2.ª Prova - SMA 380 - Análise

Professor: Alexandre Nolasco de Carvalho

Questão	Nota
01.ª	
02.ª	
03.ª	
04.ª	
05.ª	
Total	

Nome: ____

Número USP: ______________________________________

17.05.2024

Instruções:

- Assinale todas alternativas verdadeiras com V e as falsas com F.
- Em cada questão escolha **uma alternativa** e justifique (prova ou contra-exemplo).
- Cada questão vale 2.0 pontos, desses 1.0 é o valor da justificativa da alternativa escolhida.
- A prova é individual e sem consulta. Boa prova!

Se preferir, você pode resolver a Questão Desafio abaixo (valor 10,0).

Neste caso é preciso fazer todos os detalhes da prova e explicar porque as coberturas encontradas na demonstração são coberturas de Vitali.
Você também deve enunciar corretamente (não é preciso provar) o Lema do Recobrimento de Vitali para utilizá-lo na demonstração e explicar (não é preciso provar) quais propriedades da medida exterior está utilizando.

Questão Desafio: Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo não degenerado e $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I. Mostre que f é diferenciável em $I \backslash E = \{x \in I : x \notin E\}$ onde E é um conjunto com $m^*(E) = 0$.

1.ª Questão. TOPOLOGIA DA RETA . Seja Λ um conjunto.

ÍTEM	V OU F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Se cada A_λ é aberto, $\cap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é aberto.

(2) Se cada A_λ é fechado, $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é fechado.

(3) Se cada A_λ é aberto e Λ é finito, $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é aberto.

(4) Seja $G \subset \mathbb{R}$ não vazio. Se G não tem pontos isolados e é enumerável, então $G \subsetneq G^-$.

(5) O fecho A^- de $A \subset \mathbb{R}$ é a união de A com os seus pontos de acumulação.

2.ª Questão. COBERTURAS E MEDIDA EXTERIOR

Seja Λ um conjunto.

ÍTEM	V OU F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Dada uma cobertura $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de $[a,b]$ onde cada I_λ é um intervalo aberto existe $\Lambda' \subset \Lambda$ finito tal que $[a,b] \subset \cup_{\lambda'\in\Lambda'} I_{\lambda'}$.

(2) Dado B de $\mathbb{R}$, existe uma seqüência $\{x_n\}$ em B tal que: Para cada $b \in B$, existe função estritamente crescente $\varphi_b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $x_{\varphi_b(n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$.

(3) Se $\varnothing \neq K_n \subset \mathbb{R}$ é compacto e $K_{n+1} \subset K_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \varnothing$.

(4) Dado $B \subset \mathbb{R}$, toda cobertura aberta $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de B tem subcobertura enumerável.

(5) $m^*[a,b] = m^*(a,b] = m^*[a,b) = m^*(a,b) = b - a$.

3.ª Questão. Funções contínuas

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto $f : K \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então $f(K)$ é compacto.

(2) Se $B \subset \mathbb{R}$ e $f : B \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e injetiva, então $f^{-1} : f(B) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

(3) Seja I um intervalo. Existe função contínua e injetiva $f : I \to \mathbb{R}$ que não é estritamente monótona.

(4) Se $f : D \to \mathbb{R}$ é tal que, dado $\epsilon > 0$ existe função contínua $g : D \to \mathbb{R}$ tal que $|g(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in D$, então f é contínua.

(5) Se $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ é compacto e $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ é contínua então $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.

4.ª Questão. DIFERENCIABILIDADE

ÍTEM	V OU F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Se $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função de variação limitada, então conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável.

(2) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é diferenciável com $f'(a) \neq f'(b)$ então, para todo C entre $f'(a)$ e $f'(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = C$.

(3) Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ tal que f tem pelo menos uma descontinuidade de primeira espécie. Existe $g : I \to \mathbb{R}$ tal que $g'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

(4) Se $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b)$ então f é não-crescente em $[a, b)$.

(5) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que é differenciável em (a, b), existe $c \in (a, b)$ para o qual

$$[f(b) - f(a)]2c = [b^2 - a^2]f'(c).$$

5.ª Questão. DIFERENCIABILIDADE, FUNÇÕES CONVEXAS E FUNÇÕES MONÓTONAS

ÍTEM	V OU F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável. Então f é convexa se, e somente se, $f''(x) \geqslant 0$, $\forall x \in I$.

(2) Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável. Então f' é crescente se, e somente se, f é convexa.

(3) Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes differenciável. Se $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$, então f pode ser convexa e não ser estritamente convexa em I.

(4) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é de variação limitada existem funções **não-crescentes** $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = g(x) - h(x)$.

(5) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é monótona, então f é diferenciável exceto possivelmente em um conjunto $E \subset [a, b]$ com $m^*(E) = 0$.