Famílias Equicontínuas de Funções - Teorema de Aproximação de Weierstrass
Aula 39

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

26 de Junho de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Definição

Seja $\{f_n\}$ *uma seqüência de funções definidas em um conjunto* D.

Dizemos que $\{f_n\}$ *é pontualmente limitada em* D *se* $\{f_n(x)\}$ *é limitada,* $\forall x \in D$, *ou seja, se existe função* $\phi : D \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$|f_n(x)| \leqslant \phi(x), \quad x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

Dizemos que $\{f_n\}$ *é uniformemente limitada em* D *se existe* $M \geqslant 0$ *tal que*

$$|f_n(x)| \leqslant M, \quad x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

Teorema (1)

Se $\{f_n\}$ *é uma seqüência pontualmente limitada de funções definidas em um conjunto contável* D, *então* $\{f_n\}$ *tem uma subseqüência* $\{f_{n_k}\}$ *tal que* $\{f_{n_k}(x)\}$ *converge para cada* $x \in D$.

Equicontinuidade

O conceito de equicontinuidade para uma família de funções é a chave para a consecução do projeto de mostrar que uma seqüência 'limitada' de funções (e alguma hipótese adicional) tem uma subseqüência 'convergente'.

Definição

Uma família $\mathscr{F}$ de funções definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$ é dita equicontínua em D se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in D, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon, \ \forall f \in \mathscr{F}.$$

Teorema

Se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto, $f_n \in \mathscr{C}(K)$ para $n \in \mathbb{N}$ e se $\{f_n\}$ converge uniformemente em K, então $\{f_n\}$ é equicontínua em K.

Prova: Dado $\epsilon > 0$, da convergência uniforme de $\{f_n\}$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f_N(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall n \geqslant N.$$

K compacto $\Rightarrow$ f_n's uniformemente contínuas e existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\epsilon}{3} < \epsilon, \quad x, y \in K, |x - y| < \delta \text{ e } \boxed{1 \leqslant i \leqslant N}.$$

Se $\boxed{n > N}$ e $x, y \in K, |x - y| < \delta$, segue que

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_n(y)| < \epsilon.$$

Isto prova o teorema.$\square$

Teorema

Se K é compacto e a seqüência $\{f_n\}$ em $\mathscr{C}(K)$ é pontualmente limitada e equicontínua em K, então

(a) $\{f_n\}$ é uniformemente limitada em K,

(b) $\{f_n\}$ tem uma subseqüência uniformemente convergente.

Prova: (a) Como $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é equicontínua, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3} < \epsilon,\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \ \forall x, y \in K, |x - y| < \delta.$$

Como K é compacto, sejam $p_1, \ldots, p_r$ em K tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^{r} V_\delta(p_i)$ onde, para $x \in K$, $V_\delta(x) = \{y \in K : |y - x| < \delta\}$.

Como $\{f_n\}$ é pontualmente limitada, existe $M_i < \infty$ tal que $|f_n(p_i)| < M_i$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se $M = \max(M_1, \ldots, M_r)$, então $|f_n(x)| < M + \epsilon$, $\forall x \in K$.

(b) Seja $E \subset \bar{E} = K$ contável. Do Teorema (1) $\{f_n\}$ tem uma subseqüência $\{f_{n_i}\}$ tal que $\{f_{n_i}(x)\}$ converge para cada $x \in E$.

Provaremos que $\{g_i := f_{n_i}\}$ converge uniformemente em K. Da equicontinuidade, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que

$$|g_i(x) - g_i(y)| < \frac{\epsilon}{3},\ \forall i \in \mathbb{N} \text{ e } \ \forall x, y \in K, |x - y| < \delta.$$

Como K é compacto e $\bar{E} = K$, existem $x_1, \ldots, x_m$ em E tais que

$$K \subset V_\delta(x_1) \cup \cdots \cup V_\delta(x_m).$$

Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que, para $1 \leqslant \kappa \leqslant m$ e $i, j \geqslant N$, $|g_i(x_\kappa) - g_j(x_\kappa)| < \frac{\epsilon}{3}$. Se $x \in K$, $x \in V(x_\kappa, \delta)$, para algum $1 \leqslant \kappa \leqslant m$, e $|g_i(x) - g_i(x_\kappa)| < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Se $i, j \geqslant N$, segue que

$$|g_i(x) - g_j(x)| \leqslant |g_i(x) - g_i(x_\kappa)| + |g_i(x_\kappa) - g_j(x_\kappa)| + |g_j(x_\kappa) - g_j(x)| < \epsilon.$$

Segue que $\{g_i\}$ converge uniformemente. $\square$

O Teorema de Aproximação de Weierstrass

Teorema (de Aproximação de Weierstrass)

Dados $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ *e* $\epsilon > 0$, *existe um polinômio* $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ *tal que* $\|p - f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon$.

Prova: Faremos a prova para $a=0$ e $b=1$. O caso geral será deixado como exercício ($[0,1] \ni x \mapsto y = x(b-a)+a \in [a,b]$).

Seja $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ e os polinômios de Bernstein

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

associados a f. Note que se $f \equiv 1$, então

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x+(1-x)]^n = 1. \tag{1}$$

Derivando a identidade anterior, obtemos que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[kx^{k-1}(1-x)^{n-k}-(n-k)x^{k}(1-x)^{n-k-1}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}[k(1-x)-(n-k)x]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx)=0.$$

Multiplicando por $x(1-x)$ obtemos que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}(k-nx)=0.$$

Derivando novamente e multiplicando por $x(1-x)$ e usando (1)

$$-nx(1-x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (k-nx)^2 = 0. \qquad (2)$$

Dividindo esta última expressão por n^2 obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (x-\frac{k}{n})^2 = \frac{x(1-x)}{n}. \qquad (3)$$

É claro que

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} |f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)|.$$

Como f é uniformemente contínua em $[0,1]$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|x - \frac{k}{n}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\frac{k}{n})| < \epsilon/2$.

Agora, para qualquer $x \in [0,1]$ fixo, separamos a soma do lado direito em duas partes, denotadas por Σ e Σ', onde

- Σ é a soma dos termos para os quais $|x - \frac{k}{n}| < \delta$ e
- Σ' é a soma dos termos remanescentes.

É claro que $\Sigma < \epsilon/2$. Provaremos que, para n suficientemente grande e independentemente de x, $\Sigma' < \epsilon/2$.

Como f é limitada existe $K>0$ tal que $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|\leqslant K$. Segue que

$$\sum{}' \leqslant 2K \sum_{\substack{1\leqslant k\leq n\\ |x-\frac{k}{n}|\geq\delta}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} =: 2K\sum{}''.$$

De (3) obtemos que

$$\frac{\delta^2}{2K}\sum{}' \leqslant \delta^2\sum{}'' \leqslant \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Isto prova o resultado. $\square$