Seqüências e Séries de Funções
Convergência Uniforme e o Test M de Weierstrass
Aula 35

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

16 de Junho de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Definição (Convergência pontual de seqüências e séries)

Seja $\{f_n\}$ *,* $n = 1, 2, 3, \ldots$*, uma seqüência de funções definidas em* $D \subset \mathbb{R}$ *e tomando valores em* $\mathbb{R}$*. Se* $\{f_n(x)\}$ *é convergente para todo* $x \in D$*, definimos a função limite da seqüência* $\{f_n\}$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in D.$$

Analogamente, se $\sum f_n(x)$ *converge para todo* $x \in D$ *definimos*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in D,$$

e a função f *é chamada de soma da série* $\sum f_n$*.*

O principal problema que surge no processo de passagem ao limite descrito na definição anterior é determinar se as propriedades importantes das funções são preservadas por passagem ao limite.

Por exemplo, se as funções f_n são contínuas, diferenciáveis ou integráveis, o mesmo vale para a função limite? Que relação há entre f_n' e f' ou entre as integrais de f_n e de f?

Note que, f é contínua em um ponto de acumulação x de D se

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \boxed{f(x) = \lim_{t\to x} f(t)} = \lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

ou seja, se a ordem em que os processos de limite são executados é irrelevante.

Mostraremos agora, por meio de vários exemplos, que os processos limite não podem, em geral, ser intercambiados sem afetar o resultado.

Posteriormente, daremos condições para que a ordem em que as operações de limite são realizadas seja irrelevante.

Exemplo

Considere a seqüência dupla. Para $m, n \in \mathbb{N}^*$ *seja*

$$s_{m,n} = \frac{m}{m+n}.$$

Então, para n *fixo,* $\lim_{m\to\infty} s_{m,n} = 1$*, de forma que*

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} s_{m,n} = 1.$$

Por outro lado, para cada m *fixo,* $\lim_{n\to\infty} s_{m,n} = 0$ *de forma que*

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} s_{m,n} = 0.$$

Exemplo

Seja

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \quad (x \ \textit{real; } n = 0, 1, 2, \ldots),$$

e considere

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

Como $f_n(0) = 0$, temos $f(0) = 0$. Para $x \neq 0$, a série geométrica acima é convergente com soma $1 + x^2$. Logo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ 1 + x^2 & (x \neq 0) \end{cases}$$

de forma que a função soma de uma série de funções contínuas pode ser descontínua.

Exemplo

Para $m = 1, 2, 3, \ldots$, *faça*

$$f_m(x) = \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$$

Quando $m!x$ *é um inteiro,* $f_m(x) = 1$. *Para todos os demais valores de* x, $f_m(x) = 0$. *Agora seja*

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x).$$

Para x irracional, $f_m(x) = 0$ para todo m; portanto $f(x) = 0$. Para $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, p, q inteiros, $q \neq 0$, $m!x$ é inteiro se $m \geqslant q$, e $f(x) = 1$. Logo

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n} = \begin{cases} 0 & (x \text{ irrational }), \\ 1 & (x \text{ rational }). \end{cases}$$

Desta forma, obtemos uma função descontínua em todos os pontos e que, portanto, não é Riemann-integrável.

Exemplo

Seja

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \quad x \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}^*,$$

e

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Então $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *e*

$$f_n'(x) = \sqrt{n} \cos nx$$

de forma que $\{f_n'\}$ *não converge para* f'. *Por exemplo,*

$$f_n'(0) = \sqrt{n} \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

enquanto que $f'(0) = 0$.

Exemplo

Seja

$$f_n(x) = n^2 x \left(1 - x^2\right)^n, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \; n \in \mathbb{N}.$$

Para $0 < x \leqslant 1$, *temos*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Como $f_n(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \; n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{n^2}{2n+2} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Se na definição de f_n trocarmos n^2 por n teremos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2},$$

enquanto que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, e

$$\int_0^1 \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx = 0$$

Desta forma, o limite das integrais não precisa ser igual a integral do limite, mesmo que ambos sejam finitos.

Após esses exemplos, que mostram o que pode dar errado se os processos limite forem trocados sem cuidado, definimos agora um novo modo de convergência, mais forte do que a convergência pontual, que nos permitirá chegar a resultados positivos e interessantes.

Definição (Convergência uniforme de seqüências e séries)

Seja $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *uma seqüência de funções definidas em* $D \subset \mathbb{R}$ *e tomando valores em* $\mathbb{R}$. *Dizemos que* $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *converge uniformemente para* f *em* D *se, dado* $\epsilon > 0$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon, \quad \forall n \geqslant N.$$

Dizemos que a série $\sum f_n(x)$ *converge uniformemente em* D *se a seqüência* $\{s_n\}$ *de somas parciais definida por*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = s_n(x)$$

converge uniformemente em D.

O critério de Cauchy para convergência uniforme é o seguinte.

Teorema (Critério de Cauchy para convergência uniforme)

A seqüência de funções $\{f_n\}$, definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$, converge uniformemente em D se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m \geqslant N$, $n \geqslant N$,

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \epsilon \tag{1}$$

Prova: Suponha que $\{f_n\}$ convirja uniformemente em D e seja f a função limite. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N$, implica

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, para todo $x \in D$ e $n, m \geqslant N$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leqslant \epsilon.$$

Ou seja

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \epsilon, \ \forall n, m \geqslant N.$$

Reciprocamente, suponha que a condição (1) vale. Logo, $\{f_n(x)\}$ converge, para todo x, para um limite que chamamos de $f(x)$.

Assim a seqüência $\{f_n\}$ converge em D, para f. Temos que provar que a convergência é uniforme.

Seja $\epsilon > 0$ dado e escolha $N \in \mathbb{N}$ para que (1) seja válida. Fixe n e faça $m \to \infty$ em (1). Como $f_m(x) \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ temos

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon, \forall n \geq N \text{ e } \forall x \in D.$$

Isto completa a prova.$\square$

Para séries, existe um teste muito conveniente para convergência uniforme, devido a Weierstrass.

Teorema (Teste M de Weierstrass)

Seja $\{f_n\}$uma sequência de funções definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$. Suponha que

$$\sup_{x \in D} |f_n(x)| \leqslant M_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $\sum M_n$ converge então $\sum f_n$ converge uniformemente em D.

A recíproca não vale.

Prova: Se $\sum M_n$ converge, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\sum_{i=n}^{m} f_i(x)\right| \leqslant \sum_{i=n}^{m} M_i \leqslant \epsilon,\ \forall x \in D,\ \forall m, n \geqslant N.$$

A convergência uniforme agora segue do Critério de Cauchy para convergência uniforme.$\square$

A recíproca é, em geral, falsa pois, para $f_n(x) = \frac{x^2\left(1-x^2\right)^{n+2}}{\ln(n+3)}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, a série converge uniformemente e $M_n = \frac{(1+\frac{1}{n+2})^{-(n+2)}}{(n+3)\ln(n+3)}$, portanto $\sum M_n$ diverge.

Seqüência dupla

Uma seqüência dupla (x_{nk}) é uma função $x : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada par (n, k) de números naturais um número real x_{nk}.

$$\begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{array}$$

Consideremos as somas repetidas $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}\right)$ e $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}\right)$.
Mesmo quando 'convergem', elas podem dar diferentes resultados.

Por exemplo, somando primeiro as linhas no quadro abaixo, obtemos $\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}) = 0$ enquanto se somarmos primeiro as colunas, teremos $\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1.$

$$
\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \to & 0 \\
0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & \cdots & \to & 0 \\
0 & 0 & \frac{7}{8} & -\frac{7}{8} & 0 & \cdots & \to & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{15}{16} & -\frac{15}{16} & \cdots & \to & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \cdots & \cdots & &
\end{array}
$$

Surge o problema de obter condições que assegurem a igualdade das duas somas repetidas. Nosso primeiro resultado será o

Lema

Se $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *é dada por* $f_n(j) = x_{n1} + \ldots + x_{nj}$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente em* $\mathbb{N}$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}$ *converge,* $\forall n \in \mathbb{N}$, *então*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}\right)$$

Prova: Segue do fato que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\lim_{j\to\infty} f_n(j)\right] = \lim_{j\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(j)\right] = \lim_{j\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j} x_{nk}\right]$$

$$= \lim_{j\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{j}\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}. \square$$

Teorema (A)

Dada $\{x_{nk}\}$, se $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}|x_{nk}| = a_n$ para cada n e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ então

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}\right).$$

Esta afirmação implica, em particular, que todas as séries contidas na igualdade acima são convergentes.

Prova: Pondo $f_n(k) = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk}$, como no lema, temos $|f_n(k)| \leqslant a_n$ para todo k e todo n. Logo $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é uniformemente convergente em $k \in \mathbb{N}$ pelo Teste M de Weierstrass. O lema anterior implica o resultado.$\square$