# Famílias Equicontínuas de Funções
# Aula 38

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

23 de Junho de 2023

**Primeiro Semestre de 2023**

# Famílias equicontínuas de funções

Vimos que toda seqüência limitada de números reais contém uma subseqüência convergente, e surge a questão de saber se algo semelhante é verdadeiro para seqüências de funções. Para tornar a questão mais precisa, definiremos dois tipos de limitação.

## Definição

*Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções definidas em um conjunto $D$.*

*Dizemos que $\{f_n\}$ é pontualmente limitada em $D$ se $\{f_n(x)\}$ é limitada, $\forall x \in D$, ou seja, se existe função $\phi : D \to \mathbb{R}$ tal que*

$$|f_n(x)| \leqslant \phi(x), \quad x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

*Dizemos que $\{f_n\}$ é uniformemente limitada em $D$ se existe $M \geqslant 0$ tal que*

$$|f_n(x)| \leqslant M, \quad x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

## Teorema (1)

*Se* $\{f_n\}$ *é uma seqüência pontualmente limitada de funções definidas em um conjunto contável* $D$*, então* $\{f_n\}$ *tem uma subseqüência* $\{f_{n_k}\}$ *tal que* $\{f_{n_k}(x)\}$ *converge para cada* $x \in D$*.*

- Se $\{f_n\}$ é pontualmente limitada em $D$ e $D_1 \subset D$ é contável, existe subseqüência $\{f_{n_k}\}$ tal que $\{f_{n_k}(x)\}$ converge, $\forall x \in D_1$.

- Mesmo que $\{f_n\}$ seja uma seqüência uniformemente limitada de funções contínuas em compacto $D$, não precisa existir uma subseqüência que convirja pontualmente em $D$.

- Consideraremos este fato no exemplo a seguir, que seria bastante problemático de provar com a matemática que que temos em mãos até agora, faremos a prova utilizando um teorema que será demonstrado em outra disciplina.

## Exemplo

*Seja*

$$f_n(x) = \sin nx, \quad x \in [0, 2\pi], n \in \mathbb{N}.$$

Suponha que exista uma seqüência $\{n_k\}$ tal que $\{\sin n_k x\}$ converge, para cada $x \in [0, 2\pi]$. Nesse caso devemos ter

$$\lim_{k\to\infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x) = 0, \quad x \in [0, 2\pi]$$

por isso

$$\lim_{k\to\infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 = 0, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (será visto em outra disciplina)

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2\, dx = 0.$$

Mas, cálculos simples mostram que

$$\int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2\, dx = 2\pi$$

o que resulta numa contradição.

- A seqüência $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$, $x \in [0,1]$, é convergente pontualmente mas não é uniformemente limitada. É fácil ver que **convergência uniforme** implica em **limitação uniforme**.

- Outra questão é se toda seqüência convergente contém uma subseqüência uniformemente convergente.

- Nosso próximo exemplo mostra que isso não vale em geral, mesmo que a seqüência seja uniformemente limitada em um conjunto compacto.

## Exemplo

*Seja*

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}, \quad x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}.$$

Então $|f_n(x)| \leqslant 1$, $\forall x \in [0, 1]$ e $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo $\{f_n\}$ é uniformemente limitada em $[0, 1]$. Além disso

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

mas

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

e nenhuma subseqüência pode convergir uniformemente em $[0, 1]$.

# Equicontinuidade

O conceito de equicontinuidade para uma família de funções é a chave para a consecução do nosso projeto.

## Definição

*Uma família $\mathscr{F}$ de funções definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$ é dita equicontínua em $D$ se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$x, y \in D, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon, \ \forall f \in \mathscr{F}.$$

É claro que uma função pertencente a uma família equicontínua é uniformemente contínua. A seqüência anterior não é equicontínua (considere $\epsilon = \frac{1}{2}$, $x = 0$ e $y = \frac{1}{n}$).

Mostraremos que existe uma relação próxima entre equicontinuidade e convergência uniforme de seqüências de funções contínuas.

**Teorema**

*Se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto, $f_n \in \mathscr{C}(K)$ para $n \in \mathbb{N}$ e se $\{f_n\}$ converge uniformemente em $K$, então $\{f_n\}$ é equicontínua em $K$.*

**Prova:** Seja $\epsilon > 0$ dado. Como $\{f_n\}$ converge uniformemente, existe um inteiro $N$ tal que

$$\|f_n - f_N\| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall n > N$$

Como funções contínuas são uniformemente contínuas em conjuntos compactos, existe um $\delta > 0$ tal que

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\epsilon}{3} < \epsilon, \quad x, y \in K, |x - y| < \delta \text{ e } 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Se $n > N$ e $x, y \in K, |x - y| < \delta$, segue que

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_n(y)| < \epsilon.$$

Isto prova o teorema. $\square$

### Teorema

*Se $K$ é compacto e a seqüência $\{f_n\}$ em $\mathscr{C}(K)$ é pontualmente limitada e equicontínua em $K$, então*

*(a)* $\{f_n\}$ *é uniformemente limitada em $K$,*

*(b)* $\{f_n\}$ *tem uma subseqüência uniformemente convergente.*

**Prova:** (a) Da equicontinuidade da seqüência $\{f_n\}$, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3} < \epsilon,\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall x, y \in K, |x - y| < \delta.$$

Como $K$ é compacto, sejam $p_1, \ldots, p_r$ em $K$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^{r} V_\delta(p_i)$ onde, para $x \in K$, $V_\delta(x) = \{y \in K : |y - x| < \delta\}$.

Como $\{f_n\}$ é pontualmente limitada, existe $M_i < \infty$ tal que $|f_n(p_i)| < M_i$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se $M = \max(M_1, \ldots, M_r)$, então $|f_n(x)| < M + \epsilon$, $\forall x \in K$. Isso prova $(a)$.

(b) Seja $E$ um subconjunto denso contável de $K$. Do Teorema (1) $\{f_n\}$ tem uma subseqüência $\{f_{n_i}\}$ tal que $\{f_{n_i}(x)\}$ converge para cada $x \in E$.

Coloque $f_{n_i} = g_i$, para simplificar a notação. Vamos provar que $\{g_i\}$ converge uniformemente em $K$.

Da equicontinuidade, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que

$$|g_i(x) - g_i(y)| < \frac{\epsilon}{3}, \ \forall i \in \mathbb{N} \text{ e } \ \forall x, y \in K, |x - y| < \delta.$$

Como $E$ é denso em $K$ e $K$ é compacto, existem finitos pontos $x_1, \ldots, x_m$ em $E$ tais que

$$K \subset V_\delta(x_1) \cup \cdots \cup V_\delta(x_m)$$

Dado $\epsilon > 0$ escolha $\delta > 0$ como no início da prova. Se $x \in K$, $x \in V(x_\kappa, \delta)$ para algum $\kappa$, de modo que

$$|g_i(x) - g_i(x_\kappa)| < \frac{\epsilon}{3}$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Se $i, j \geqslant N$, segue que

$$\begin{aligned}|g_i(x)-g_j(x)| &\leqslant |g_i(x)-g_i(x_\kappa)|+|g_i(x_\kappa)-g_j(x_\kappa)|+|g_j(x_\kappa)-g_j(x)| \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Isso completa a prova. $\square$