Séries de Funções
Convergência uniforme e Diferenciabilidade
Aula 37

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

21 de Junho de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Convergência uniforme e continuidade - Recorde que ...

Teorema (1)

Suponha $f_n \to f$ uniformemente em um conjunto D e seja x um ponto de acumulação de D. Se

$$\lim_{t \to x} f_n(t) = a_n \quad n \in \mathbb{N}$$

então $\{a_n\}$ é convergente, e

$$\lim_{t \to x} f(t) = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Dito de outra forma

$$\lim_{t \to x} \lim_{n \to \infty} f_n(t) = \lim_{n \to \infty} \lim_{t \to x} f_n(t).$$

Convergência uniforme e derivação

Como já vimos, convergência uniforme de $\{f_n\}$ não implica nada sobre a convergência da seqüência $\{f_n'\}$. Logo, hipóteses mais fortes serão necessárias para concluir que $f_n' \to f'$ se $f_n \to f$.

Teorema

Se $\{f_n\}$ é uma seqüência de funções diferenciáveis em $[a, b]$ tal que $\{f_n'\}$ converge uniformemente em $[a, b]$ e $\{f_n(x_0)\}$ converge para algum $x_0 \in [a, b]$, então $\{f_n\}$ converge uniformemente em $[a, b]$, para uma função f que é diferenciável em $[a, b]$, e

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Prova: Dado $\epsilon > 0$ seja $N \in \mathbb{N}$ tal que, $m, n \geqslant N$, implica

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\epsilon}{2},$$

e

$$\left|f_n'(t) - f_m'(t)\right| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}, \ \forall t \in [a, b].$$

Para $n, m \geqslant N$, aplicado o teorema do valor médio a $f_n - f_m$, temos

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| \leqslant \frac{|x-t|\epsilon}{2(b-a)} \leqslant \frac{\epsilon}{2}, \ \forall t, x \in [a, b]. \qquad (\ddagger)$$

Agora, a desigualdade

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant|f_n(x)-f_m(x)-f_n(x_0)+f_m(x_0)|+|f_n(x_0)-f_m(x_0)|$$

implica que

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\epsilon,\ x\in[a,b],\ n,m\geqslant N,$$

de modo que $\{f_n\}$ converge uniformemente em $[a,b]$. Seja

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x),\ x\in[a,b].$$

Agora, fixe $x \in [a, b]$ e defina

$$\phi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, \quad \phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

para $a \leqslant t \leqslant b, t \neq x$. Então

$$\lim_{t \to x} \phi_n(t) = f_n'(x), \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Segue de (‡) que, para $m, n \geqslant N$,

$$|\phi_n(t) - \phi_m(t)| \leqslant \frac{\epsilon}{2(b-a)},$$

e $\{\phi_n\}$ converge uniformemente para $t \neq x$. Como $\{f_n\}$ converge para f, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi(t)$$

uniformemente para $a \leqslant t \leqslant b, t \neq x$. Se aplicarmos o Teorema (1) a $\{\phi_n\}$ temos que

$$\lim_{t\to x} \phi(t) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

e isto é o que queríamos provar, da definição de $\phi(t)$.$\square$

Observação: Se assumimos, além das hipóteses acima, que as f_n' são contínuas, uma prova muito mais curta pode ser dada usando os resultados anteriores e no teorema fundamental do cálculo.

Teorema

Existe uma função contínua que não é diferenciável em nenhum ponto.

Prova: Defina $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2-$periódica e tal que

$$\varphi(x) = |x|, \ x \in [-1, 1].$$

Então, para todo s e t,

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq |s - t| \qquad (*)$$

e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi\left(4^n x\right)$$

Como $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, a série que define f converge uniformemente em $\mathbb{R}$ pelo Teste M de Weierstrass e, consequentemente, f é contínua. Agora fixe $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}^*$ e faça

$$\delta_m = \pm \frac{1}{2} \cdot 4^{-m}$$

onde o sinal é escolhido de maneira que não haja um inteiro entre $4^m x$ e $4^m (x + \delta_m)$. Isto pode ser feito porque $4^m |\delta_m| = \frac{1}{2}$. Defina

$$\gamma_n = \frac{\varphi(4^n (x + \delta_m)) - \varphi(4^n x)}{\delta_m}.$$

Quando $n > m$, $4^n \delta_m$ é um inteiro par, e $\gamma_n = 0$. Quando $0 \leqslant n \leqslant m$, $(*)$ implica que $|\gamma_n| \leqslant 4^n$.

Como $|\gamma_m| = 4^m$, concluímos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m}\right| &= \left|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n\right| \\ &\geqslant 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n \\ &= \frac{1}{2}\left(3^m+1\right).\end{aligned}$$

Quando $m \to \infty, \delta_m \to 0$. Segue que f não é diferenciável em x.$\square$

Famílias equicontínuas de funções

Vimos que toda seqüência limitada de números reais contém uma subseqüência convergente, e surge a questão de saber se algo semelhante é verdadeiro para seqüências de funções. Para tornar a questão mais precisa, definiremos dois tipos de limitação.

Definição

Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções definidas em um conjunto D.

Dizemos que $\{f_n\}$ é pontualmente limitada em D se $\{f_n(x)\}$ é limitada, $\forall x \in D$, ou seja, se existe função $\phi : D \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f_n(x)| \leqslant \phi(x), \quad x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

Dizemos que $\{f_n\}$ é uniformemente limitada em D se existe $M \geqslant 0$ tal que

$$|f_n(x)| \leqslant M, \quad x \in D, n \in \mathbb{N}.$$

Teorema (1)

Se $\{f_n\}$ é uma seqüência pontualmente limitada de funções definidas em um conjunto contável D, então $\{f_n\}$ tem uma subseqüência $\{f_{n_k}\}$ tal que $\{f_{n_k}(x)\}$ converge para cada $x \in D$.

Prova: Sejam $\{x_i\}, i = 1, 2, 3, \ldots$, os pontos de D, dispostos em seqüência. Como $\{f_n(x_1)\}$ é limitado, existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente e tal que $\left\{f_{\varphi_1(n)}(x_1)\right\}$ é convergente.

Consideremos agora as seqüências $S_1, S_2, S_3, \ldots$, representadas por

$$\begin{array}{cccccc}
S_1 : & f_{\varphi_1(1)} & f_{\varphi_1(2)} & f_{\varphi_1(3)} & f_{\varphi_1(4)} & \cdots \\
S_2 : & f_{\varphi_2(1)} & f_{\varphi_2(2)} & f_{\varphi_2(3)} & f_{\varphi_2(4)} & \cdots \\
S_3 : & f_{\varphi_3(1)} & f_{\varphi_3(2)} & f_{\varphi_3(3)} & f_{\varphi_3(4)} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

e com as seguintes propriedades:

(a) $\varphi_j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é estritamente crescente e $\varphi_{j+1}(\mathbb{N}) \subset \varphi_j(\mathbb{N})$

(b) $\left\{f_{\varphi_j(n)}(x_j)\right\}$ converge, $(\{f_n(x_j)\}$ limitada garante esta escolha).

Agora consideramos a seqüência diagonal

$$S : f_{\varphi_1(1)} \quad f_{\varphi_2(2)} \quad f_{\varphi_3(3)} \quad f_{\varphi_4(4)} \cdots .$$

Por construção, a seqüência S (exceto possivelmente seus primeiros $n-1$ termos) é uma subseqüência de S_n. Portanto, $\{f_{\phi_n(n)}(x_i)\}$ converge, como $n \to \infty$, para cada $x_i \in D$. □

Lema do Sol Nascente - Rising sun lemma

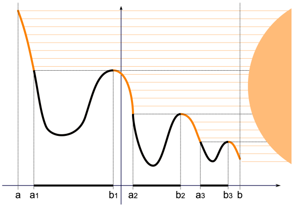

Figure: Ilustração sobre o porque do nome "Lema do Sol Nascente".

O lema do sol nascente é devido a Frigyes Riesz ([1]). O nome do lema vem de imaginar o gráfico da função g como uma paisagem montanhosa, com o sol brilhando horizontalmente da direita. O lema descreve o conjunto dos pontos de (a,b) que estão na sombra.

Lema (Lema do Sol Nascente)

Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e*

$$S = \{x \in [a, b] : \ \textit{existe } y \in (x, b] \textit{ com } g(y) > g(x)\}$$

Note que $b \notin S$ *e* a *pode ou não estar em* S*. Defina* $E = S \cap (a, b)$*.*

Então E *é um conjunto aberto e pode ser escrito como uma união contável de intervalos disjuntos*

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$$

com $g(a_k) = g(b_k)$*, exceto se* $a_{k_0} = a \in S$*, para algum* k_0*. Neste caso* $g(a) < g(b_{k_0})$*. Além disso, se* $x \in (a_k, b_k)$*, então* $g(x) < g(b_k)$*.*

Prova: Note que, se $[c,d)\subset S$ e $d\notin S$ então $g(c)<g(d)$.

De fato, se $g(c)\geqslant g(d)$, $g(z)=\max\{g(x):x\in[c,d]\}$ para algum $z\in[c,d)$. Como $z\in S$, existe $y\in(z,b]$ com $g(z)<g(y)$.

Claramente, $y\in(d,b]$ e $g(d)\leqslant g(z)<g(y)$. Isso implica que $d\in S$, o que é uma contradição.

Da continuidade de g, E é aberto, e portanto pode escrito, de maneira única, como união enumerável de intervalos abertos e disjuntos $\{(a_k,b_k):k\in\mathbb{N}\}$.

Segue imediatamente da afirmativa anterior que $g(x) < g(b_k)$ para $x \in (a_k, b_k)$. Como g é contínua, também devemos ter $g(a_k) \leqslant g(b_k)$.

Se $a_k \neq a$ ou $a \notin S$, então $a_k \notin S$, então $g(a_k) \geqslant g(b_k)$. Assim, $g(a_k) = g(b_k)$ nesses casos. Por fim, se $a_k = a \in S$, a primeira parte da prova nos diz que $g(a) < g(b_k)$. $\square$

F. Riesz, Sur un Théorème de Maximum de Mm. Hardy et Littlewood *J. London Math. Soc.* (1932) s1 - **7** (1): 10-13