))$ que é aberto em D existe $\delta > 0$ tal que $(d - \delta, d + \delta) \cap D \subset f^{-1}((f(d) - \epsilon, f(d) + \epsilon))$, ou seja

$$x \in D, |x - d| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(d)| < \epsilon.$$

e f é contínua em d.$\square$

4.2 Continuidade e conexos

Teorema 29. *Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então $f(I)$ é um intervalo.*

Prova: Basta notar que, dados dois pontos $f(a) \neq f(b)$ em $f(I)$ com $a < b$, tomando a restrição de f ao intervalo $[a, b]$, do teorema do valor intermediário, para todo k entre $f(a)$ e $f(b)$ existe um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$, ou seja $f(I)$ é um intervalo.$\square$

4.3 Continuidade e Compactos

Teorema 30. *Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto $f : K \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então $f(K)$ é compacto.*

Prova: Seja $\{\mathcal{O}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma cobertura aberta de $f(K)$. Como, para cada $\lambda \in \Lambda$, $f^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)$ é aberto em K existe U_λ aberto em $\mathbb{R}$ tal que $U_\lambda \cap K = f^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)$. Assim $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é uma cobertura aberta de K. Como K é compacto, existe $\Lambda' \subset \Lambda$ finito tal que $\cup_{\lambda' \in \Lambda'} U_{\lambda'} \supset K$. Segue que $\{\mathcal{O}_{\lambda'} : \lambda' \in \Lambda'\}$ é uma subcobertura finita da cobertura $\{\mathcal{O}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de $f(K)$. Isto mostra que $f(K)$ é compacto.$\square$

Outra Pova: Seja $\{y_n\}$ uma seqüência em $f(K)$. Então existe seqüência $\{x_n\}$ em K tal que $y_n = f(x_n)$. Como K é compacto, $\{x_n\}$ tem uma subseqüência $\{x_{\phi(n)}\}$ ($\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente) convergente com limite $\bar{x} \in K$. Como $x_{\phi(n)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}$, $y_{\phi(n)} = f(x_{\phi(n)}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\bar{x})$ e $\{y_n\}$ tem uma subseqüência convergente com limite em $f(K)$. Logo, $f(K)$ é compacto.$\square$

Teorema 31 (Weierstrass)**.** *Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ é contínua, existem $x_1, x_2 \in K$ tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in K$.*

De fato: Como $f(K)$ é compacto, $L = \sup\{y : y \in f(K)\}$ e $\ell = \inf\{y : y \in f(K)\}$ pertencem a $f(K)$. Logo, existem $x_1, x_2 \in K$ tais que $f(x_1) = \ell \leq f(x) \leq L = f(x_2)$, para todo $x \in K$. $\square$

Teorema 32. *Se $f : K \to \mathbb{R}$ é contínua e injetiva e $C = f(K)$ então $f^{-1} : C \to \mathbb{R}$ é contínua.*

De fato: Se $C \ni c_n = f(k_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} c = f(k) \in C$ então $\{k_n\}$ é uma seqüência em K e portanto tem uma subseqüência convergente com limite em K. Para qualquer $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente e tal que $\{k_{\phi(n)}\}$ é convergente com limite k_ϕ temos que

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{f(k_{\phi(n)})}_{=c_{\phi(n)}} = f(k_\phi) = c = f(k) \text{ e } k_\phi = k.$$

Logo, o conjunto dos valores de aderência da seqüência $\{k_n\}$ é o conjunto unitário $\{k\}$ e portanto $f^{-1}(c_n) = k_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} k = f^{-1}(c)$. Isto mostra que $f^{-1} : C \to \mathbb{R}$ é contínua.

Teorema 33. *Se I é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua e injetiva então f é estritamente crescente ou estritamente decrescente.*

Prova: Sejam $a, b, c \in I$ com $a < b < c$. O resultado segue mostrando que ou $f(a) < f(b) < f(c)$ ou $f(a) > f(b) > f(c)$. Provaremos isto usando o Teorema do Valor Intermedário.

- $\boxed{\mathbf{f(a) < f(c) :}}$ Se $f(b) < f(a)$ existe $d \in (b, c)$ tal que $f(d) = f(a)$ e se $f(b) > f(c)$ existe $d \in (a, b)$ tal que $f(d) = f(c)$. Em qualquer dos casos isto contradiz a injetividade. Logo $f(a) < f(b) < f(c)$.
- $\boxed{\mathbf{f(a) > f(c) :}}$ Se $f(b) > f(a)$ existe $d \in (b, c)$ tal que $f(d) = f(a)$ e se $f(b) < f(c)$ existe $d \in (a, b)$ tal que $f(d) = f(c)$. Em qualquer dos casos isto contradiz a injetividade. Logo $f(a) > f(b) > f(c)$. $\square$

Teorema 34. *Se $f : D \to \mathbb{R}$ é tal que, dado $\epsilon > 0$ existe função contínua $g : D \to \mathbb{R}$ tal que $|g(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in D$, então f é contínua.*

Prova: Seja $d \in D$, $\epsilon > 0$ e $g : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $|f(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{3}$, $\forall x \in D$. Como g é contínua em d, existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $|x - d| < \delta$ implica $|g(x) - g(d)| < \frac{\epsilon}{3}$. Logo, $x \in D$, $|x - d| < \delta$ implica

$$|f(x) - f(d)| \leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(d)| + |g(d) - f(d)| < \epsilon. \square$$

4.4 Continuidade Uniforme

Definição 11 (Continuidade Uniforme)**.** *Se $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função, dizemos que f é uniformemente contínua se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in D$, $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

Note que:

- Nem toda função contínua é uniformemente contínua.

  Exemplo: $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ não é unformemente contínua em $(0, \infty)$ mas é uniformemente contínua em $[r, \infty)$ para qualquer $r > 0$.

- Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função tal que existem contantes $C > 0$ e $\theta \in (0, 1]$ tais que $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^{\theta}$, $\forall x, y \in D$. É fácil ver que f é uniformemente contínua. Dizemos que f é Hölder contínua se $\theta \in (0, 1)$ e Lipschitz contínua se $\theta = 1$.

  Exemplo: $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ é Hölder contínua com expoente $\theta = \frac{1}{2}$.

Teorema 35. *Se $f : D \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua então f leva seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy.*

De fato: Seja $\{x_n\}$ uma seqüência de Cauchy em D (note que o limite desta seqüência não precisa estar em D). Da continuidade uniforme, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $x, y \in D$ e $|x-y| < \delta$ então $|f(x)-f(y)| < \epsilon$. Seja $N \in$

$\mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \delta$ para todo $n, m \geqslant N$. Segue que $|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$, para todo $n, m \geqslant N$. Isto mostra que $\{f(x_n)\}$ é de Cauchy.$\square$

Corolário 13. *Se $f : D \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua então para cada ponto de acumulação d' de D existe o limite $\lim\limits_{x \to d'} f(x)$.*

Teorema 36. *Se $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ é compacto e $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ é contínua então $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.*

Prova: Dado $\epsilon > 0$ e $\kappa \in \mathcal{K}$, existe $\delta_\kappa > 0$ tal que, se $x \in \mathcal{K}$ e $x \in (\kappa - 2\delta_\kappa, \kappa + 2\delta_\kappa)$ então $|f(x) - f(\kappa)| < \frac{\epsilon}{2}$. Se $I_\kappa := (\kappa - \delta_\kappa, \kappa + \delta_\kappa)$, como $\cup_{\kappa \in \mathcal{K}} I_\kappa \supset \mathcal{K}$ e $\mathcal{K}$ é compacto existem $n \in \mathbb{N}^*$ e $\kappa_1, \cdots, \kappa_n$ tais que $\cup_{i=1}^n I_{\kappa_i} \supset \mathcal{K}$. Seja $\delta = \min\{\delta_{\kappa_1}, \cdots, \delta_{\kappa_n}\}$.

Logo, se $\kappa, x \in \mathcal{K}$ e $|\kappa - x| < \delta$ então, $\kappa \in I_{\kappa_i}$, para algum $i \in \{1, \cdots, n\}$ e $|\kappa - \kappa_i| < \delta_{\kappa_i}$ e $|x - \kappa_i| \leqslant |x - \kappa| + |\kappa - \kappa_i| < 2\delta_i$. Desta forma $|f(\kappa) - f(\kappa_i)| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|f(x) - f(\kappa_i)| < \frac{\epsilon}{2}$. Da desigualdade triangular temos $|f(\kappa) - f(x)| < \epsilon$.$\square$

Teorema 37. *Toda função uniformemente contínua $f : D \to \mathbb{R}$ admite uma única extensão contínua a D^-. Esta extensão é uniformemente contínua.*

Prova: Se $x \in D$ defina $\bar{f}(x) = f(x)$ e se d' é ponto de acumulação de D que não pertence a D defina $\bar{f}(d') = \lim\limits_{x \to d'} f(x)$. Mostremos

que $\bar{f}$ é uniformemente contínua.

Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in D$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Agora, se $\bar{x}, \bar{y} \in D^-$, $|\bar{x} - \bar{y}| < \delta$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ são seqüências em D, $x_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \bar{x}$ e $y_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \bar{y}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - y_n| < \delta$, $\forall n \geqslant N$. Logo, $|f(x_n) - f(y_n)| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall n \geqslant N$ e, passando o limite, $|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{y})| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Qualquer outra extensão contínua coincide com f em D e portanto nos pontos de acumulação de D que não pertencem a D.$\square$

4.5 Descontinuidades

Definição 12. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. Um ponto de descontinuidade ou uma descontinuidade da função f é um ponto $d \in D$ no qual f não é contínua. É claro que descontinuidades são pontos de acumulação de D.*

Uma descontinuidade d é de primeira espécie se o limite $\lim\limits_{x\to d^+} f(x)$ (se d é um ponto de acumulação à direita) existe e o limite $\lim\limits_{x\to d^-} f(x)$ (se d é um ponto de acumulação à esquerda) existe.

Uma descontinuidade que não é de primeira espécie é de segunda espécie.

Escreveremos $f(d^\pm) = \lim\limits_{x\to d^\pm} f(x)$ quando o limite existir.

Teorema 38. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função monótona.*

1) *f não admite descontinuidades de segunda espécie.*

2) *Se $f(D)$ é denso em algum intervalo I, então f é contínua.*

Prova: 1)Dado $d \in D$, como f é monótona, $\lim_{x\to d^+} f(x)$ (se d é ponto de acumulação à direita) existe e $\lim_{x\to d^-} f(x)$ (se d é ponto de acumulação à esquerda) existe.

2) Se f é não-decrescente e $f(d^+) \neq f(d^-)$ e para todo $x \in D$, $x > d$, $f(x) \geqslant f(d^+)$ e para todo $x \in D$, $x < d$, $f(x) \leqslant f(d^-)$ logo $I \supset [f(d^-), f(d^+)]$ e ou $(f(d^-), f(d))$ ou $(f(d), f(d^+))$ é um intervalo aberto e não vazio que não contém pontos de D contradizendo a densidade de D em I. Segue que $f(d^+) = f(d^-)$ e f é contínua em d. O caso f não-crescente é análogo.$\square$

Teorema 39. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função cujas descontinuidades são todas de primeira espécie o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável. Em particular, se f é monótona o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável.*

Prova: Seja $\sigma(x) = \max\{|f(x) - f(x^-)|, |f(x) - f(x^+)|\}$, $x \in D$. O conjunto das descontinuidade de f é $S = \{x \in D : \sigma(x) > 0\}$. Se $S_n = \{x \in D : \sigma(x) > \frac{1}{n}\}$, $S = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$.

Mostremos que os pontos de S_n são todos isolados.

Seja $s \in S_n$. Se s é um ponto de acumulação à direita de D. Da definição de $f(s^+)$, dado $n \in \mathbb{N}^*$ existe $\delta > 0$ tal que $s < x < s + \delta$, $x \in D$, implica $f(s^+) - \frac{1}{4n} < f(x) < f(s^+) + \frac{1}{4n}$. Logo, para cada $x \in (s, s+\delta) \cap D$, $\sigma(x) \leqslant \frac{1}{2n}$.

Semelhantemnte, se s é um ponto de acumulação à esquerda de D, existe $\delta > 0$ tal que $\sigma(x) \leqslant \frac{1}{2n}$, para cada $x \in (s - \delta, s) \cap D$. Segue que s é um ponto isolado de S_n.

Disto segue que S_n é enumerável e portanto S é enumerável.$\square$

4.6 Semicontinuidade Superior e Inferior

Recorde que, se $D \subset \mathbb{R}$, c é um ponto de acumulação de D e $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função que é limitada em uma vizinhança de $c \in \mathbb{R}$, definimos

$$\overline{\lim_{x \to c}}\, f(x) := \lim_{r \to 0^+} \sup\{f(x) : x \in D,\ 0 < |x - c| < r\} \quad \text{e}$$
$$\underline{\lim_{x \to c}}\, f(x) := \lim_{r \to 0^+} \inf\{f(x) : x \in D,\ 0 < |x - c| < r\}.$$

Definimos também, para qualquer ponto $c \in D^-$,

$$\overline{\mathrm{Lim}}_{x \to c}\, f(x) := \lim_{r \to 0^+} \sup\{f(x) : x \in D,\ |x - c| < r\} \quad \text{e}$$
$$\underline{\mathrm{Lim}}_{x \to c}\, f(x) := \lim_{r \to 0^+} \inf\{f(x) : x \in D,\ |x - c| < r\}$$

Definição 13. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e $c \in D$. Então, f é semicontínua superiormente em c se*

$$f(c) = \overline{Lim}_{x \to c}\, f(x) \qquad (\ f(c) \geqslant \overline{\lim_{x \to c}}\, f(x)\ )$$

e f é semicontínua inferiormente em c se

$$f(c) = \underline{Lim}_{x \to c}\, f(x) \qquad (\ f(c) \leqslant \underline{\lim_{x \to c}}\, f(x)\ ).$$

Se f é semicontínua superiormente (inferiormente) em todos os pontos de D dizemos simplesmente que f é semicontínua superiormente (inferiormente).

Teorema 40. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função semicontínua superiormente (inferiormente). Se $k \in \mathbb{R}$ então existe um aberto O_k de $\mathbb{R}$ tal que*

$$O_k \cap D = \underbrace{\{x \in D : f(x) < k\}}_{=f^{-1}((-\infty,k))} \quad (O_k \cap D = \underbrace{\{x \in D : f(x) > k\}}_{=f^{-1}((k,\infty))})$$

Prova: Para $c \in D$ com $f(c) < k$, da definição da semicontinuidade superior, existe $r_c > 0$ tal que $f(x) < k$ para todo $x \in D$, $|x - c| < r_c$. Seja $I_c = (c - r_c, c + r_c)$ e defina

$$O_k = \cup_{c \in f^{-1}((-\infty,k))} I_c$$

É claro que, para todo $x \in O_k \cap D = f^{-1}((-\infty, k))$. Demonstre a characterização da semicontinuidade inferior como exercício.$\square$

5 Derivadas

Definição 14 (Derivada)**.** *Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$ um ponto de acumulação de D_f. Se existir o limite $\lim\limits_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = L \in \mathbb{R}$, diremos que L é a* **derivada** *de f em p e escreveremos*

$$f'(p) = L = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}.$$

Se f admitir derivada $f'(p)$ em p, diremos que f é **derivável** ou **diferenciável em** p.

Se f admitir derivada em todo ponto de $A \subset D_f$, diremos que f é **derivável** ou **diferenciável em** $A \subset D_f$.

Se $A = D_f$, diremos simplesmente que f é **derivável** ou **diferenciável**.

Se $f : D \to \mathbb{R}$ possui derivada num ponto $d \in D$ que é também um ponto de acumulação de D, para $h \in \mathbb{R}$ tal que $d + h \in D$, excrevemos (resto da aproximação)

$$r(h) = f(d + h) - f(d) - f'(d)h.$$

Nesses pontos, definimos $r : \{h \in \mathbb{R} : d + h \in D_f\} \to \mathbb{R}$ e escrevemos $f(d+h) = f(d) + f'(d)h + r(h)$ e, fazendo $\sigma(h) = \frac{r(h)}{h}$, $h \neq 0$, $\lim\limits_{h\to 0} \sigma(h) = 0$.

É fácil ver que f é diferenciável em d se, e somente se, existe função σ com $\lim\limits_{h\to 0} \sigma(h) = 0$ tal que $f(d+h) = f(d) + [f'(d) + \sigma(h)]h$.

Definição 15 (Derivada à Direita e à Esquerda)**.** *Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$ um ponto de acumulação à direita de D_f. Se existir o limite $\lim\limits_{x\to p^+} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = L^+ \in \mathbb{R}$, diremos que L^+ é a* **derivada à direita** *de f em p e escreveremos*

$$f'(p^+) = L^+ = \lim_{x\to p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

De maneira semelhante definimos a derivada à esquerda.

5.1 A função derivada

Já definimos a derivada de $f : D_f \to \mathbb{R}$ em pontos $p \in D_f$ que também são pontos de acumulação de D_f. Sendo assim, se

$$D_{f'} = \Big\{x \in D_f : \ x \text{ é um ponto de acumulação de } D_f \text{ e } \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ existe.}\Big\} \subset D_f$$

definimos a função $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$ por

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad x \in D_{f'}.$$

A função f' é dita **função derivada** ou simplesmente **derivada** de f.

Agora provamos que diferenciabilidade implica continuidade:

Teorema 41. *Se f for diferenciável em $p \in D_f$, então f será contínua em p.*

Prova: Recorde que $p \in D_f$ é um ponto de acumulação de D_f. Vamos mostrar que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = f(p)$ ou que $\lim\limits_{x\to p}(f(x) - f(p)) = 0$.

Escrevemos.

$$f(x) - f(p) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p).$$

Assim

$$\lim_{x\to p}(f(x) - f(p)) = \lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot \lim_{x\to p}(x - p) = f'(p) \cdot 0 = 0.$$

Portanto f é contínua em p. $\square$

Observação: Note que não vale a recíproca. A função $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$ mas não é diferenciável em $x = 0$.

Exemplo 4 (Critério Negativo)**.** *Se f não é contínua em p então f não é diferenciável em p.*

Exemplo 5. *A função $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 1, \\ 2 & x > 1 \end{cases}$ é diferenciávelem $x = 1$?*

Solução: Como

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \neq 2 = \lim_{x\to 1^+} f(x),$$

$f(x)$ não é contínua em $x = 1$, logo não é diferenciável em $x = 1$.

5.2 Derivadas de Ordens Superiores

Seja f uma função derivável em $D_{f'}$. A função $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$ é dita **derivada** de f ou **derivada primeira de** f.

Então, podemos definir a derivada de f', que será chamada **derivada segunda de** f. Neste caso,

$$(f')'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},$$

quando o limite existir. Escrevemos $f'' = f^{(2)} = (f')'$ para denotar a derivada segunda de f.

Para $n \in \mathbb{N}^*$, a **derivada n-ésima de** f será denotada por $f^{(n)}$, quando esta existir.

5.3 Fórmulas e Regras de Derivação

Teorema 42 (Fórmulas de Derivação)**.** *Se $k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, são válidas as fórmulas de derivação a seguir*

(a) $f(x) = k \Rightarrow \ f'(x) = 0,$

(b) $f(x) = x^n \ \Rightarrow \ f'(x) = nx^{n-1},$

(c) $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \ \Rightarrow \ f'(x) = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1},$

(d) $f(x) = \text{sen } x \ \Rightarrow \ f'(x) = \cos x,$

(e) $f(x) = \cos x \ \Rightarrow \ f'(x) = -\text{sen } x,$

(f) $f(x) = e^x \Longrightarrow \ f'(x) = e^x,$

(g) $f(x) = \ln x \ \Longrightarrow \ f'(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$

Prova: A afirmativa (a) é trivial.

Prova do item (b). Lembremos que

$$y^n - x^n = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}).$$

Então,

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{y^n - x^n}{y - x} = \lim_{y \to x}(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}) = nx^{n-1}.$$

Prova do item (c). Fazendo $u = \sqrt[n]{y}$ e $v = \sqrt[n]{x}$ temos, da continuidade de $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$, $y \to x \Rightarrow u \to v$. Assim

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x}}{y - x} = \lim_{u \to v} \frac{u - v}{u^n - v^n} = \frac{1}{nv^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Prova do item (d).

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{\text{sen}y - \text{sen}x}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{2sen\left(\frac{y-x}{2}\right)\cos\left(\frac{y+x}{2}\right)}{y-x} = \cos x.$$

Prova do item (e). Análoga ao item (d).

Prova do item (f).

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

pois, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$.

Prova do item (g).

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right).$$

Fazendo $u = \dfrac{h}{x}$ temos que para $h \to 0$, $u \to 0$, assim

$$\lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(1+u\right)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x},$$

pois, $\lim\limits_{u\to 0}\left(1+u\right)^{\frac{1}{u}} = \lim\limits_{r\to\infty} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r = e$.

5.4 Propriedades da Derivada

Teorema 43 (Propriedades da Derivada)**.** *Sejam f e g funções diferenciáveis em p e k uma constante. Então*

(a) kf será diferenciável em p e

$$(kf)'(p) = kf'(p), \textbf{ (Multiplicação por constante)}$$

(b) $f+g$ será derivável em p e

$$(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p), \textbf{ (Derivada da Soma)}$$

(c) fg será derivável em p e

$$(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p), \textbf{ (Derivada do Produto)}$$

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)$ será derivável em p, se $g(p) \neq 0$ e, neste caso, teremos

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p)-f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}, \textbf{ (Derivada do Quociente)}.$$

Como $\lim\limits_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = f'(p)$ e $\lim\limits_{x\to p}\frac{g(x)-f(p)}{x-p} = g'(p)$, temos

(a) $\lim\limits_{x\to p}\frac{kf(x)-kf(p)}{x-p} = \lim\limits_{x\to p}k\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = k\lim\limits_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = kf'(p)$.

(b) $\lim\limits_{x\to p}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(p)}{x-p} = \lim\limits_{x\to p}\frac{(f(x)-f(p)+(g(x)-g(p))}{x-p}$

$= \lim\limits_{x\to p}\frac{(f(x)-f(p)}{x-p} + \lim\limits_{x\to p}\frac{(g(x)-g(p))}{x-p} = f'(p) + g'(p)$.

(c) Note que g é contínua em p. Logo $\lim\limits_{x\to p}g(x) = g(p)$ e

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)g(x)-f(p)g(p)}{x-p} = \lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p}g(x) + f(p)\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right)$$

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}\lim_{x\to p}g(x) + f(p)\lim_{x\to p}\frac{g(x)-g(p)}{x-p}$$

$$f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$$

(d) Como g é contínua em p e $g(p) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to p}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(p)}$, e

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to p}\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(p)}{g(p)}}{x-p} &= \lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)g(p)-f(p)g(x)}{x-p}\frac{1}{g(x)g(p)}\right)\\
&= \lim_{x\to p}\left(\frac{(f(x)-f(p))g(p)-f(p)(g(x)-g(p))}{x-p}\frac{1}{g(x)g(p)}\right)\\
&= \lim_{x\to p}\left(\left(\frac{f(x)-f(p)}{x-p}g(p) - f(p)\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right)\frac{1}{g(x)g(p)}\right)\\
&= \left(\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}g(p) - f(p)\lim_{x\to p}\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right)\lim_{x\to p}\frac{1}{g(x)g(p)}\\
&= \left(f'(p)g(p) - f(p)g'(p)\right)\frac{1}{g(p)^2}.
\end{aligned}$$

5.5 A Regra da Cadeia

A Regra da Cadeia nos fornece uma maneira de calcular a derivada da função composta $h = f \circ g$ em termos das derivadas de f e de g.

Teorema 44 (Regra da Cadeia)**.** *Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ diferenciáveis com $\mathrm{Im}(g) \subset D_f$. Se g é diferenciável em p, $g(p)$ é ponto de acumulação de D_f, f é diferenciável em $g(p)$ e $h = f \circ g$, então h é diferenciável em p e*

$$h'(p) = f'(g(p))g'(p). \tag{1}$$

De fato: Faça $q = g(p)$. Sejam σ_g e σ_f definidas em vizinhanças de 0 com $\lim_{h\to 0} \sigma_g(h) = 0$ e $\lim_{k\to 0} \sigma_f(k) = 0$ tais que

$$\begin{aligned} g(p+h) &= g(p) + [g'(p) + \sigma_g(h)]h \text{ e} \\ f(q+k) &= f(q) + [f'(q) + \sigma_f(k)]k. \end{aligned}$$

Fazendo $k = g(p+h) - g(p) = [g'(p) + \sigma_g(h)]h$ temos $g(p+h) = q + k$ e

$$\begin{aligned} f(g(p+h)) &= f(q+k) = f(q) + [f'(q) + \sigma_f(k)]k \\ &= f(q) + [f'(q) + \sigma_f(k)][g'(p) + \sigma_g(h)]h \\ &= f(g(p)) + f'(g(p))g'(p)h \\ &+ [\sigma_f(g(p+h) - g(p))[g'(p) + \sigma_g(h)] + f'(q)\sigma_g(h)]h \end{aligned}$$

Agora, se $\sigma_{f\circ g}(h) = [\sigma_f(g(p+h) - g(p))[g'(p) + \sigma_g(h)] + f'(q)\sigma_g(h)]$ temos que $\lim\limits_{h\to 0} \sigma_{f\circ g}(h) = 0$.□

5.6 Derivada da Função Inversa

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função que tem inversa, $D_{f^{-1}} = Im(f)$ e $f^{-1} : D_{f^{-1}} \to \mathbb{R}$. Então, para todo $x \in D_{f^{-1}}$,

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Vimos que se f é contínua (em um compacto), f^{-1} é contínua.

Se, além disso, f e f^{-1} forem deriváveis, pela Regra da Cadeia,

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1.$$

Logo, $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ e

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Para estudar a diferenciabilidade de f^{-1} usamos o resultado a seguir.

Proposição 1 (Derivada de funções inversas)**.** *Seja f injetiva, p um ponto de acumulação de $Im(f)$. Se f for diferenciável em $q = f^{-1}(p)$ e f^{-1} é contínua em p, então f^{-1} é diferenciável em p se, e somente se, $f'(f^{-1}(p)) \neq 0$. Neste caso*

$$(f^{-1})'(p) = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}.$$

De fato: Se $f'(f^{-1}(p)) \neq 0$, como f^{-1} é contínua em p, $\lim\limits_{h\to 0} f^{-1}(p+h) = f^{-1}(p)$. Usando $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in D_{f^{-1}}$, temos

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(p) &= \lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(p+h)-f^{-1}(p)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{h}{f^{-1}(p+h)-f^{-1}(p)}}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{f(f^{-1}(p+h))-f(f^{-1}(p))}{f^{-1}(p+h)-f^{-1}(p)}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}\end{aligned}$$

Por outro lado, se f^{-1} é diferenciável em p, da regra da cadeia aplicada a $f \circ f^{-1}$ temos $f'(f^{-1}(p)) \cdot (f^{-1})'(p) = 1$ e $f'(f^{-1}(p)) \neq 0$. $\square$

Exemplo 6. *Se $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$, então $g'(x) = \dfrac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1}$, $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$.*
Recorde que, $x > 0$ se n for par e $x \neq 0$ se n for ímpar.

Solução: Note que $g(x) = x^{\frac{1}{n}} = f^{-1}(x)$ onde $f(u) = u^n$. Então

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{\frac{n-1}{n}})} = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Exemplo 7.

Mostre que a função $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ *definida por* $f(x) = \text{sen} x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *é bijetora.*

De fato: Já sabemos f é contínua e que $\text{Im}(f) \subset [-1,1]$.

Como $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$ e $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, do teorema do valor intermediário que $\text{Im}(f) \supset [-1,1]$ e que f é sobrejetora.

Para verificar que f é injetora observamos que se $x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $x > y$, então $\frac{x-y}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $\frac{x+y}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Logo

$$\text{sen} x - \text{sen} y = 2\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) > 0.$$

Exemplo 8. *A inversa da função* $f(x) = \textit{sen } x$ *, para* $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *é a função g(x)=*arcsen x, *para* $x \in [-1,1]$. *Qual é a derivada de* $g(x)$*?*

Solução: Aplicando a Proposição 1.

$$\text{arcsen}' x = \frac{1}{\cos(\text{arcsen } x)}.$$

Agora, $1 = \cos^2(\text{arcsen} x) + \text{sen}^2(\text{arcsen} x) = \cos^2(\text{arcsen } x) + x^2$, logo $\cos(\text{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$ pois $\cos y \geqslant 0$ para $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Portanto,

$$\text{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De maneira análoga podemos definir as funções trigonométricas inversas do $\cos x$, $\text{tg} x$, $\sec x$ e $\text{cotg } x$, denominadas arccos x, arctg x, arcsec x e arccotg x.

Exemplo 9. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^3$. *Já sabemos que* f *é contínua. Como*

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) \\ &= (x-y)((x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2) \\ &= (x-y)((\frac{x}{2} + y)^2 + \frac{3}{4}x^2) \end{aligned}$$

Segue que $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$ e f é injetora.

Note ainda que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e, do teorema do valor intermediário, f é uma bijeção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Segue ainda que $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua pois ela é contínua em qualquer intervalo compacto. A inversa de f é denotada por $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$. Do teorema sobre a derivada da inversa e do fato que $f'(x) = 3x^2$ deduzimos que $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável se, e somente se, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e, para estes valores de x,

$$\overbrace{(\sqrt[3]{x})'}^{(f^{-1})'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{3(\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{f^{-1}(x)})^2} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}.\square$$

Seja $f : D \to \mathbb{R}$. Dizemos que f tem um máximo (mínimo) local no ponto $d \in D$ se existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leqslant f(d)$ ($f(x) \geqslant f(d)$) para todo $x \in D$, $|x - d| < \delta$. Quando a desigualdade é estrita dizemos que f tem um máximo (mínimo) local estrito. Os máximos e mínimos locais serão chamados de valores extremos e os pontos onde a função assume valores máximos ou mínimos serão chamados de pontos de máximo ou de mínimo.

Segue diretamente da definição de derivada (derivada à direita) que:

- Se $f : D \to \mathbb{R}$ é não-decrescente (não-crescente) e é diferenciável em um ponto $d \in D$ então, $f'(d) \geqslant 0$ ($f'(d) \leqslant 0$). Vale o mesmo resultado para funções diferenciáveis à direita.

- Se $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável à direita (esquerda) em um ponto $d \in D$ e $f'(d^+) > 0$ ($f'(d^-) > 0$) então existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $x \in (d, d+\delta)$ ($x \in (d-\delta, d)$) implica $f(x) > f(d)$ ($f(x) < f(d)$).

- Se $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável à direita (esquerda) em um ponto $d \in D$ e $f'(d^+) < 0$ ($f'(d^-) < 0$) então existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $x \in (d, d+\delta)$ ($x \in (d-\delta, d)$) implica $f(x) < f(d)$ ($f(x) > f(d)$).

- Se $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $d \in D$, d é ponto de acumulação a direita e a esquerda e $f'(d) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $d - \delta < x < d < y < d + \delta \Rightarrow f(x) < f(d) < f(y)$.

- Se $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $d \in D$, d é um ponto de acumulação a direita e a esquerda e f tem um valor extremo local em d então e $f'(d) = 0$.

5.7 Funções deriváveis em intervalos

Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $f' : I \to \mathbb{R}$ for contínua diremos que f é continuamente diferenciável em I ou simplesmente f é de classe C^1 em I.

Existe função diferenciável em um intervalo I que não é continuamente diferenciável

Exemplo 10. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Então f é differenciavel e f' não é contínua em $x = 0$.

A derivada tem a propriedade do valor intermediário

Teorema 45 (Darboux)**.** *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é diferenciável com $f'(a) \neq f'(b)$ então, para todo C entre $f'(a)$ e $f'(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = C$.*

Prova: Suponha que $f'(a) < 0 < f'(b)$. Segue que, para x próximo a a em $[a, b]$, $f(x) < f(a)$ e para x próximo a b em $[a, b]$, $f(x) < f(b)$. Logo, o ponto de mínimo (que existe pelo Teorema de Weierstrass) c de f ocorre em (a, b) e portanto $f'(c) = 0$. Para o caso geral consideramos

- Se $f'(a) < C < f'(b)$, $g(x) = f(x) - C \cdot x$.
- Se $f'(a) > C > f'(b)$, $g(x) = C \cdot x - f(x)$.

A derivada não tem descontinuidades de primeira espécie

Teorema 46. *Se I é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável então f' não tem descontinuidades de primeira espécie.*

Prova: Se a é um ponto de acumulação à direita de I e $L^+ = \lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$ existe, mostremos que $L^+ = f'(a)$.

De modo análogo (exercício), se a é um ponto de acumulação à esquerda de I e $L^- = \lim\limits_{x \to a^-} f'(x)$ existe, mostre que $f'(a) = L^-$.

Se $L^+ > f'(a)$ e $C \in (f'(a), L^+)$ existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) > C$ para todo $x \in (a, a + \delta)$. Escolhendo $b \in (a, a + \delta)$ temos que $f'(b) > C > f'(a)$ o que está em contradição com o Teorema de Darboux pois este implica a existência de $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = C$. Logo, $f'(a) \geq L^+$.

Se $f'(a) > L^+$ e $C \in (L^+, f'(a))$ existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) < C$ para todo $x \in (a, a + \delta)$. Escolhendo $b \in (a, a + \delta)$ temos que $f'(b) < C < f'(a)$ o que está em contradição com o Teorema de Darboux pois este implica a existência de $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = C$. Logo, $f'(a) \leq L^+$. Segue que $L^+ = f'(a)$.$\square$

Teorema 47. *Se $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \leq 0$ ($D^+f(x) \geq 0$) para todo $x \in [a, b)$ e $f(a) = 0$ então $f(x) \leq 0$ ($f(x) \geq 0$) em $[a, b)$.*

Prova: Suponha primeiramente que $D^+f(x) < 0$ para todo $x \in [a, b)$. Se o resultado é falso, existe ao menos um $x \in (a, b)$ tal que $f(x) > 0$. Seja $x_0 = \inf\{x \in (a, b) : f(x) > 0\}$.

Da continuidade de f, $f(x_0) = 0$ e da definição de x_0 existe uma seqüência $x_n \in (x_0, b)$ tal que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. Assim

$$D^+ f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geqslant 0$$

o que é uma contradição. Logo, $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b)$.

Agora consideramos o caso geral $D^+ f(x) \leqslant 0$ para todo $x \in [a, b)$. Neste caso consideramos a função auxiliar $f_\epsilon(x) = f(x) - \epsilon(x - a)$ e temos que $f_\epsilon(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b)$ e para todo $\epsilon > 0$.

Sendo assim $f(x) \leq \epsilon(x - a)$, para todo $x \in [a, b)$ e $\epsilon > 0$. Disto segue que para todo $x \in [a, b)$, $f(x) \leq 0$.

O caso restande será deixado como exercício.$\square$

A hipótese de continuidade não pode ser retirada como estabelece o exercício abaixo.

Exercício 2. *Encontre uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é diferenciável à direita, tal que $D^+ f(x) < 0$ para todo $x \neq 0$, $D^+ f(0) = 0$, f é positiva para $x > 0$ e negativa para $x < 0$ ($f(x) \overset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$).*

Corolário 14. *Se $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+ f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Se $D^+ f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b)$ então f é não-crescente em $[a, b)$.*

Prova: Se $a \leq c < d < b$ seja $g : [c, b) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - f(c)$ e $D^+ g(x) \leq 0$ para todo $x \in [c, b)$. Segue do teorema que $g(x) \leq 0$ para todo $x \in [c, b)$. Em particular $g(d) = f(d) - f(c) \leq 0$.$\square$

Corolário 15. *Se $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+ f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Se $D^+ f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b)$ então f é não-decrescente em $[a, b)$.*

Prova: Exercício.

Exercício 3. *Enuncie e prove resultados semelhantes aos anteriores para a derivada à esquerda.*

Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $f' : I \to \mathbb{R}$ for contínua diremos que f é continuamente diferenciável em I ou simplesmente f é de classe C^1 em I.

Existe função diferenciável em um intervalo I que não é continuamente diferenciável

A derivada tem a propriedade do valor intermediário

Teorema 48 (Darboux)**.** *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é diferenciável com $f'(a) \neq f'(b)$ então, para todo C entre $f'(a)$ e $f'(b)$, existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = C$.*

A derivada não tem descontinuidades de primeira espécie

Teorema 49 (Somente descontinuidades de segunda espécie)**.** *Se I é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável então f' não tem descontinuidades de primeira espécie.*

Teorema 50. *Se $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a,b) \to \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \leqslant 0$ ($D^+f(x) \geqslant 0$) para todo $x \in [a,b)$ e $f(a) = 0$ então $f(x) \leqslant 0$ ($f(x) \geqslant 0$) em $[a,b)$.*

Exercício 4. *Encontre uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é diferenciável à direita, tal que $D^+f(x) < 0$ para todo $x \neq 0$, $D^+f(0) = 0$, f é positiva para $x > 0$ e negativa para $x < 0$ ($f(x) \overset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$).*

Corolário 16. *Se $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a,b) \to \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \leqslant 0$ para todo $x \in [a,b)$ então f é não-crescente em $[a,b)$.*

Corolário 17. *Se $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a,b) \to \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a,b)$ então f é não-decrescente em $[a,b)$.*

Prova: Exercício.

Exercício 5. *Enuncie e prove resultados semelhantes aos anteriores para a derivada à esquerda.*

Corolário 18 (Completaremos a Prova Mais Tarde)**.** *Se $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a,b) \to \mathbb{R}$ contínua então f é de classe C^1.*

Prova: Seja $g = D^+f$ e defina

$$h(t) = f(a) + \int_a^t g(\tau)d\tau.$$

A função h é continuamente diferenciável em $[a,b)$. Se $\phi(t) = h(t) - f(t)$ então $\phi(a) = 0$ e $D^+\phi(t) = 0$ em $[a,b)$. Do teorema anterior $\phi(t) \leqslant 0$ em $[a,b)$.

Como $-\phi(t)$ também satisfaz as condições do teorema anterior, $\phi(t) \geq 0$. Logo $\phi = 0$ em $[a,b)$ ou seja $f = h$ em $[a,b)$.$\square$

6 O Teorema do Valor Médio e suas Conseqüências

O Teorema do Valor Médio é um dos Teoremas teoremas fundamentais das funções diferenciáveis em intervalos. A sua demonstração decorre do seguinte resultado:

Teorema 51 (Teorema do Valor Médio de Cauchy)**.** *Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas que são differenciáveis em (a,b), existe $c \in (a,b)$ para o qual*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Prova: Se

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

h é contínua em $[a, b]$, differenciável em (a, b) e

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b).$$

Para provar o teorema temos que mostrar que $h'(c) = 0$ para algum $c \in (a, b)$. Se h é constante isto vale para todo $c \in (a, b)$. Se $h(x) > h(a)$ para algum $x \in (a, b)$, seja c um ponto $[a, b]$ no qual h atinge o seu máximo. Como $h(a) = h(b)$, $c \in (a, b)$ e $h'(c) = 0$. Se $h(x) < h(a)$ para algum $x \in (a, b)$, escolhemos c em $[a, b]$ para o qual h atinge o seu mínimo. Exatamente como antes $c \in (a, b)$ e $f'(c) = 0$.□

O resultado a seguir é um corolário imediato da prova do teorema anterior.

Corolário 19 (de Rolle)**.** *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $f(a) = f(b)$, então existirá $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Corolário 20 (do Valor Médio)**.** *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

ou seja

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Prova: Basta tomar $g(x) = x$ no Teorema anterior.

Os fatos a seguir são conseqüências do Teorema do Valor Médio.

Corolário 21. *Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é diferenciável*

- *(a) Se $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, b)$, então f não-decrescente em (a, b).*
- *(b) Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, então f crescente em (a, b).*
- *(c) Se $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, então f é constante em (a, b).*

- *(d) Se $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a,b)$, então f não-crescente em (a,b).*

- *(e) Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a,b)$, então f decrescente em (a,b).*

Prova: Para todos os casos note que, para quaisquer $x_1, x_2 \in (a,b)$, do Teorema do Valor Médio, existe $\bar{x}$ entre x_1 e x_2 tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\bar{x})(x_2 - x_1). \square$$

Observação 2 (Teorema da Função Inversa)**.** *Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ é C^1 e $f'(x_0) \neq 0$ então, existe $\delta > 0$ tal que $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ é injetora $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = J$ é um intervalo aberto, e $f^{-1} : J \to I$ é continuamente diferenciável com*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

6.1 Regra de L'Hospital

Regra de L'Hospital

Teorema 52. *Sejam f e g são diferenciáveis em (a,b), e $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$, onde $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ e*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{x \to a}{\longrightarrow} A. \tag{2}$$

Se

$$f(x) \overset{x \to a}{\longrightarrow} 0 \text{ e } g(x) \overset{x \to a}{\longrightarrow} 0 \tag{3}$$

ou se

$$g(x) \overset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty \tag{4}$$

então

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{x \to a}{\longrightarrow} A.$$

O resultado permanece válido se $x \to b$, ou se $g(x) \to -\infty$.

Prova: Primeiramente consideramos o caso $-\infty \leqslant A < +\infty$. Se $q > r > A$, de (2) existe $c \in (a, b)$ tal que, se $a < x < c$ então

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r$$

Se $a < x < y < c$, do Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe $t \in (x, y)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r. \tag{5}$$

Se (3) vale, vazendo $x \to a$ na desigualdade acima

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leqslant r < q \quad (a < y < c) \tag{6}$$

Se (4) vale, mantendo y fixed in (5), podemos escolher $c_1 \in (a, y)$ tal que $g(x) > g(y)$ e $g(x) > 0$ se $a < x < c_1$. Multiplicando (5) por $[g(x) - g(y)]/g(x)$, obtemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \quad (a < x < c_1)\,.$$

Fazendo $x \to a$ nesta desigualdade, (4) mostra que existe $c_2 \in (a, c_1)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} < q \quad (a < x < c_2) \tag{7}$$

Assim, (6) ou (7) mostram que, para qualquer $q > A$ existe c_2 tal que $\frac{f(x)}{g(x)} < q$ se $a < x < c_2$. Do mesmo modo, $-\infty < A \leqslant +\infty$ e $p < A$, podemos encontrar c_3 tal que

$$p < \frac{f(x)}{g(x)} \quad (a < x < c_3)\,.$$

Disto segue o resultado.$\square$

6.2 Teorema de Taylor

Teorema de Taylor

Teorema 53. *Se $n \in \mathbb{N}^*$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função $n-1$ vezes diferenciável em $[a,b]$ e nvezes diferenciável em (a,b) com $f^{(n-1)} : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Sejam $\alpha, \beta \in [a,b]$, $\alpha \neq \beta$ e*

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^k$$

Então existe ξ entre α e β tal que

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(\beta-\alpha)^n.$$

Para $n = 1$, teste é o teorema do valor médio. Em geral o teorema mostra como aproximar f por polinômios e fornece uma maneira de estimar o erro se conhecermos limitações para $\left|f^{(n)}(\xi)\right|$.

Prova: Seja M o número definido por

$$f(\beta) = P(\beta) + M(\beta-\alpha)^n.$$

Fazendo

$$g(t) = f(t) - P(t) - M(t-\alpha)^n \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Precisamos mostrar que $n!M = f^{(n)}(\xi)$ para algum ξ entre α e β. Segue facilmente que

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!M \quad (a < t < b).$$

Para completar a prova basta mostrar que $g^{(n)}(\xi) = 0$ para algum ξ entre α e β. Como $P^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$, $k = 0, \ldots, n-1$, temos

$$g(\alpha) = g'(\alpha) = \cdots = g^{(n-1)}(\alpha) = 0.$$

Nossa escolha de M implica que $g(\beta) = 0$ e, do Teorema do Valor Médio, $g'(x_1) = 0$ para algum x_1 entre α e β. Como $g'(\alpha) = 0$, de modo semelhante, $g''(x_2) = 0$ para algum x_2 entre α e x_1. Depois de n chegamos a conclusão que $g^{(n)}(x_n) = 0$ para algum x_n entre α ex_{n-1}, isto é, entre α e β.$\square$

7 Funções Convexas e Funções analíticas

7.1 Funções Convexas

Seja I um intervalo, uma função $f : l \to \mathbb{R}$ é convexa quando, dados $a < x < b$ em l, o ponto $(x, f(x))$ fica abaixo da reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. A equação reta é

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \text{ ou } y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

Logo $f : l \to \mathbb{R}$ é convexa se, dados $a < x < b$ em l,

$$f(x) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \text{ ou } f(x) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

Ou seja, $f : l \to \mathbb{R}$ é convexa se uma das desigualdades

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

sempre que $a < x < b$ em l. Dizemos que f é estritamente convexa se a desigualdade nesta definição é estrita.

Teorema 54 (Caracterização de funções convexas). *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável. Então f é convexa se, e somente se, $f''(x) \geqslant 0$, $\forall x \in I$.*

Prova: Se $f''(x) \geqslant 0$, $\forall x \in I$. Então, dados $a, a + h \in I$, existe c entre a e $a + h$ tal que $f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(c)}{2} \cdot h^2$.

Como $f''(c) \geqslant 0$, $f(a+h) \geqslant f(a)+f'(a)\cdot h$. Disto segue que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leqslant f'(a)$ se $h < 0$ e $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geqslant f'(a)$ se $h > 0$.

Isto é, se $a < x < b$ em I, então $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$ ou seja

$$(f(x) - f(a))(b - x) \leqslant (f(b) - f(x))(x - a).$$

Sendo assim,

$$(f(x) - f(a))(b - a - (x - a)) \leq (f(b) - f(a) - (f(x) - f(a)))(x - a) \quad \text{e}$$
$$(f(x) - f(a))(b - a) \leq (f(b) - f(a))(x - a)$$

Isto prova que f é convexa.

Reciprocamente, se f convexa, dados $a < x < b$ em I, temos

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Fazendo $x \to a$ e $x \to b$

$$f'(a) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'(b)$$

e f' é não-decrescente em I. Logo $f''(x) \geqslant 0$, $\forall x \in I$. $\square$

Observação 3. 1) *Seja f diferenciável. Então f' é crescente se, e somente se, f é convexa.*

2) *Pode ser mostrado de forma análoga que, se $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente convexa em I. A recíproca é falsa ($f(x) = x^4$ é estritamente convexa em $\mathbb{R}$ mas $f''(0) = 0$).*

7.2 Funções Analíticas e Séries de Taylor

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Se $a, x \in I^o$, então podemos escrever, para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1}$$
$$+ r_n((x - a)),$$

onde $r_n((x - a)) = \frac{f^{(n)}((1-\theta_n)a+\theta_n x))}{n!} \cdot (x - a)^n, \text{com}\, 0 < \theta_n < 1.$

A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

chama-se a série de Taylor da função f em torno do ponto a.

Esta série pode convergir ou não e mesmo que convirja sua soma pode ser diferente de $f(x)$.

Exemplo 11. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(0) = 0$ *e* $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ *se* $x \neq 0$. *Mostre que* f *é* C^∞, $f^{(n)}(0) = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e portanto a série de Taylor de* f *em* $x = 0$ *é convergente para* $f(0)$ *mas não coincide com* f *para nenhum* $x \neq 0$.

Definição 16. *Se* $I \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo aberto e* $f : I \to \mathbb{R}$ *é uma função, dizemos que* f *é analítica em* I *se, para cada* $a \in l$ *existe* $\epsilon > 0$ *tal que a série de Taylor* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$ *é convergente com soma* $f(x)$, $\forall x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$.

É claro que, a série de Taylor $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$ converge para $f(x)$ se, e somente se, $\lim\limits_{n \to a} r_n((x-a)) = 0$.

Exemplo 12.

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Veremos mais tarde que, se a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ tem raio de convergência $R > 0$ então a função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad x \in (a-R, a+R)$$

é analítica.

8 Funções de Variação Limitada (BV)

8.1 Funções de Variação Limitada (BV)

Se $r \in \mathbb{R}$, $r^+ = \max\{r, 0\}$ e $r^- = \max\{-r, 0\}$ ($r = r^+ - r^-$, $|r| = r^+ + r^-$).

Uma coleção $\{a_0, \cdots, a_k\}$ de pontos em $[a, b]$ é chamada **uma partição** do intervalo $[a, b]$ se $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b$. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e

$\{a_0, \cdots, a_k\}$ uma partição de $[a,b]$. Escrevemos

$$p = \sum_{i=1}^{k} [f(a_i) - f(a_{i-1})]^+, \ n = \sum_{i=1}^{k} [f(a_i) - f(a_{i-1})]^-, \text{ e}$$
$$t = \sum_{i=1}^{k} |f(a_i) - f(a_{i-1})| = p + n \text{ e } f(b) - f(a) = p - n$$

Sejam

$$P_a^b = \sup\{p : k \in \mathbb{N} \text{ e } a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b \text{ partição de } [a,b]\}$$

$$N_a^b = \sup\{n : k \in \mathbb{N} \text{ e } a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b \text{ partição de } [a,b]\}$$

$$T_a^b = \sup\{t : k \in \mathbb{N} \text{ e } a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b \text{ partição de } [a,b]\}$$

Dizemos que P_a^b, N_a^b e T_a^b são as variações positiva, negativa e total de f. É claro que

$$\max\{P_a^b, N_a^b\} \leqslant T_a^b \leqslant P_a^b + N_a^b \quad \text{e} \quad f(b) - f(a) = P_a^p - N_a^b$$

A função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é de variação limitada se $T_a^b < \infty$. Notação $f \in BV([a,b])$.

8.2 Funções Monótonas e Lipschitzianas são BV

Teorema 55. 1) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é Lipschitz contínua então $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é de variação limitada.*

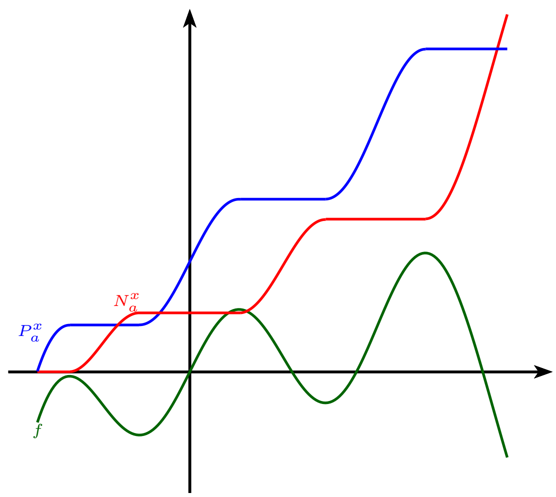
2) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é monótona então $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é de variação limitada.*

3) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é de variação limitada existem funções não-decrescentes $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = g(x) - h(x)$.*

Prova: 1) Se f é Lipschitz, $\max\{P_a^b, N_a^b\} \leq T_a^b \leq L(b-a) < \infty$ onde $L > 0$ é a constante de Lipschitz.

2) Se f é monótona então $T_a^b = |f(b) - f(a)| < \infty$.

3) Se $T_a^b < \infty$, defina $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(a) + P_a^x$ e $h(x) = N_a^x$, para cada $x \in [a,b]$. É claro que g, h são não-decrescentes e que $f(x) = g(x) - h(x)$. $\square$



8.3 Monotonicidade e Diferenciabilidade

Lema 4. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é monótona, então f é diferenciável exceto possivelmente em um conjunto $E \subset [a,b]$ com $m^*(E) = 0$.*

Prova: Faremos apenas o caso f não-descrescente. Considere

$$\overline{d^+} f(x) = \overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant \underline{d^+} f(x) = \underline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$\overline{d^-} f(x) = \overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \geqslant \underline{d^-} f(x) = \underline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Provemos que $\underline{d^+} f(x) \geqslant \overline{d^-} f(x)$ e $\underline{d^-} f(x) \geqslant \overline{d^+} f(x)$ exceto em um conjunto de medida exterior nula.

Vamos apenas considerar o conjunto E dos pontos $x \in [a,b]$ para os quais $\underline{d^-} f(x) < \overline{d^+} f(x)$. O conjunto E é a união dos conjuntos

$$E = \Big\{ x \in [a,b] : \underline{d_-} f(x) < \overline{d^+} f(x) \Big\} = \bigcup_{\substack{u,v \in \mathbb{Q} \\ v<u}} E_{u,v}$$

$$\text{onde} \quad E_{u,v} = \Big\{ x \in [a,b] : \underline{d_-} f(x) < v < u < \overline{d^+} f(x) \Big\}$$

Logo, é suficiente mostrar que $m^*(E_{u,v}) = 0$. Seja $s = m^*(E_{u,v})$ e, dado $\epsilon > 0$, $E_{u,v}$ está contido em um aberto O com $m^*(O) < s + \epsilon$.

Para cada $x \in E_{u,v}$, podemos escolher $h > 0$ arbitrariamente pequeno de modo que o intervalo $[x-h, x]$ está contido em O e

$$f(x) - f(x-h) < vh \tag{8}$$

Do Lema de Vitali, escolhemos uma coleção $\{I_1, \ldots, I_N\}$ disjunta desses intervalos cujos interiores cobrem $A \subset E_{u,v}$ com $m^*(A) > s - \epsilon$. Somando (8) para todos estes intervalos

$$\sum_{n=1}^{N} [f(x_n) - f(x_n - h_n)] < v \underbrace{\sum_{n=1}^{N} h_n}_{\substack{\| \\ v\, m^*(\bigcup_{n=1}^{N} I_n)}} < v\, m^*(O) < v(s+\epsilon).$$

Agora, cada $y \in A$ e k arbitrariamente pequeno $[y, y+k] \subset I_n$ e

$$f(y+k) - f(y) > uk. \tag{9}$$

Usando o Lema de Vitali temos uma coleção disjunta $\{J_1, \cdots, J_M\}$ desses intervalos que cobrem $B \subset A$ com $m^*(B) > m^*(A) - \epsilon > s - 2\epsilon$. Somando

(9) para todos esses intervalos temos

$$\sum_{i=1}^{M} f(y_i+k_i)-f(y_i) > u \underbrace{\sum_{i=1}^{M} k_i}_{\substack{\| \\ u\, m^*(\bigcup_{i=1}^{M} J_i)}} > u\,(s-2\epsilon).$$

Cada intervalo J_i está contido em algum intervalo I_n e, como f é crescente, se somamos para todos os i para os quais $J_i \subset I_n$, temos

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant M\\ J_i\subset I_n}} f(y_i+k_i)-f(y_i) \leqslant f(x_n)-f(x_n-h_n)$$

Logo

$$u(s-2\epsilon) < \sum_{i=1}^{M} f(y_i+k_i)-f(y_i) \leqslant \sum_{n=1}^{N} f(x_n)-f(x_n-h_n) < v(s+\epsilon)$$

e, para todo $\epsilon > 0$,

$$u(s-2\epsilon) < v(s+\epsilon).$$

Segue que, $us \leqslant vs$. Como $u > v$, concluímos que $s = 0$. Isto mostra que $m^*(E_{u,v}) = 0$ e consequentemente $m^*(E) = 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

existe exceto possivelmente em um conjunto E com $m^*(E) = 0$.$\square$

8.4 Lipschitz Continuidade e Diferenciabilidade

Corolário 22. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I. Então f é diferenciável exceto possivelmente em um conjunto E com $m^*E = 0$.*

Corolário 23. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I. Então f é diferenciável em um subconjunto denso de I.*

Teorema 56. *Seja I um intervalo aberto da reta e $g : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I. Então g é continuamente diferenciável se, e somente se, para cada $x_0 \in I$,*

$$\left|\frac{g(x_0+s+h)-g(x_0+s)}{h} - \frac{g\left(x_0+h\right)+g\left(x_0\right)}{h}\right| \overset{|s|+|h|\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{10}$$

Prova: Se f é $C^1(I)$, existem $\theta, \theta' \in (0,1)$ tais que

$$\begin{aligned}&\left|\frac{g(x_0+s+h)-g(x_0+s)}{h} - \frac{g\left(x_0+h\right)+g\left(x_0\right)}{h}\right| \\ &= \left|g'(x_0+s+\theta h) - g'(x_0+\theta' h)\right| \overset{|s|+|h|\to 0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Agora mostraremos que se a $g : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável, (10) implica que $g : I \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável.

De (10), dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $|x - x_0| < \delta$ e $|h| < \delta$,

$$\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - \frac{g\left(x_0+h\right)+g\left(x_0\right)}{h}\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Segue que, para $|x - x_0| < \delta$,

$$|g'(x) - g'(x_0)| = \left|\lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right\}\right| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

e g' é contínua em x_0.

Para concluir a prova, basta mostrar que $g : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável.

Como g Lipschitz contínua, ela é diferenciável em um conjunto denso de pontos. Para cada $x_0 \in I, \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|g(x+h) - g(x) - g\left(x_0+h\right) + g\left(x_0\right)\right| \leqslant \frac{\epsilon}{4}|h|,\ |x - x_0| + |h| < \delta$$

e existe $x^* \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que $g'\left(x^*\right)$ existe. Logo, para $h \neq 0$ suficientemente pequeno

$$\left|\frac{g\left(x_0+h\right)-g\left(x_0\right)}{h} - g'\left(x^*\right)\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2},$$

$$0 \leq \left\{\overline{\lim_{h\to 0}} - \underline{\lim_{h\to 0}}\right\} \frac{g\left(x_0+h\right)-g\left(x_0\right)}{h} \leqslant \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, isto implica que $g'(x_0)$ existe. $\square$