# Séries como integrais de Riemann-Stieltjes e relação da integral de Riemann-Stieltjes com a integral de Riemann
Aula 32

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

07 de Junho de 2023

**Primeiro Semestre de 2023**

## Definição

*A função degrau unitário $I$ é definida por*

$$I(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqslant 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

## Teorema

*Se $a < s < b$, $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ é contínua em $s$, e $\alpha(x) = I(x-s)$, então*

$$\int_a^b f \, d\alpha = f(s)$$

**Prova:** Considere as partições $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, onde $x_0 = a$, e $x_1 = s < x_2 < x_3 = b$. Então

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) = M_2, \quad L(\mathcal{P}, f, \alpha) = m_2.$$

Como $f$ é contínua em $s$, vemos $M_2$ e $m_2$ convergem para $f(s)$ quando $x_2 \to s$. $\square$

## Teorema

*Se $c_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ é convergente, $\{s_n\}$ é uma seqüência de pontos distintos em $(a, b)$,*

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I\left(x - s_n\right)$$

*e $f$ é contínua em $[a, b]$ então*

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f\left(s_n\right).$$

**Prova:** Por comparação a série é convergente para cada $x$. Sua soma $\alpha(x)$ é claramente monótona, $\alpha(a) = 0$ e $\alpha(b) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Dado $\epsilon > 0$ escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{N+1}^{\infty} c_n < \epsilon$. Faça

$$\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n I\left(x - s_n\right), \quad \alpha_2(x) = \sum_{N+1}^{\infty} c_n I\left(x - s_n\right).$$

Dos teoremas anteriores

$$\int_a^b f d\alpha_1 = \sum_{i=1}^{N} c_n f\left(s_n\right)$$

Como $\alpha_2(b) - \alpha_2(a) = \sum_{N+1}^{\infty} c_n < \epsilon$

$$\left|\int_a^b f d\alpha_2\right| \leqslant M\epsilon$$

onde $M = \sup |f(x)|$. Como $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, segue que

$$\left|\int_a^b f d\alpha - \sum_{i=1}^{N} c_n f\left(s_n\right)\right| \leqslant M\epsilon$$

Se fazemos $N \to \infty$, obtemos o resultado.$\square$

## Teorema

*Sejam* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ *não-decrescente e diferenciável com* $\alpha' \in \mathscr{R}([a, b])$ *e* $f \in \mathscr{B}([a,b], \mathbb{R})$. *Então* $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$ *se, e só se,* $f\alpha' \in \mathscr{R}([a,b])$. *Neste caso*

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx.$$

**Prova:** Dado $\epsilon > 0$ existe $\mathcal{P} = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathscr{P}([a, b])$ tal que

$$U\left(\mathcal{P}, \alpha'\right) - L\left(\mathcal{P}, \alpha'\right) < \epsilon \qquad (\bullet)$$

Do Teorema do Valor Médio existe $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$\Delta\alpha_i = \alpha'\left(t_i\right)\Delta x_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Se $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ então

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)\right| \Delta x_i < \epsilon.$$

Seja $M = \sup |f(x)|$. Como

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\alpha'(t_i)\,\Delta x_i$$

segue que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\alpha'(s_i)\,\Delta x_i\right| \leqslant M\epsilon. \qquad (*)$$

Em particular,

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(s_i\right) \Delta\alpha_i \leqslant U\left(\mathcal{P}, f\alpha'\right) + M\epsilon$$

para todas as escolhas $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, de modo que

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) \leqslant U\left(\mathcal{P}, f\alpha'\right) + M\epsilon.$$

O mesmo argumento nos leva de $(*)$ a

$$U\left(\mathcal{P}, f\alpha'\right) \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) + M\epsilon.$$

e portanto

$$\left|U(\mathcal{P}, f, \alpha) - U\left(\mathcal{P}, f\alpha'\right)\right| \leqslant M\epsilon. \qquad (\dagger)$$

Agora note que (•) permanece válida de $\mathcal{P}$ for substituída por um refinamento. Logo (†) também permance válida. Concluímos que

$$\left| \overline{\int_a^b} f d\alpha - \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx \right| \leqslant M\epsilon.$$

Como $\epsilon$ é arbitrário

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx$$

para qualquer $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$. A igualdade para as integrais inferiores segue da mesma maneira de $(*)$.$\square$