Funções Analíticas
Aula 42

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

02 de Julho de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Funções Analíticas

Seja $I\subset\mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma função $f:I\to\mathbb{R}$ é analítica se é C^∞ e, dado $x_0\in I$, existe $R>0$ tal que $V_R(x_0)=(x_0-R,x_0+R)\subset I$ e

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots\ ,\ \forall x\in V_R(x_0)$$

Assim, o valor de uma função analítica em cada ponto é dado pela sua série de Taylor.

Vimos que, toda função dada por uma série de potências é C^∞ e, se $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, então $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, isto é, toda série de potências é uma série de Taylor.

Logo, $f : I \to \mathbb{R}$, é analítica se, dado $x_0 \in I$, existem $R > 0$, com $(x_0 - R, x_0 + R) \subset I$, e uma série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ tal que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Ou seja, o valor de f é dado pela soma de uma série de potências do tipo $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ em cada $x_0 \in I$.

Note que a série varia com o ponto x_0 (os coeficientes são dados em termos das derivadas $f^{(n)}(x_0)$). Mesmo que a função seja analítica em toda a reta, sua série de potências em torno de um ponto x_0 não precisa convergir em toda a reta.

Teorema

A soma e o produto de funções analíticas $f, g : I \to \mathbb{R}$ é uma função analítica em I.

De fato, se dado $x_0 \in I$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, $|x - x_0| < r$ e $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ se $|x - x_0| < s$ e $t = \min\{r, s\}$, então $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x - x_0)^n$, e $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$, com $c_n = a_0 b_n + \ldots + a_n b_0$, se $|x - x_0| < t$ (Teorema (B)).

Uma das propriedades que distinguem as funções analíticas das funções C^∞ é dada pelo

Teorema

Se uma função analítica $f : I \to \mathbb{R}$ se anula, juntamente com todas as suas derivadas, num ponto de I, então f é identicamente nula.

Prova: Se A é o conjunto dos pontos de I nos quais f se anula juntamente com todas as suas derivadas. A é aberto. Agora consideremos o conjunto B, formado pelos pontos $x \in I$ para os quais $f(x)$ ou alguma derivada $f^{(n)}(x)$ é diferente de zero. Como as derivadas são contínuas B também é aberto de I. Como $I = A \cup B$ e $A \cap B = \varnothing$. Como $A \neq \varnothing$ segue que $A = I$. $\square$

Corolário

Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ *analíticas. Se, para algun* $x_0 \in I$*, tem-se* $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0), n \in \mathbb{N}$*. então* $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in I$*.*

Lema

Seja f *uma função* C^∞ *num intervalo* I*. Seja* $X \subset I$ *um conjunto com um ponto de acumulação* $x_0 \in I$*. Se* $f(x) = 0$ *para todo* $x \in X$*, então* $f^{(n)}(x_0) = 0$ *para todo* $n \geqslant 0$*.*

Prova: Seja $\{x_n\}$ uma seqüência estritamente monótona de pontos de X, com $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Então $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Além disso, $f'(x_0) = \lim \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0} = 0$. Pelo Teorema de Rolle, $\forall n \in \mathbb{N}$, existe y_n entre x_n e x_{n+1}, tal que $f'(y_n)=0$.

Claramente $\{y_n\}$ é estritamente monótona e $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$. Logo

$$f''(x_0)=\lim_{n\to\infty} \frac{f'(y_n)-f'(x_0)}{y_n - x_0}=0.$$

Argumentando por indução podemos mostrar que todas as derivadas de f se anulam em x_0. $\square$

Teorema

Seja $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo aberto,* $X \subset I$ *um conjunto que tem um ponto de acumulação* $x_0 \in I$ *e* $f : I \to \mathbb{R}$ *analítica. Se* $f(x) = 0$, $\forall x \in X$, *então* $f(x) = 0$, $\forall x \in I$.

Corolário

Seja $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo aberto,* $X \subset I$ *um conjunto que tem um ponto de acumulação* $x_0 \in I$ *e* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *analíticas. Se* $f(x) = g(x)$, $\forall x \in X$, *então* $f(x) = g(x)$, $\forall x \in I$.

Teorema

Seja $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Para todo* $x_0 \in (-R, R)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ *se* $|x - x_0| < R - |x_0|$.

Prova: Se $|x - x_0| < R - |x_0|$ então $|x_0| + |x - x_0| < R$. Logo a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para $x = |x_0| + |x - x_0|$.

isto é, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|x_0| + |x - x_0|)^n < +\infty$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} |x - x_0|^k < +\infty.$$

Logo

$$
\begin{aligned}
f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n &= \sum_{k\geqslant 0} a_n \left[x_0 + (x - x_0)\right]^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k}(x - x_0)^k \qquad \text{[Teorema (A)]} \\
&= \sum_{k\geqslant 0} \left[\sum_{n\geqslant k} a_n \binom{n}{k} x_0^{n-k}\right](x - x_0)^k = \sum_{k\geqslant 0} b_k (x - x_0)^k,
\end{aligned}
$$

Corolário

Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *séries de potências convergentes no intervalo* $(-R, R)$ *e* $X \subset (-R, R)$ *um conjunto com um ponto de acumulação nesse intervalo. Se* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum b_n x^n$ *para todo* $x \in X$ *então* $a_n = b_n$ *para* $n \in \mathbb{N}$.

Seqüência dupla

Uma seqüência dupla (x_{nk}) é uma função $x : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada par (n, k) de números naturais um número real x_{nk}.

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

Consideremos as somas repetidas $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}\right)$ e $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}\right)$.

Mesmo quando 'convergem', elas podem dar diferentes resultados.

Por exemplo, somando primeiro as linhas no quadro abaixo, obtemos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}) = 0$ enquanto se somarmos primeiro as colunas, teremos $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1.$

$$
\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \to & 0 \\
0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & \cdots & \to & 0 \\
0 & 0 & \frac{7}{8} & -\frac{7}{8} & 0 & \cdots & \to & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{15}{16} & -\frac{15}{16} & \cdots & \to & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \cdots & \cdots & &
\end{array}
$$

Surge o problema de obter condições que assegurem a igualdade das duas somas repetidas. Nosso primeiro resultado será o

Lema

Se $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *é dada por* $f_n(j) = x_{n1} + \ldots + x_{nj}$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente em* $\mathbb{N}$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}$ *converge,* $\forall n \in \mathbb{N}$, *então*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}\right)$$

Prova: Segue do fato que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\lim_{j\to\infty} f_n(j)\right] = \lim_{j\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(j)\right] = \lim_{j\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j} x_{nk}\right]$$

$$= \lim_{j\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{j}\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}. \square$$

Teorema (A)

Dada $\{x_{nk}\}$*, se* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk}| = a_n$ *para cada* n *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ *então*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}\right).$$

Esta afirmação implica, em particular, que todas as séries contidas na igualdade acima são convergentes.

Prova: Pondo $f_n(k) = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk}$, como no lema, temos $|f_n(k)| \leqslant a_n$ para todo k e todo n. Logo $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é uniformemente convergente em $k \in \mathbb{N}$ pelo Teste M de Weierstrass. O lema anterior implica o resultado.$\square$

Produto de Cauchy séries

A seguir definimos o produto de Cauchy de duas séries numéricas.

Definition

Dadas as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ o seu produto de Cauchy é a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ onde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Observação

Este produto é inspirado no produto de polinômios.

O produto de séries convergentes pode não ser convergente. Basta considerar a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ (exercício).

Teorema (B)

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente com soma* A, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *é convergente com soma* B, *então o seu produto de Cauchy* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $n \in \mathbb{N}$, *é convergente com soma* AB.

Prova: Se $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ e $\beta_n = B_n - B$, $n \in \mathbb{N}$, então $A_n \xrightarrow{n\to\infty} A$, $\quad B_n \xrightarrow{n\to\infty} B$ e $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Queremos mostrar que $C_n \xrightarrow{n\to\infty} AB$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
C_n &= c_0+c_1+\cdots+c_n \\
&= a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0) \\
&= a_0(b_0+b_1+\cdots+b_n)+a_1(b_0+b_1+\cdots+b_{n-1}) \\
&\qquad\qquad +\cdots+a_{n-1}(b_0+b_1)+a_nb_0 \\
&= a_0B_n+a_1B_{n-1}+\cdots a_{n-1}B_1+a_nB_0 \\
&= a_0(B+\beta_n)+a_1(B+\beta_{n-1})+\cdots+a_n(B+\beta_0) \\
&= (a_0+a_1+\cdots+a_n)B+a_0\beta_n+a_1\beta_{n-1}+\cdots+a_n\beta_0 \\
&= A_nB+a_0\beta_n+a_1\beta_{n-1}+\cdots+a_{n-1}\beta_1+a_n\beta_0.
\end{aligned}
$$

Se $\gamma_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_{n-1}\beta_1 + a_n\beta_0$, $n \in \mathbb{N}$.

$$C_n = A_nB + \gamma_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

e o resultado estará provado se mostrarmos que $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$.

Como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente seja $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ é convergente, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $|\beta_n| = |B_n - B| < \varepsilon$ sempre que $n \geqslant N$.

Logo, para $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
|\gamma_n| &= |(\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}) + (\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \cdots + \beta_n a_0)| \\
&\leqslant |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1}||a_{n-N-1}| + \cdots + |\beta_n||a_0| \\
&< |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon\left(|a_{n-N-1}| + \cdots + |a_0|\right) \\
&\leqslant |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon\alpha.
\end{aligned}$$

logo $0 \leqslant \limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \leqslant \varepsilon\alpha$, para todo $\epsilon > 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$, completando a demonstração.$\square$