Séries de Funções
Convergência uniforme e Continuidade e Integrabilidade
Aula 36

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

19 de Junho de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Definição (Convergência uniforme de seqüências e séries)

Seja $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *uma seqüência de funções definidas em* $D \subset \mathbb{R}$ *e tomando valores em* $\mathbb{R}$. *Dizemos que* $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *converge uniformemente para* f *em* D *se, dado* $\epsilon > 0$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon, \quad \forall n \geqslant N.$$

Dizemos que a série $\sum f_n(x)$ *converge uniformemente em* D *se a seqüência* $\{s_n\}$ *de somas parciais definida por*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = s_n(x)$$

converge uniformemente em D.

O critério de Cauchy para convergência uniforme é o seguinte.

Teorema (Critério de Cauchy para convergência uniforme)

A seqüência de funções $\{f_n\}$, definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$, converge uniformemente em D se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m \geqslant N$, $n \geqslant N$,

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \epsilon \tag{1}$$

Para séries, existe um teste muito conveniente para convergência uniforme, devido a Weierstrass.

Teorema (Teste M de Weierstrass)

Seja $\{f_n\}$uma sequência de funções definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$. Suponha que

$$\sup_{x \in D} |f_n(x)| \leqslant M_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $\sum M_n$ converge então $\sum f_n$ converge uniformemente em D.

A recíproca é, em geral, falsa pois, para $f_n(x) = \frac{x^2\left(1-x^2\right)^{n+2}}{\ln(n+3)}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, a série converge uniformemente e $M_n = \frac{(1+\frac{1}{n+2})^{-(n+2)}}{(n+3)\ln(n+3)}$, portanto $\sum M_n$ diverge.

Convergência uniforme e continuidade

Teorema (1)

Suponha $f_n \to f$ uniformemente em um conjunto D e seja x um ponto de acumulação de D. Se

$$\lim_{t\to x} f_n(t) = a_n \quad n \in \mathbb{N}$$

então $\{a_n\}$ é convergente, e

$$\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Dito de outra forma

$$\lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} f_n(t).$$

Prova: Dado $\epsilon > 0$, da convergência uniforme, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leqslant \epsilon, \ \forall n, m \geqslant N, \forall t \in D$$

Fazendo $t \to x$

$$|a_n - a_m| \leqslant \epsilon, \ \forall n, m \geqslant N.$$

Logo $\{a_n\}$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, convergente, digamos para a.

Agora

$$|f(t) - a| \leqslant |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - a_n| + |a_n - a|\,.$$

Escolhemos n tal que (da convergência uniforme)

$$\sup_{t \in D} |f(t) - f_n(t)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}$$

e tal que $|a_n - a| \leqslant \frac{\epsilon}{3}$. Para este n fixo escolhemos $\delta > 0$ tal que

$$|f_n(t) - a_n| \leqslant \frac{\epsilon}{3},\ t \in D, 0 < |t - x| < \delta.$$

Segue que

$$|f(t) - a| \leqslant \epsilon,\ t \in D,\ 0 < |t - x| < \delta.$$

ou seja $\lim\limits_{t \to x} f(t) = a$. Isto mostra o resultado.$\square$

Teorema

Se $\{f_n\}$ é uma seqüência de funções contínuas definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$ e $f_n \to f$ uniformemente em D, então f é contínua em D.

Este resultado muito importante e é um corolário imediato do Teorema anterior.

A recíproca é, em geral, falsa como pode ser visto no exemplo $f_n(x) = n^2 x \left(1 - x^2\right)^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Mas há um caso em que a recíproca é verdadeira.

Teorema

Seja $K \subset \mathbb{R}$ um compacto. Se

(a) $\{f_n\}$ uma sequência de funções contínuas em K,

(b) $f_n(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$, $\forall x \in K$ e f é contínua em K e

(c) $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$, $\forall x \in K$ e $\forall n \in \mathbb{N}$,

então $f_n \to f$ uniformemente em K.

Prova: Seja $g_n = f_n - f$. Então g_n é contínua, $g_n \to 0$ ponto a ponto e $g_n \geqslant g_{n+1}$. Provaremos que $g_n \to 0$ uniformemente em K.

Dado $\epsilon > 0$, seja $K_n = \{x \in K : g_n(x) \geqslant \epsilon\}$.

Como g_n é contínua, K_n é compacto. Como $g_n \geqslant g_{n+1}$, $K_n \supset K_{n+1}$.

Fixe $x \in K$. Como $g_n(x) \to 0$, $x \notin K_n$ para n suficientemente grande e portanto $x \notin \bigcap K_n$. Em outras palavras, $\bigcap K_n$ é vazia. Segue que K_N é vazio para algum N.

Disto segue que $0 \leqslant g_n(x) < \epsilon$ para todo $x \in K$ e para todo $n \geqslant N$. $\square$

Observe que a compacidade é realmente necessária aqui. Se

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1},\ x \in (0,1),\ n \in \mathbb{N},$$

então $f_n(x) \to 0$ monotonicamente em $(0,1)$, mas a convergência não é uniforme.

Definição

If $D \subset \mathbb{R}$, $\mathscr{C}(D)$ denota o conjunto de todas as funções $f : D \to \mathbb{R}$ que são contínuas e limitadas. A cada $f \in \mathscr{C}(D)$ associamos a sua norma do supremo

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

Como f é limitada, $\|f\| < \infty$. É claro que $\|f\| = 0$ se, e somente se, $f(x) = 0$ para todo $x \in D$ e dadas $f, g \in \mathscr{C}(D)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\| + \|g\|, \ \forall x \in D \text{ e}$$
$$|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leqslant |\lambda|\|f\|, \ \forall x \in D.$$

Portanto

$$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|, \ \|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|.$$

Definimos a distância entre $f \in \mathscr{C}(D)$ e $g \in \mathscr{C}(D)$ por $\|f - g\|$.

Com esta noção de distância, dada uma seqüência$\{f_n\}$ em $\mathscr{C}(D)$ podemos definir as noções de convergência e de seqüências de Cauchy exatamente como antes.

Uma seqüência $\{f_n\}$ converge uniformemente para f se, e somente se, $\|f_n - f\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Teorema

Com a noção de distância acima $\mathscr{C}(D)$ é um espaço métrico completo.

Prova: Seja $\{f_n\}$ uma sequência de Cauchy em $\mathscr{C}(D)$. Isto significa que dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\| < \epsilon$, $\forall m, n \geqslant N$.

Como vimos anteriormente, existe uma função contínua para a qual $\{f_n\}$ converge uniformemente. Além disso, f é limitada, pois existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x) - f_n(x)| < 1$, $\forall x \in D$, e f_n é limitada.

Assim $f \in \mathscr{C}(D)$ e $\|f - f_n\| \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ pois $f_n \to f$ uniformemente em D. $\square$

Convergência uniforme e integração

Teorema

Seja $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ *não-decrescente. Se* $f_n \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$, $n \in \mathbb{N}$, *e* $f_n \to f$ *uniformemente em* $[a, b]$, *então* $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$, *e*

$$\int_a^b f d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n d\alpha$$

(*A existência do limite é parte da conclusão.*)

Prova: Faça

$$\epsilon_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|.$$

Então

$$f_n - \epsilon_n \leqslant f \leqslant f_n + \epsilon_n$$

e as integrais superior e inferior de f satisfazem

$$\int_a^b (f_n - \epsilon_n)\, d\alpha \leqslant \underline{\int_a^b} f d\alpha \leqslant \overline{\int_a^b} f d\alpha \leqslant \int_a^b (f_n + \epsilon_n)\, d\alpha.$$

Segue que

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f d\alpha - \underline{\int_a^b} f d\alpha \leqslant 2\epsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

Como $\epsilon_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, as integrais superiores e inferiores de f coinciden e $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a.b])$. Além disso

$$\left|\int_a^b f d\alpha - \int_a^b f_n d\alpha\right| \leqslant \epsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

Isto implica o resultado. $\square$

Corolário

Se $f_n \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b]$ *e*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

com a série convergindo uniformemente em $[a, b]$, *então*

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n d\alpha$$

Em outras palavras, a série pode ser integrada termo a termo.