Séries de Potências
Aula 41

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

30 de Junho de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Séries de potências

Agora consideraremos funções do tipo um particular tipo de série de funções. São as chamadas séries de potências que vimos brevemente quando tratamos do critério da raiz e são da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n \quad \text{ou}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, (x-a)^n.$$

Sem perda de generalidade consideraremos o caso $a = 0$.

Proposição

Sejam x_0, x_1 números reais não nulos.

- *Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x_0^n$ for convergente, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ será absolutamente convergente, para cada $x \in (-|x_0|, |x_0|)$.*
- *Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x_1^n$ for divergente, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ será divergente, para cada x com $|x| > |x_1|$.*

Prova: Sabemos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_0^n$ é convergente e $x_0 \neq 0$. Logo $\lim_{n\to\infty} c_n x_0^n = 0$ e existe $M \geqslant 0$, tal que $|c_n\, x_0^n| \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Se $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ então

$$|c_n\, x^n| = |c_n x_0^n| |\frac{x^n}{x_0^n}| \leqslant M |\frac{x}{x_0}|^n = M\, r^n, \;\; n \in \mathbb{N},$$

onde $r = |\frac{x}{x_0}| < 1$. Do critério da comparação para séries de termos não-negativos, a série $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n\, x^n|$ é convergente $\forall x \in (-|x_0|, |x_0|)$.

Por outro lado, se $|x_2| > |x_1|$ a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_2^n$ não pode ser convergente pois isto implicaria a convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ que é divergente.$\square$

Disto segue que

Teorema

Dada a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *uma, e somente uma, das situações abaixo ocorre:*

- *a série de potências converge somente em* $x = 0$*;*
- *a série de potências converge absolutamente* $\forall x \in \mathbb{R}$*;*
- *existe* $R > 0$*, tal que a série de potências é absolutamente convergente* $\forall x \in (-R, R)$ *e divergente para todo* x *com* $|x| > R$*.*

No último caso nada podemos afirmar quando $x = R$ ou $x = -R$ e a análise terá que ser feita caso a caso como vimos anteriormente.

Também neste caso, do critério da raiz, $\dfrac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$

Teorema

Se $R\in(0,\infty]$, *é tal que a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *é convergente,* $\forall x\in(-R\,,R)$ *e* $f:(-R\,,R)\to\mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,\ \forall x\in(-R,R).$$

Então, para $r\in(0\,,R)$, *a série* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ *será uniformemente convergente em* $[-r,r]$. *A função* f *será diferenciável em* $(-R,R)$ *e*

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n\, x^{n-1},\ \forall x\in(-R\,,R),$$

A função f *será integrável em* $[0,x]\subset(-R,R)$ *e*

$$\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}x^{n+1},\ \forall x\in(-R\,,R).$$

Sendo assim, a série pode ser derivada e integrada, termo a termo.

Nas condições do teorema anterior a função f é de classe C^∞ isto é $f \in C^\infty((-R,R),\mathbb{R})$. E, para cada $k \in \mathbb{N}$, teremos

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n\,(n-1)\cdots(n-k+1)\,c_n\,x^{n-k},\ \forall x \in (-R,R).$$

Em particular, para cada $k \in \mathbb{N}$, teremos

$$f^{(k)}(0) = k!c_k,\ \text{ou seja}\ c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Logo, a série de potências que define f é a série de Taylor de f.

Existem funções $f \in C^\infty((-R,R),\mathbb{R})$, de modo que

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

como por exemplo, a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}\,, & \text{para cada} \quad x \neq 0 \\ 0\,, & \text{para} \quad x = 0 \end{cases} \quad .$$

Verifica-se que $f \in C^\infty(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ e que

$$f^{(n)}(0) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Exemplo

A série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *converge* $\forall x \in \mathbb{R}$ *e sua soma é* e^x*.*

Por outro, a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ *só converge para* $x = 0$*.*

A série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$*converge para* $\frac{1}{1+x}$ *se, e somente se,* $x \in (-1,1)$*.*

Integrando $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \log(1+x)$, $x \in (-1,1]$

e $\operatorname{arctg}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$

Agora consideramos a seguinte questão. Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge em ambos os extremos, R e $-R$, do seu intervalo de convergência $(-R, R)$, podemos garantir que a convergência seja uniforme em $[-R, R]$? A resposta positiva é dada pelo

Teorema (Abel)

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *uma série de potências com raio de convergência* $R \in (0, \infty)$. *Se* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ *converge, então* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge uniformemente no intervalo* $[0, R]$ *e* $\lim_{x \to R-} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

A prova do Teorema de Abel usa o lema a seguir.

Lema

Se $\{s_n\}=\{\alpha_1+\ldots+\alpha_n\}$ *é limitada, isto é,* $\sup\{|s_n|:n\in\mathbb{N}\}=K<\infty$, *e* $\{b_n\}$ *é uma seqüência não-crescente de números não negativos então* $|\alpha_1 b_1+\ldots+\alpha_p b_p|\leqslant Kb_1,\ \forall p\in\mathbb{N}$.

Prova:

$$\begin{aligned}|\alpha_1 b_1+\ldots+\alpha_p b_p| &= |s_1 b_1+(s_2-s_1)b_2+\ldots+(s_p-s_{p-1})b_p|\\ &= |s_1(b_1-b_2)+\ldots+s_{p-1}(b_{p-1}-b_p)+s_p b_p|\\ &\leqslant K(b_1-b_2+\ldots+b_{p-1}-b_p+b_p)=Kb_1.\end{aligned}$$

Prova do Teorema de Abel: Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \to |a_{n+1}R^{n+1} + \ldots + a_{n+p}R^{n+p}| < \epsilon, \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Para $n > N$ e $\alpha_p = a_{n+p}R^{n+p}$, $p\in\mathbb{N}$. Os α_p satisfazem a hipótese do lema anterior, com $K = \epsilon$. Para todo $x \in [0, R]$, temos

$$|a_{n+1}x^{n+1} + \ldots + a_{n+p}x^{n+p}| = |\alpha_1 \left(\frac{x}{R}\right) + \ldots + \alpha_p \left(\frac{x}{R}\right)^p | \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

Do lema, com $b_p = (\frac{x}{R})^p$, segue que, $\forall n > N$ e $\forall x \in [0, R]$,

$$|a_{n+1}x^{n+1} + \ldots + a_{n+p}x^{n+p}| \leqslant \epsilon \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \leqslant \epsilon, \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Isto prova que $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em $[0, R]$ e, como $a_n x^n$ é contínuo em $[0, R]$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é contínua em $[0, R]$.

Logo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = f(R) = \lim_{x \to R-} f(x) = \lim_{x \to R^-} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)$.□

Observações.

1. As mesmas conclusões do Teorema de Abel valem com $-R$ em lugar de R. Basta tomar a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^n$.

2. A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente no seu intervalo de convergência $(-R, R)$ se, e só se, converge nos pontos R e $-R$.

3. A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ converge uniformemente em $[-1+\delta, 1]$, para cada $\delta > 0$ mas não converge uniformemente em $(-1, 1]$.