Famílias Equicontínuas de Funções - Teorema de Stone-Weierstrass
Aula 40

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

28 de Junho de 2023

Primeiro Semestre de 2023

O Teorema de Aproximação de Weierstrass

Teorema (de Aproximação de Weierstrass)

Dados $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ e $\epsilon > 0$, existe um polinômio $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\|p - f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon$.

Prova: Faremos a prova para $a = 0$ e $b = 1$. O caso geral será deixado como exercício ($[0,1] \ni x \mapsto y = x(b-a) + a \in [a,b]$).

Seja $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ e os polinômios de Bernstein

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

associados a f. Note que se $f \equiv 1$, então

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1. \tag{1}$$

Derivando a identidade anterior, obtemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}&\left[kx^{k-1}(1-x)^{n-k}-(n-k)x^{k}(1-x)^{n-k-1}\right]\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}[k(1-x)-(n-k)x]\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx)=0.\end{aligned}$$

Multiplicando por $x(1-x)$ obtemos que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}(k-nx)=0.$$

Derivando novamente e multiplicando por $x(1-x)$ e usando (1)

$$-nx(1-x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (k-nx)^2 = 0. \qquad (2)$$

Dividindo esta última expressão por n^2 obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (x - \frac{k}{n})^2 = \frac{x(1-x)}{n}. \qquad (3)$$

É claro que

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|.$$

Como f é uniformemente contínua em $[0,1]$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|x - \frac{k}{n}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\frac{k}{n})| < \epsilon/2$.

Agora, para qualquer $x \in [0,1]$ fixo, separamos a soma do lado direito em duas partes, denotadas por Σ e Σ', onde

- Σ é a soma dos termos para os quais $|x - \frac{k}{n}| < \delta$ e
- Σ' é a soma dos termos remanescentes.

É claro que $\Sigma < \epsilon/2$. Provaremos que, para n suficientemente grande e independentemente de x, $\Sigma' < \epsilon/2$.

Como f é limitada existe $K>0$ tal que $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| \leqslant K$. Segue que

$$\sum{}' \leqslant 2K \sum_{\substack{1\leqslant k\leq n \\ |x-\frac{k}{n}|\geqslant\delta}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} =: 2K\sum{}''.$$

De (3) obtemos que

$$\frac{\delta^2}{2K}\sum{}' \leqslant \delta^2\sum{}'' \leqslant \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Isto prova o resultado. $\square$

O Teorema de Stone-Weierstrass

Seja $X \subset \mathbb{R}$ um compacto e $C(X, \mathbb{R})$ os espaço das funções contínuas de X em $\mathbb{R}$ com a norma usual, isto é,

$$\|f - g\| = \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Em $C(X, \mathbb{R})$ definimos a soma $f+g$ e multiplicação $f \cdot g$ de duas funções além da multiplicação af de um escalar a por uma função f de forma usual.

Um conjunto $A \subset C(X, \mathbb{R})$ é dito uma álgebra se $f, g \in A$, $a \in \mathbb{R}$ implica $f + g \in A$, $f \cdot g \in A$ e $af \in A$.

Exemplo

O conjunto dos polinômios trigonométricos é uma álgebra em $C([a,b],\mathbb{R})$.

Definição (Álgebra gerada)

Se $E \subset C(X,\mathbb{R})$ *a interseção de todas as álgebras contendo* E *é uma álgebra, denotada por* $A(E)$, *chamada álgebra gerada por* E.

Exemplo

O conjunto dos polinômios reais em uma variável real são a álgebra gerada por $\{1, x\}$.

Teorema

Se $A \subset C(X, \mathbb{R})$ é uma álgebra então

$$A^{-} = \{f \in C(X, \mathbb{R}) : f \text{ é limite uniforme de funções em } A\}$$

também é uma álgebra.

Prova: Se $f \in A^{-}$ and $g \in A^{-}$, existem seqüências $\{f_n\}, \{g_n\}$ em A tais $f_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} f, g_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} g$ uniformemente em X. Segue que, para todo $c \in \mathbb{R}$

$$A \ni f_n + g_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} f + g, \quad A \ni f_n g_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} fg, \quad A \ni cf_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} cf$$

uniformemente em K. Logo $f + g \in A^{-}, fg \in \mathscr{B}$, and $cf \in A^{-}$, e A^{-} é uma ágebra. □

O Teorema de Stone-Weierstrass

Teorema (Stone-Weierstrass)

Seja $A \subset C(X,\mathbb{R})$ uma álgebra tal que $A = A^{-}$, $1 \in A$ e se $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Então, $A = C(X,\mathbb{R})$.

Lema 01: Se $f \in A$, então $|f| \in A$

Se $\max\limits_{x \in X} |f(x)| < M$, $\epsilon > 0$, $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ for um polinômio (do Teorema de Aproximação de Weierstrass) tal que

$$||t| - p(t)| < \epsilon, \quad \forall t \in [-M, M],$$

e $p(f) = a_0 + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_n f^n$, então $p(f) \in A$ e

$$||f(x)| - p(f(x))| < \epsilon, \quad x \in X.$$

Segue do fato que A é fechada em $C(X, \mathbb{R})$ que $|f| \in A$.

Lema 02: Se $h, g \in A$ então $\max\{h, g\} \in A$ e $\min\{h, g\} \in A$

A seguir mostremos que se $h, g \in A$ então $\max\{h, g\} \in A$ e $\min\{h, g\} \in A$. Isto segue do fato que

$$\min\{h, g\} = \frac{1}{2}(h+g) - \frac{1}{2}|h-g| \in A \quad \text{e}$$

$$\max\{h, g\} = \frac{1}{2}(h+g) + \frac{1}{2}|h-g| \in A.$$

Lema 03: Se $x,y \in X$, $\exists\, f_{xy} \in A$, $f_{xy}(x) = f(x)$ e $f_{xy}(y) = f(y)$.

Seja $x, y \in X$ com $x \neq y$ e $f \in C(X, \mathbb{R})$. A função constante g^x com valor $f(x)$ está em A (aqui usamos que $1 \in A$).

Seja $h^y \in A$ tal que $h^y(x) \neq h^y(y)$. Sem perda de generalidade assumimos $h^y(x) = 0$ (aqui usamos novamente que $1 \in A$).

Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$f_{xy} = g^x + ah^y \in A$$

satisfaz $f_{xy}(x) = f(x)$ e $f_{xy}(y) = f(y)$.

Lema 04: Existe $f_x \in A$, $f_x(x) = f(x)$ e $f_x(z) < f(z) + \epsilon, \forall z \in X$.

Seja $\epsilon > 0$, para cada $y \in X$ existe um intervalo aberto I_y tal que $y \in I_y$ e $f_{xy}(z) < f(z) + \epsilon$, $\forall z \in I_y$.

Como X é compacto temos que $I_{y_1}, \ldots, I_{y_n}$ cobrem X para alguma escolha de $y_1, \ldots, y_n$. Seja

$$f_x = \min\{f_{xy_1}, \ldots, f_{xy_n}\}.$$

Então $f_x \in A$, $\boxed{f_x(x) = f(x)}$ e $\boxed{f_x(z) < f(z) + \epsilon, \forall z \in X.}$

Lema 05: Existe $F \in A, f(z) - \epsilon < F(z) < f(z) + \epsilon, \forall z \in X$.

Agora,para $x \in X$, existe um intervalo aberto I_x tal que, $\forall z \in I_x$

$$f_x(z) > f(z) - \epsilon.$$

Como X é compacto, um número finito desses intervalos $I_{x_1}, \ldots, I_{x_n}$ cobrem X. Seja

$$F = \max\{f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}\}.$$

Então $F \in A$ e $\forall z \in X$,

$$|f(z) - F(z)| < \epsilon$$

o que prova o teorema. $\square$