Classes de Funções Rieman-Stieltjes Integráveis e Propriedades
Aula 31

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

05 de Junho de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Classes de Funções Riemann-Stieltjes Integráveis

Teorema

$$C([a,b];\mathbb{R}) \subsetneq \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$$

Prova: Dado $\epsilon > 0$, escolhamos $\eta > 0$, de modo que

$$\eta = \frac{\epsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)}\,. \tag{1}$$

e, como f é uniformemente continua, seja $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $x, t \in [a,b]$, $|x-t| < \delta$ implica $|f(x)-f(t)| < \eta$.

Seja $\mathcal{P} = \{a = x_0, \cdots, x_n = b\}$ tal que $\|\mathcal{P}\| = \sup\{\Delta x_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} < \delta$.

Como f é contínua, podemos escolher $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tais que $m_i = f(t_i)$ e $M_i = f(s_i)$. Logo, $|t_i - s_i| \leqslant \Delta x_i < \delta$ e

$$|M_i - m_i| = |f(x_i) - f(t_i)| < \eta$$

e

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta\alpha_i < \eta \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \epsilon.$$

Segue que $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$. $\square$

Teorema

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é monótona em* $[a, b]$ *e* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é contínua e não-decrescente. Então* $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$.

Prova: Dado $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, escolha uma partição $\mathcal{P}$ tal que

$$\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Isto é possível pois α satisfaz a propriedade do valor intermediário. Se f é não-decrescente (o outro caso é análogo). Então

$$M_i = f(x_i), \quad m_i = f(x_{i-1}) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

e portanto

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \cdot [f(b) - f(a)] < \epsilon \end{aligned}$$

se n for suficientemente grande. Segue que, $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$. □

Teorema

Se $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ possui somente um número finito de pontos de descontinuidade e $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função não-decrescente que é contínua nos pontos onde f é descontínua. Então $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$.

Prova: Dado $\epsilon > 0$, se $M = \sup |f(x)|$ e $E = \{y_1, \cdots, y_k\}$ o conjunto (finito) das descontinuidades de f. Como α é contínua em todos os pontos de E, podemos cobrir E por intervalos disjuntos $[a,b] \supset [u_j, v_j] \ni y_j$, $1 \leqslant i \leqslant k$ tais que

$$\sum_{j=1}^{k} (\alpha(v_j) - \alpha(u_j)) < \epsilon.$$

Podemos escolher estes intervalos de modo que se $y_j \notin \{a,b\}$ então $y_j \in I_j = (u_j, v_j)$ (se $y_1 = a$ ($y_k = b$), $I_1 = [a, v_1)$ ($I_k = (u_k, b]$)).

O conjunto $K = [a,b] \backslash \bigcup_{j=1}^{k} (u_j, v_j)$ é compacto e f é uniformemente contínua em K. Seja $\delta > 0$ tal que $s, t \in K$, $|s - t| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \epsilon$.

Agora escolhemos uma partição $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$, da seguinte forma: $u_j, v_j \in \mathcal{P}$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Nenhum ponto de (u_j, v_j) pertence a $\mathcal{P}$. Se $x_{i-1} \neq u_j$, para todo $1 \leqslant j \leqslant k$, então $\Delta x_i < \delta$.

Note que $M_i - m_i \leqslant 2M$ para todo i e $M_i - m_i \leqslant \epsilon$ exceto quando x_{i-1} é algum dos u_j. Logo

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq [\alpha(b) - \alpha(a)]\epsilon + 2M\epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$. $\square$

Propriedades

Teorema

Se $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$, $f([a, b]) \subset [m, M]$ e $\phi : [m, M] \to \mathbb{R}$ é contínua então, $h = \phi \circ f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$.

Prova: Dado $\epsilon > 0$, como ϕ é uniformemente contínua em $[m, M]$, existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que $s, t \in [m, M]$, $|s - t| \leq \delta \Rightarrow |\phi(s) - \phi(t)| < \epsilon$. Como $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$, existe $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ tal que

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \delta^2.$$

Se $r \in \mathscr{B}([a, b], \mathbb{R})$ e $M_i^r = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} r(x)$, $m_i^r = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} r(x)$. Seja $A = \{i : 1 \leqslant i \leqslant n \text{ e } M_i^f - m_i^f < \delta\}$ e $B = \{i : 1 \leqslant i \leqslant n \text{ e } M_i^f - m_i^f \geqslant \delta\}$, então, para $i \in A$, a escolha de δ implica que $M_i^h - m_i^h \leqslant \epsilon$.

Para $i \in B, M_i^h - m_i^h \leqslant 2K$, onde $K = \sup_{t\in[m,M]} |\phi(t)|$. Logo, da escolha de $\mathcal{P}$,

$$\delta \sum_{i\in B} \Delta\alpha_i \leqslant \sum_{i\in B} \left(M_i^f - m_i^f\right) \Delta\alpha_i < \delta^2$$

e $\sum_{i\in B} \Delta\alpha_i < \delta < \epsilon$. Segue que

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, h, \alpha) - L(\mathcal{P}, h, \alpha) &= \sum_{i\in A} \left(M_i^h - m_i^h\right) \Delta\alpha_i + \sum_{i\in B} \left(M_i^h - m_i^h\right) \Delta\alpha_i \\ &\leqslant \epsilon[\alpha(b) - \alpha(a)] + 2K\delta < \epsilon[\alpha(b) - \alpha(a) + 2K]. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário segue que $h \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$.$\square$

Teorema

(*a*) *Se* $f_1 \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *e* $f_2 \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *então* $f_1 + f_2 \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$, $c \cdot f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$, *e*

$$\int_a^b (f_1 + f_2)\, d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha,$$

$$\int_a^b cf d\alpha = c \int_a^b f d\alpha.$$

(*b*) *Se* $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ *em* $[a, b]$ *então*

$$\int_a^b f_1 d\alpha \leqslant \int_a^b f_2 d\alpha$$

(*c*) *Se* $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *e* $c \in (a, b)$ *então* $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, c]) \cap \mathscr{R}(\alpha, [c, b])$, *e*

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha$$

(d) *Se* $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *e if* $|f(x)| \leqslant M$ *então*

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leqslant M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

(e) *Se* $f \in \mathscr{R}(\alpha_1, [a, b])$ *e* $f \in \mathscr{R}(\alpha_2, [a, b])$ *então* $f \in \mathscr{R}(\alpha_1 + \alpha_2, [a, b])$ *e*

$$\int_a^b fd\,(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b fd\alpha_1 + \int_a^b fd\alpha_2$$

se $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *e* $\mathbb{R} \ni c > 0$ *então* $f \in \mathscr{R}(c\alpha, [a, b])$ *e*

$$\int_a^b fd(c\alpha) = c\int_a^b fd\alpha$$

Prova: Se $f = f_1 + f_2$ e $\mathcal{P}$ é qualquer partição $[a, b]$, temos

$$\begin{aligned} L\left(\mathcal{P}, f_1, \alpha\right) + L\left(\mathcal{P}, f_2, \alpha\right) &\leqslant L(\mathcal{P}, f, \alpha) \\ &\leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) \leqslant U\left(\mathcal{P}, f_1, \alpha\right) + U\left(\mathcal{P}, f_2, \alpha\right). \end{aligned}$$

Se $f_1 \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ e $f_2 \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ e $\epsilon > 0$ existem $\mathcal{P}_j \in \mathscr{P}([a, b])$ $(j = 1, 2)$ tal que

$$U\left(\mathcal{P}, f_j, \alpha\right) - L\left(\mathcal{P}, f_j, \alpha\right) \leqslant U\left(\mathcal{P}_j, f_j, \alpha\right) - L\left(\mathcal{P}_j, f_j, \alpha\right) < \frac{\epsilon}{2},$$

onde $\mathcal{P}$ é refinamento comum a $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$. Logo

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon.$$

Segue que $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$.

Com esta mesma $\mathcal{P}$ remos

$$U(\mathcal{P}, f_J, \alpha) < \int_a^b f_j d\alpha + \epsilon \quad (j = 1, 2)$$

e

$$\int_a^b f d\alpha \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) < \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha + 2\epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário conluímos que

$$\int_a^b f d\alpha \leqslant \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha$$

Este mesmo resultado para $-f_1$ e $-f_2$, nos dá a desigualdade reversa e a igualdade está provada.

As provas das demais afirmativas são semelhantes (exercício). Na parte (c) a estratégia é considerar refinamentos que contém o ponto c, na aproximação da integral.$\square$

Teorema

Se $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ e $g \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ então

(a) $fg \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$;

(b) $|f| \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ e $\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leqslant \int_a^b |f| d\alpha.$

Prova: Se $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ e $\phi(t) = t^2$ então $\phi \circ f = f^2 \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$.
A identidade

$$4fg = (f + g)^2 - (f - g)^2$$

completa a prova de (a).

Se $\phi(t) = |t|$, $\phi \circ f = |f| \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$. Escolha $c = \pm 1$ tal que

$$c \int f d\alpha \geqslant 0$$

$$\left|\int f d\alpha\right| = c \int f d\alpha = \int c f d\alpha \leqslant \int |f| d\alpha$$

pois $cf \leq |f|$. Isto prova b). $\square$