3.ª Prova - SMA 380 - Análise

Professor: Alexandre Nolasco de Carvalho

Questão	Nota
01.ª	
02.ª	
03.ª	
04.ª	
05.ª	
Total	

Nome: ____

Número USP: ______________________________________

07.07.2023

Instruções:

- Assinale todas alternativas verdadeiras com V e as falsas com F.
- Em cada questão escolha **uma alternativa** e justifique (prova ou contra-exemplo).
- Cada questão vale 2.0 pontos, desses 1.0 é o valor da justificativa do ítem escolhido.
- Alternativamente, em substituição ao procedimento acima, você pode escolher uma das questões únicas no final da prova e resolvê-la.
- A prova é individual. Boa prova!

1.ª Questão. Seja $\mathscr{B}([a,b],\mathbb{R}\}$ o conjunto das funções limitadas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$, $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função não-decrescente e $\mathscr{R}([a,b],\alpha) \subset \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R}\}$ o conjunto das funções Riemann-Stieltjes integráveis relativamente a α. Assinale com V a alternativa verdadeira e com F a alternativa falsa.

Ítem	V ou F
(1)	V
(2)	V
(3)	F
(4)	F
(5)	V

(1) Existe $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ não-decrescente e tal que $f \notin \mathscr{R}([a,b],\alpha)$.

(2) Se $\alpha(x) = x$ e $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ é contínua exceto para um conjunto enumerável de pontos então $f \in \mathcal{R}([a,b],\alpha)$.

(3) Se $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ é de variação limitada então $f \in \mathscr{R}([a,b],\alpha)$.

(4) Se $f \in \mathscr{R}([a,b],\alpha)$, não pode ocorrer que f seja descontínua em um conjunto com medida exterior positiva.

(5) Se $f \in \mathscr{R}([a,b],x)$ então a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds$$

é diferenciável exceto em um conjunto E com medida exterior zero. Além disso,

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in [a,b]\backslash E$$

2.ª Questão.

Ítem	V ou F
(1)	F
(2)	F
(3)	V
(4)	F
(5)	V

(1) Se $\{f_n\}$ é uma seqüência de funções contínuas definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$ e $f_n \to f$ ponto a ponto em D, então f é contínua em D.

(2) Se $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dada por, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $x \in [a, b]$ então f é contínuamente diferenciável em $[a, b]$.

(3) Se $f_n \in C([a, b], \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = M_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ então a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $x \in [a, b]$ é contínua.

(4) Seja $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ não-decrescente. Se $f_n \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$, $n \in \mathbb{N}$, e $f_n \to f$ ponto a ponto em $[a, b]$, então $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$, e

$$\int_a^b f d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n d\alpha$$

(5) Se $\{f_n\}$ é uma seqüência de funções diferenciáveis em $[a, b]$ tal que $\{f_n'\}$ converge uniformemente em $[a, b]$ e $\{f_n(x_0)\}$ é limitada para algum $x_0 \in [a, b]$, então existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente e tal que $\{f_{\varphi(n)}\}$ converge uniformemente em $[a, b]$, para uma função f que é diferenciável em $[a, b]$, e

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_{\varphi(n)}(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

3.ª Questão.

Ítem	V ou F
(1)	V
(2)	V
(3)	F
(4)	V
(5)	F

(1) Se $\{f_n\}$ é uma seqüência pontualmente limitada de funções definidas em $D \subset \mathbb{R}$, então existem $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente e $E \subset D$ com $E^- = D$ tal que $\{f_{\varphi(n)}\}$ converge para cada $x \in E$.

(2) Seja $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que $\omega(0) = 0$ e ω é contínua em $x = 0$. Se $f_n \in C([a, b], \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $\{f_n\}$ é pontualmente limitada e $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \omega(|x - y|)$ para todo $x, y \in [a, b]$ e $n \in \mathbb{N}$, então existe uma função estritamente crescente $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\{f_{\varphi(n)}\}$ converge uniformemente.

(3) Seja $\{f_n\}$ em $C([a, b], \mathbb{R})$ uma seqüência uniformemente limitada em $[a, b]$. Então $\{f_n\}$ é equicontínua.

(4) Seja $\{f_n\}$ em $C([a, b], \mathbb{R})$ pontualmente limitada e equicontínua em $[a, b]$, então $\{f_n\}$ é uniformemente limitada em $[a, b]$,

(5) Dados $f \in C((a, b], \mathbb{R})$ e $\epsilon > 0$, existe um polinômio $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $\|p - f\|_\infty = \sup_{x\in(a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon$.

4.ª Questão. Se $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R} > 0$

Ítem	V ou F
(1)	V
(2)	F
(3)	V
(4)	V
(5)	V

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ é uniformemente convergente em $[-r, r]$ para cada $r < R$.

(2) $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $x \in (-R, R)$, é uniformemente contínua em $(-R, R)$.

(3) A função $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $x \in (-R, R)$, é diferenciável em $(-R, R)$ e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n\, x^{n-1}, \ \forall x \in (-R, R),$$

(4) $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $x \in (-R, R)$, é integrável em $[0, x] \subset (-R, R)$ e

$$\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}, \ \forall x \in (-R\,, R).$$

(5) Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n$ é absolutamente convergente então $f : [-R, R] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $x \in [-R, R]$, é uniformemente contínua em $[-R, R]$.

5.ª Questão. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto

Ítem	V ou F
(1)	V
(2)	F
(3)	V
(4)	V
(5)	V

(1) A soma e o produto de funções analíticas $f, g : I \to \mathbb{R}$ é uma função analítica.

(2) Toda função $f \in C^{\infty}(I, \mathbb{R})$ é analítica, isto é, uma função que tem uma série de Taylor em cada ponto $x_0 \in I$ é analítica.

(3) Se uma função analítica $f : I \to \mathbb{R}$ se anula, juntamente com todas as suas derivadas, num ponto de I, então f é identicamente nula.

(4) Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $X \subset I$ um conjunto que tem um ponto de acumulação $x_0 \in I$ e $f, g : I \to \mathbb{R}$ analíticas. Se $f(x) = g(x)$, $\forall x \in X$, então $f(x) = g(x)$, $\forall x \in I$.

(5) Seja $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Para todo $x_0 \in (-R, R)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ se $|x - x_0| < R - |x_0|$.

$\boxed{\textbf{Questão Única 01.}}$ (Teorema de Stone-Weierstrass) Seja $A \subset C(X, \mathbb{R})$ uma álgebra tal que $A = A^{-}$, $1 \in A$ e se $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Mostre que $A = C(X, \mathbb{R})$.

Instrução: Você precisa mostra o Teorema de Aproximação de Weierstrass, definir ágebra (A), definir ágebra fechada (A^{-}) e provar o Teorema de Stone-Weierstrass.

$\boxed{\textbf{Questão Única 02.}}$ (Teorema de Arzelá-Ascoli) Se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto e a seqüência $\{f_n\}$ em $\mathscr{C}(K)$ é pontualmente limitada e equicontínua em K, então

(a) $\{f_n\}$ é uniformemente limitada em K,

(b) $\{f_n\}$ tem subseqüência uniformemente convergente.

Instrução: Você precisa mostrar que uma seqüência de funçoes definidas em um conjunto enumerável que é pontualmente limitada possui uma subseqüência convergente e o Teorema de Arzelá-Ascoli

$\boxed{\textbf{Questão Única 03.}}$ (Caracterização das funções Riemann-Integráveis) Se $f \in \mathscr{B}([a, b], \mathbb{R})$ seja $E_f = \{x \in [a, b] : f \text{ é descontínua em } x\}$. Então $\mathscr{R}([a, b]) = \{f \in \mathscr{B}([a, b], \mathbb{R}) : m^*(E_f) = 0\}$.

Instrução: Você precisa definir a funções $\omega_\nu^f(x) = \sup\{|f(s) - f(t)| : s, t \in [a, b] \cap (x - \nu, s + \nu)\}$ e $\omega^f(x) = \lim_{\nu \to 0} \omega_\nu^f(x)$ e o conjunto $E_\delta^f = \{x \in [a, b] : \omega^f(x) \geqslant \delta\}$ e mostrar que $m^*(E_\delta^f) = 0$ para mostrar que $m^*(E_f) = 0$.