Mudança de variáveis, O Teorema Fundamental do Cálculo e a Fórmula de Integração por partes
Aula 33

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

12 de Junho de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Útimos resultados vistos

A função degrau unitário é dada por $I(x)=0, x\leqslant 0$ e $I(x)=1,\ x>0$.

Teorema

Se $a<s<b, f\in\mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ *é contínua em* s, *e* $\alpha(x)=I(x-s)$, *então*

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(s)$$

Se $c_n\geqslant 0,\ n=1,2,3,\ldots,\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *é convergente,* $\{s_n\}$ *é uma seqüência de pontos distintos em* (a,b),

$$\alpha(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n I\left(x-s_n\right)$$

e f *é contínua em* $[a,b]$ *então*

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f\left(s_n\right).$$

Teorema

Sejam $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ *não-decrescente e diferenciável com* $\alpha' \in \mathscr{R}([a, b])$ *e* $f \in \mathscr{B}([a,b], \mathbb{R})$*. Então* $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b])$ *se, e só se,* $f\alpha' \in \mathscr{R}([a,b])$*. Neste caso*

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx.$$

Os dois teoremas anteriores ilustram a generalidade e a flexibilidade inerentes ao processo de integração de Stieltjes.

Se α é uma função degrau pura, a integral se reduz a uma série finita ou infinita.

Se α tem uma derivada integrável, a integral se reduz a uma integral de Riemann usual.

Isso torna possível, em muitos casos, estudar as integrais e séries simultaneamente.

Para ilustrar este ponto, considere um exemplo físico. O momento de inércia de um fio reto de comprimento unitário, em torno de um eixo que passa por uma extremidade, em ângulo reto com o fio, é

$$\int_0^1 x^2 dm \qquad (\ddagger)$$

onde $m(x)$ é a massa contida no intervalo $[0, x]$. Se o fio for considerado com densidade contínua ρ, ou seja, se $m'(x) = \rho(x)$, então (33) se transforma em

$$\int_0^1 x^2 \rho(x) dx$$

Por outro lado, se o fio for composto de massas m_i concentradas nos pontos x_i, (‡) torna-se

$$\sum_i x_i^2 m_i$$

Portanto (‡) contém o caso anterior e também o caso no qual m é contínua mas não é diferenciável em todos os pontos.

Mudança de variável

Teorema (Mudança de variável)

Sejam $\phi : [A, B] \to [a, b]$ *contínua e bijetora com* $\phi(A) = a$ *e* $\phi(B) = b$, α *é não-decrescente,* $\beta = \alpha \circ \phi$ *e* $g = f \circ \varphi$. *Se* $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *então* $g \in \mathscr{R}(\beta, [A, B])$ *e*

$$\int_A^B g d\beta = \int_a^b f d\alpha$$

Prova: Se $\mathcal{P}=\{x_0,\dots,x_n\}\in\mathscr{P}_{[a,b]}$ e $\mathcal{Q}=\{y_0,\dots,y_n\}\in\mathscr{P}_{[A,B]}$, com $x_i=\varphi(y_i)$. Todas as partições de $[A,B]$ são obtidas desta forma.

Como os valores de f em $[x_{i-1},x_i]$ e de g em $[y_{i-1},y_i]$ são os mesmos,

$$U(\mathcal{Q},g,\beta)=U(\mathcal{P},f,\alpha),\quad L(\mathcal{Q},g,\beta)=L(\mathcal{P},f,\alpha).$$

Como $f\in\mathscr{R}(\alpha,[a,b]),\mathcal{P}$ pode ser escolhida de forma que ambas $U(\mathcal{P},f,\alpha)$ e $L(\mathcal{P},f,\alpha)$ estão próximas a $\displaystyle\int_a^b f d\alpha$.

Segue que $g\in\mathscr{R}(\beta,[A,B])$ e o resultado esta demonstrado.$\square$

Agora vamos considerar o seguinte caso especial. Tomamos $\alpha(x) = x$. Etão $\beta = \varphi$. Suponha que $\varphi' \in \mathscr{R}([A, B])$. Aplicando os dois resultados anteriores temos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_A^B f(\varphi(y))\varphi'(y)dy.$$

Teorema fundamental do cálculo e Integração por partes

A seguir mostraremos que a derivação e a integração, em algum sentido, são operações inversas.

Teorema

Se $f \in \mathscr{R}([a,b])$. Para $a \leqslant x \leqslant b$, faça

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Então $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é Lipschitz contínua (portando diferenciável exceto em um conjunto com medida exterior nula) e, se f é contínua em $x_0 \in [a,b]$, então F é differenciável em x_0, e

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Prova: Como $f \in \mathscr{R}([a,b])$, $\sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = M < \infty$. Se $a \leqslant x < y \leqslant b$, então

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leqslant M(y - x),$$

e segue que F é Lipschitz contínua.

Agora, se f é contínua em x_0, dado $\epsilon > 0$, escolha $\delta > 0$ tal que

$$t \in [a, b], \ |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Logo, se $x_0 - \delta < s \leqslant x_0 \leqslant t < x_0 + \delta$ e $a \leqslant s < t \leqslant b$ temos

$$\left| \frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{t - s} \int_s^t [f(u) - f(x_0)]\, du \right| < \epsilon.$$

Segue que $F'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

Teorema (O teorema fundamental do cálculo)

Se $f \in \mathscr{R}([a,b])$ e existe função diferenciável $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $F' = f$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Prova: Dado $\epsilon > 0$ seja $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathscr{P}([a,b])$ tal que $U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < \epsilon$. Do Teorema do Valor Médio

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)\,\Delta x_i, \text{ para algum } t_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

para $i = 1, \dots, n$. Logo $\sum_{i=1}^n f(t_i)\,\Delta x_i = F(b) - F(a)$ e

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx \right| < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário o resultado segue. $\square$

Teorema (Integração por partes)

Se $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$, *são diferenciáveis,* $F' = f$, $G' = g \in \mathscr{R}([a,b])$. *Então*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

Prova: Faça $H(x) = F(x)G(x)$. $H' \in \mathscr{R}([a,b])$ como soma de produtos de funções em $\mathscr{R}([a,b])$. O resultado segue do teorema anterior a H. $\square$