Revisão
Aula 43

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

04 de Julho de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Integral de Riemann-Stieltjes: Definição e caracterização

Se $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ é não-decrescente, α é limitada em $[a,b]$.

Dada $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$, para $1 \leqslant i \leqslant n$, seja

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \geq 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

e, dada $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$, defina

$$\boxed{L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \Delta\alpha_i} \leqslant \boxed{U(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i\, \Delta\alpha_i,}$$

com $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$.

Definimos a integral superior e a integral inferior de Riemann-Stieltjes da função f em $[a, b]$, relativamente a α por

$$\boxed{\overline{\int_a^b} f\, d\alpha = \inf_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}} U(\mathcal{P}, f, \alpha)} \text{ e } \boxed{\underline{\int_a^b} f\, d\alpha = \sup_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}} L(\mathcal{P}, f, \alpha).}$$

A função f é **Riemann-Stieltjes integrável em $[a, b]$, relativamente a** α se

$$\overline{\int_a^b} f\, d\alpha = \underline{\int_a^b} f\, d\alpha.$$

Denote por $\mathscr{R}(\alpha, [a, b]) = \{f \in \mathscr{B}([a, b], \mathbb{R}) : f$ é Riemann-Stieltjes integrável $[a, b]$, relativamente a $\alpha\}$.

Definição (Refinamento)

Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{P}^* \in \mathscr{P}_{[a,b]}$, dizemos que a partição $\mathcal{P}^*$ é um **refinamento da partição** $\mathcal{P}$, *se*

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^*,$$

ou seja, todo ponto de $\mathcal{P}$ é um ponto de $\mathcal{P}^*$.

Proposição

Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{P}^* \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ com $\mathcal{P}^* \supset \mathcal{P}$. Então,

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leqslant L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \tag{1}$$

$$U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha). \tag{2}$$

Como consequência do resultado anterior temos

Teorema

Seja $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$. Então

$$\underline{\int_a^b} f\,d\alpha \leqslant \overline{\int_a^b} f\,d\alpha\,. \tag{3}$$

e

Corolário

Seja $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$. Então $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $\mathcal{P} \in \mathscr{P}$, tal que

$$0 \leqslant U(\mathcal{P},f,\alpha) - L(\mathcal{P},f,\alpha) < \epsilon.$$

Teorema

Seja $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ *e* $\epsilon > 0$ *dado*

1) *Se existe* $\mathcal{P}_{[a,b]} \in \mathscr{P}$ *tal que* $0 \leqslant U(\mathcal{P},f,\alpha) - L(\mathcal{P},f,\alpha) < \epsilon$ *então* $0 \leqslant U(\mathcal{P}^*,f,\alpha) - L(\mathcal{P}^*,f,\alpha) < \epsilon$, *se* $\mathcal{P}_{[a,b]} \ni \mathcal{P}^* \supset \mathcal{P}$.

2) *Se* $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ *e* $0 \leqslant U(\mathcal{P},f,\alpha) - L(\mathcal{P},f,\alpha) < \epsilon$, *dados* $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *então*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \, \Delta\alpha_i < \epsilon \, . \tag{4}$$

e, se $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \Delta\alpha_i - \int_a^b f \, d\alpha \right| < \epsilon. \tag{5}$$

Classes de Funções Riemann-Stieltjes Integráveis

Teorema

$$C([a,b]\,;\,\mathbb{R}) \subsetneq \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$$

Teorema

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é monótona em $[a,b]$ e $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua e não-decrescente. Então $f\in\mathscr{R}(\alpha,[a,b])$.

Teorema

Se $f\in\mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ possui somente um número finito de pontos de descontinuidade e $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função não-decrescente que é contínua nos pontos onde f é descontínua. Então $f\in\mathscr{R}(\alpha,[a,b])$.

Propriedades

Teorema

Se $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$, $f([a, b]) \subset [m, M]$ e $\phi : [m, M] \to \mathbb{R}$ é contínua então, $h = \phi \circ f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$.

Teorema

(a) *Se* $f_1 \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$ *e* $f_2 \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$ *então* $f_1+f_2 \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$, $c \cdot f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$, *e*

$$\int_a^b (f_1+f_2)\, d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha,$$

$$\int_a^b cf d\alpha = c\int_a^b f d\alpha.$$

(b) *Se* $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ *em* $[a,b]$ *então*

$$\int_a^b f_1 d\alpha \leqslant \int_a^b f_2 d\alpha$$

(c) *Se* $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$ *e* $c \in (a,b)$ *então* $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,c]) \cap \mathscr{R}(\alpha,[c,b])$, *e*

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha$$

(d) *Se* $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *e if* $|f(x)| \leqslant M$ *então*

$$\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leqslant M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

(e) *Se* $f \in \mathscr{R}(\alpha_1, [a, b])$ *e* $f \in \mathscr{R}(\alpha_2, [a, b])$ *então* $f \in \mathscr{R}(\alpha_1 + \alpha_2, [a, b])$ *e*

$$\int_a^b f d\,(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2$$

se $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *e* $\mathbb{R} \ni c > 0$ *então* $f \in \mathscr{R}(c\alpha, [a, b])$ *e*

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c \int_a^b f d\alpha$$

Teorema

Se $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *e* $g \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *então*

(*a*) $fg \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$;

(*b*) $|f| \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *e* $\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leqslant \int_a^b |f| d\alpha$.

A função degrau unitário $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $I(x) = 0$ se $x \leqslant 0$ e $I(x) = 1$ se $x > 0$.

Teorema

Se $a < s < b$, $f \in \mathscr{B}([a, b], \mathbb{R})$ é contínua em s, e $\alpha(x) = I(x-s)$, então

$$\int_a^b f\, d\alpha = f(s)$$

Teorema

Se $c_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ é convergente, $\{s_n\}$ é uma seqüência de pontos distintos em (a, b),

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I\left(x - s_n\right)$$

e f é contínua em $[a, b]$ então

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f\left(s_n\right).$$

Teorema

Sejam $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ *não-decrescente e diferenciável com* $\alpha' \in \mathscr{R}([a, b])$ *e* $f \in \mathscr{B}([a,b], \mathbb{R})$. *Então* $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b])$ *se, e só se,* $f\alpha' \in \mathscr{R}([a,b])$. *Neste caso*

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx.$$

Teorema (Mudança de variável)

Sejam $\phi : [A, B] \to [a, b]$ *contínua e bijetora com* $\phi(A) = a$ *e* $\phi(B) = b$, α *é não-decrescente,* $\beta = \alpha \circ \phi$ *e* $g = f \circ \varphi$. *Se* $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *então* $g \in \mathscr{R}(\beta, [A, B])$ *e*

$$\int_A^B g d\beta = \int_a^b f d\alpha$$

Agora vamos considerar o seguinte caso especial. Tomamos $\alpha(x) = x$. Etão $\beta = \varphi$. Suponha que $\varphi' \in \mathscr{R}([A, B])$. Aplicando os dois resultados anteriores temos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_A^B f(\varphi(y))\varphi'(y)dy.$$

Teorema fundamental do cálculo e Integração por partes

Teorema

Se $f \in \mathscr{R}([a,b])$. Para $a \leqslant x \leqslant b$, faça

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Então $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é Lipschitz contínua e, se f é contínua em $x_0 \in [a,b]$, então F é differenciável em x_0, e

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Teorema (O teorema fundamental do cálculo)

Se $f \in \mathscr{R}([a,b])$ e existe função diferenciável $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $F' = f$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Teorema (Integração por partes)

Se $F,G:[a,b]\to\mathbb{R}$, *são diferenciáveis,* $F'=f$, $G'=g\in\mathscr{R}([a,b])$. *Então*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

Caracterização de Funções Riemann Integráveis

Teorema

Se $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ *seja* $E_f = \{x \in [a,b] : f$ *é descontínua em* $x\}$. *Então* $\mathscr{R}([a,b]) = \{f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R}) : m^*(E_f) = 0\}$.

Corolário

Se $f, g \in \mathscr{R}([a,b])$ *então* $f.g \in \mathscr{R}([a,b])$ *e se* $f(x) \neq 0$, *para todo* $x \in [a,b]$, *então* $\frac{1}{f} \in \mathscr{R}([a,b])$.

Corolário

Se $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ *só tem descontinuidades de primeira espécie então* E^f *é enumerável e portanto* f *é integrável. Em particular, se* $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ *é monótona então* $f \in \mathscr{R}([a,b])$.

Seqüências e séries de funções

Definição (Convergência pontual de seqüências e séries)

Seja $\{f_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *uma seqüência de funções definidas em* $D \subset \mathbb{R}$ *e tomando valores em* $\mathbb{R}$. *Se* $\{f_n(x)\}$ *é convergente para todo* $x \in D$, *definimos a função limite da seqüência* $\{f_n\}$

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \quad x \in D.$$

Analogamente, se $\sum f_n(x)$ *converge para todo* $x \in D$ *definimos*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in D,$$

e a função f *é chamada de soma da série* $\sum f_n$.

O principal problema que surge no processo de passagem ao limite descrito na definição anterior é determinar se as propriedades importantes das funções são preservadas por passagem ao limite.

Por exemplo, se as funções f_n são contínuas, diferenciáveis ou integráveis, o mesmo vale para a função limite? Que relação há entre f_n' e f' ou entre as integrais de f_n e de f?

Note que, f é contínua em um ponto de acumulação x de D se

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \boxed{f(x) = \lim_{t\to x} f(t)} = \lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

ou seja, se a ordem em que os processos de limite são executados é irrelevante.

Definição (Convergência uniforme de seqüências e séries)

Seja $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *uma seqüência de funções definidas em* $D \subset \mathbb{R}$ *e tomando valores em* $\mathbb{R}$. *Dizemos que* $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *converge uniformemente para* f *em* D *se, dado* $\epsilon > 0$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon, \quad \forall n \geqslant N.$$

Dizemos que a série $\sum f_n(x)$ *converge uniformemente em* D *se a seqüência* $\{s_n\}$ *de somas parciais definida por*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = s_n(x)$$

converge uniformemente em D.

O critério de Cauchy para convergência uniforme é o seguinte.

Teorema (Critério de Cauchy para convergência uniforme)

A seqüência de funções $\{f_n\}$, definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$, converge uniformemente em D se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m \geqslant N$, $n \geqslant N$,

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \epsilon \tag{6}$$

Teorema (Teste M de Weierstrass)

Seja $\{f_n\}$uma sequência de funções definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$. Suponha que

$$\sup_{x \in D} |f_n(x)| \leqslant M_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $\sum M_n$ converge então $\sum f_n$ converge uniformemente em D.

A recíproca não vale.

A recíproca é, em geral, falsa pois, para $f_n(x) = \frac{x^2(1-x^2)^{n+2}}{\ln(n+3)}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, a série converge uniformemente e $M_n = \frac{(1+\frac{1}{n+2})^{-(n+2)}}{(n+3)\ln(n+3)}$, portanto $\sum M_n$ diverge.

Convergência uniforme e continuidade

Teorema (1)

Suponha $f_n \to f$ uniformemente em um conjunto D e seja x um ponto de acumulação de D. Se

$$\lim_{t\to x} f_n(t) = a_n \; n \in \mathbb{N}$$

então $\{a_n\}$ é convergente, e

$$\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Dito de outra forma

$$\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t).$$

Teorema

Se $\{f_n\}$ é uma seqüência de funções contínuas definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$ e $f_n \to f$ uniformemente em D, então f é contínua em D.

A recíproca é, em geral, falsa como pode ser visto no exemplo $f_n(x) = n^2 x \left(1 - x^2\right)^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Mas há um caso em que a recíproca é verdadeira.

Teorema

Seja $K \subset \mathbb{R}$ um compacto. Se

(a) $\{f_n\}$ *uma sequência de funções contínuas em* K,

(b) $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x), \forall x \in K$ *e* f *é contínua em* K *e*

(c) $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x), \forall x \in K$ *e* $\forall n \in \mathbb{N}$,

então $f_n \to f$ *uniformemente em* K.

Definição

If $D \subset \mathbb{R}$, $\mathscr{C}(D)$ denota o conjunto de todas as funções $f : D \to \mathbb{R}$ que são contínuas e limitadas. A cada $f \in \mathscr{C}(D)$ associamos a sua norma do supremo

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

Definimos a distância entre $f \in \mathscr{C}(D)$ e $g \in \mathscr{C}(D)$ por $\|f - g\|$. Com esta noção de distância, dada uma seqüência$\{f_n\}$ em $\mathscr{C}(D)$ podemos definir as noções de convergência e de seqüências de Cauchy exatamente como antes. Uma seqüência $\{f_n\}$ converge uniformemente para f se, e somente se, $\|f_n - f\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Teorema

Com a noção de distância acima $\mathscr{C}(D)$ é um espaço métrico completo.

Convergência uniforme e integração

Teorema

Seja $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *não-decrescente. Se* $f_n \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b])$, $n \in \mathbb{N}$, *e* $f_n \to f$ *uniformemente em* $[a,b]$, *então* $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b])$, *e*

$$\int_a^b f d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n d\alpha$$

(*A existência do limite é parte da conclusão.*)

Convergência uniforme e derivação

Como já vimos, convergência uniforme de $\{f_n\}$ não implica nada sobre a convergência da seqüência $\{f_n'\}$. Logo, hipóteses mais fortes serão necessárias para concluir que $f_n' \to f'$ se $f_n \to f$.

Teorema

Se $\{f_n\}$ é uma seqüência de funções diferenciáveis em $[a, b]$ tal que $\{f_n'\}$ converge uniformemente em $[a, b]$ e $\{f_n(x_0)\}$ converge para algum $x_0 \in [a, b]$, então $\{f_n\}$ converge uniformemente em $[a, b]$, para uma função f que é diferenciável em $[a, b]$, e

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Teorema

Existe uma função contínua que não é diferenciável em nenhum ponto.

Famílias equicontínuas de funções

Definição

Seja $\{f_n\}$ *uma seqüência de funções definidas em um conjunto* D*. Dizemos que* $\{f_n\}$ *é pontualmente limitada em* D *se* $\{f_n(x)\}$ *é limitada,* $\forall x \in D$*, ou seja, se existe função* $\phi : D \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$|f_n(x)| \leqslant \phi(x), \quad x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

Dizemos que $\{f_n\}$ *é uniformemente limitada em* D *se existe* $M \geqslant 0$ *tal que*

$$|f_n(x)| \leqslant M, \quad x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

Teorema (1)

Se $\{f_n\}$ é uma seqüência pontualmente limitada de funções definidas em um conjunto contável D, então $\{f_n\}$ tem uma subseqüência $\{f_{n_k}\}$ tal que $\{f_{n_k}(x)\}$ converge para cada $x \in D$.

Definição (Equicontinuidade)

Uma família $\mathscr{F}$ de funções definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$ é dita equicontínua em D se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in D, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon,\ \forall f \in \mathscr{F}.$$

Teorema

Se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto, $f_n \in \mathscr{C}(K)$ para $n \in \mathbb{N}$ e se $\{f_n\}$ converge uniformemente em K, então $\{f_n\}$ é equicontínua em K.

Teorema

Se K é compacto e a seqüência $\{f_n\}$ em $\mathscr{C}(K)$ é pontualmente limitada e equicontínua em K, então

(a) $\{f_n\}$ é uniformemente limitada em K,

(b) $\{f_n\}$ tem uma subseqüência uniformemente convergente.

O Teorema de Aproximação de Weierstrass

Teorema (de Aproximação de Weierstrass)

Dados $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ *e* $\epsilon > 0$*, existe um polinômio* $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ *tal que* $\|p - f\|_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon$*.*

O Teorema de Stone-Weierstrass

Seja $X \subset \mathbb{R}$ um compacto e $C(X, \mathbb{R})$ os espaço das funções contínuas de X em $\mathbb{R}$ com a norma usual, isto é,

$$\|f - g\| = \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Em $C(X, \mathbb{R})$ definimos a soma $f + g$ e multiplicação $f \cdot g$ de duas funções além da multiplicação af de um escalar a por uma função f de forma usual.

Um conjunto $A \subset C(X, \mathbb{R})$ é dito uma álgebra se $f, g \in A$, $a \in \mathbb{R}$ implica $f + g \in A$, $f \cdot g \in A$ e $af \in A$.

Teorema

Se $A \subset C(X, \mathbb{R})$ é uma álgebra então

$$A^{-} = \{f \in C(X, \mathbb{R}) : f \text{ é limite uniforme de funções em } A\}$$

também é uma álgebra.

O Teorema de Stone -Weierstrass

Teorema (Stone -Weierstrass)

Seja $A \subset C(X, \mathbb{R})$ uma álgebra tal que $A = A^{-}$, $1 \in A$ e se $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Então, $A = C(X, \mathbb{R})$.

Séries de potências

Agora consideraremos um particular tipo de séries de funções. São as chamadas séries de potências que vimos brevemente quando tratamos do critério da raiz e são da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, x^n \quad \text{ou}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (x-a)^n .$$

Sem perda de generalidade consideraremos o caso $a = 0$.

Proposição

Sejam x_0, x_1 números reais não nulos.

- *Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x_0^n$ for convergente, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ será absolutamente convergente, para cada $x \in (-|x_0|, |x_0|)$.*
- *Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x_1^n$ for divergente, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ será divergente, para cada x com $|x| > |x_1|$.*

Teorema

Dada a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *uma, e somente uma, das situações abaixo ocorre:*

- *a série de potências converge somente em* $x = 0$*;*
- *a série de potências converge absolutamente* $\forall x \in \mathbb{R}$*;*
- *existe* $R > 0$*, tal que a série de potências é absolutamente convergente* $\forall x \in (-R, R)$ *e divergente para todo* x *com* $|x| > R$.

Teorema

Se $R \in (0,\infty]$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *é convergente*, $\forall x \in (-R\,,R)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \ \forall x \in (-R, R).$$

Então, para $r \in (0\,,R)$, *a série* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ *será uniformemente convergente em* $[-r, r]$. *A função f será diferenciável em* $(-R, R)$ *e*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n\, x^{n-1}, \ \forall x \in (-R\,,R),$$

A função f será integrável em $[0, x] \subset (-R, R)$ *e*

$$\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}, \ \forall x \in (-R\,,R).$$

Sendo assim, a série pode ser derivada e integrada, termo a termo.

Nas condições do teorema anterior a função f é de classe C^∞ isto é $f \in C^\infty((-R,R),\mathbb{R})$. E, para cada $k \in \mathbb{N}$, teremos

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n\,(n-1)\cdots(n-k+1)\,c_n\,x^{n-k},\ \forall x \in (-R,R).$$

Em particular, para cada $k \in \mathbb{N}$, teremos

$$f^{(k)}(0) = k!c_k,\ \text{ou seja}\ c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Logo, a série de potências que define f é a série de Taylor de f.

Agora consideramos a seguinte questão. Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge em ambos os extremos, R e $-R$, do seu intervalo de convergência $(-R, R)$, podemos garantir que a convergência seja uniforme em $[-R, R]$? A resposta positiva é dada pelo

Teorema (Abel)

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *uma série de potências com raio de convergência* $R \in (0, \infty)$. *Se* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ *converge, então* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge uniformemente no intervalo* $[0, R]$ *e* $\lim_{x \to R-} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

Funções Analíticas

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é analítica se é C^∞ e, dado $x_0 \in I$, existe $R > 0$ tal que $V_R(x_0) = (x_0 - R, x_0 + R) \subset I$ e

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \ , \ \forall x \in V_R(x_0)$$

Assim, o valor de uma função analítica em cada ponto é dado pela sua série de Taylor.

Teorema

A soma e o produto de funções analíticas $f, g : I \to \mathbb{R}$ é uma função analítica em I.

Teorema

Se uma função analítica $f : I \to \mathbb{R}$ se anula, juntamente com todas as suas derivadas, num ponto de I, então f é identicamente nula.

Corolário

Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ analíticas. Se, para algun $x_0 \in I$, tem-se $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0), n \in \mathbb{N}$. então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$.

Lema

Seja f uma função C^∞ num intervalo I. Seja $X \subset I$ um conjunto com um ponto de acumulação $x_0 \in I$. Se $f(x) = 0$ para todo $x \in X$, então $f^{(n)}(x_0) = 0$ para todo $n \geqslant 0$.

Teorema

Seja $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo aberto,* $X \subset I$ *um conjunto que tem um ponto de acumulação* $x_0 \in I$ *e* $f : I \to \mathbb{R}$ *analítica. Se* $f(x) = 0$, $\forall x \in X$, *então* $f(x) = 0$, $\forall x \in I$.

Corolário

Seja $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo aberto,* $X \subset I$ *um conjunto que tem um ponto de acumulação* $x_0 \in I$ *e* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *analíticas. Se* $f(x) = g(x)$, $\forall x \in X$, *então* $f(x) = g(x)$, $\forall x \in I$.

Teorema

Seja $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Para todo* $x_0 \in (-R, R)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ *se* $|x - x_0| < R - |x_0|$.

Corolário

Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *séries de potências convergentes no intervalo* $(-R, R)$ *e* $X \subset (-R, R)$ *um conjunto com um ponto de acumulação nesse intervalo. Se* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum b_n x^n$ *para todo* $x \in X$ *então* $a_n = b_n$ *para* $n \in \mathbb{N}$.