2.ª Prova - SMA 380 - Análise

Professor: Alexandre Nolasco de Carvalho

Nome: ______________________________

Número USP: ______________________________

Questão	Nota
01.ª	
02.ª	
03.ª	
04.ª	
05.ª	
Total	

02.06.2023

Instruções:

- Assinale todas alternativas verdadeiras com V e as falsas com F.
- Em cada questão escolha **uma alternativa** e justifique (prova ou contra-exemplo).
- Cada questão vale 2.0 pontos, desses 1.0 é o valor da justificativa do ítem escolhido.
- As itens marcados com * valem ponto adicional.
- A prova é individual. Boa prova!

1.ª Questão. CONJUNTOS DE NÚMEROS REAIS

ÍTEM	V OU F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	
(6)*	

(1) Sejam $\mathscr{I} = \{\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} : \Lambda \subset \mathbb{N}, I_\lambda$ é um intervalo aberto para cada $\lambda \in \Lambda$ e se $\lambda, \mu \in \Lambda, \lambda \neq \mu, I_\lambda \cap I_\mu = \varnothing\}$ e $\mathscr{A} = \{A \subset \mathbb{R} : A$ é aberto$\}$. Então existe uma bijeção entre $\mathscr{I}$ e $\mathscr{A}$.

(2) Seja I é um intervalo aberto. Existem conjuntos não vazios, abertos e disjuntos A e B tais que $I = A \cup B$.

(3) Dada uma cobertura $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de $[a,b]$ onde cada I_λ é um intervalo aberto existe $\Lambda' \subset \Lambda$ finito tal que $[a,b] \subset \cup_{\lambda'\in\Lambda'} I_{\lambda'}$.

(4) Toda seqüência decrescente de compactos não-vazios tem interseção não vazia.

(5) Seja $I_j = [a_j, b_j]$, $1 \leqslant j \leqslant n$ com $b_j < a_{j+1}$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Então

$$m^*\Big(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\Big) = \sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j).$$

(6)* Seja $E \subset [a,b]$ com $m^*(E) > 0$ e $\mathscr{I}$ é uma cobertura de E por intervalos não degenerados tal que, dados $x \in E$ e $\epsilon > 0$, existe $I \in \mathscr{I}$ tal que $x \in I$ e $\ell(I) < \epsilon$. Dado $\epsilon > 0$, existem $N \in \mathbb{N}$ e intervalos $I_1, \ldots, I_N \in \mathscr{I}$ disjuntos com

$$m^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) > m^*(E) - \epsilon.$$

2.ª Questão. LIMITES DE FUNÇÕES

ÍTEM	V OU F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	
(6)*	

(1) Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função, $D' \subset D$ e p um ponto de acumulação de D'. Se $\lim_{x\to p} f(x) = L$ então $\lim_{x\to p} f|_{D'}(x) = L$.

(2) Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D. O $\lim_{x\to p} f(x) = L$ existe se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existe para toda seqüência $\{x_n\}$ em $D\backslash\{p\}$ que converge para p.

(3) Seja $D\subset\mathbb{R}$, $f:D\to\mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D. O $\lim_{x\to p} f(x)$ existe se, e só se, f é de Cauchy em p, isto é, dado $\epsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $x, y \in D$, $0<|x-p|<\delta$ e $0<|y-p|<\delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

(4) Seja $D \subset \mathbb{R}$, p um ponto de acumulação de D e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função limitada em uma vizinhança de p. Então $\overline{\lim_{x\to p}} f(x)$ e $\underline{\lim_{x\to p}} f(x)$ são valores de aderência de f e, se ℓ é um valor de aderência de f em p, então $\underline{\lim_{x\to p}} f(x) \leqslant \ell \leqslant \overline{\lim_{x\to p}} f(x)$.

(5) Seja $D \subset \mathbb{R}$, p um ponto de acumulação de D e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. Se o limite $\lim_{x\to p} f(x)$ existe, o conjunto dos valores de aderência de f em p é unitário. A recíproca não vale.

(6)* Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função limitada em cada intervalo limitado. Se $\lim_{x\to\infty} [f(x+1) - f(x)] = L$ então $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = L$.

3.ª Questão. FUNÇÕES CONTÍNUAS

ÍTEM	V OU F
(1)*	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	
(6)	

(1)* Seja $f : [a,b] \to [a,b]$ contínua então existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$.

(2) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $k \in \mathbb{R}$ é tal que $[f(a) - k].[f(b) - k] < 0$, então, existe $\bar{x} \in (a,b)$ tal que $f(\bar{x}) = k$.

(3) Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ e $p \in D$. A função f é contínua em p se, e somente se, para toda seqüência $\{x_n\}$ em D com $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$ existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

(4) Se $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ é contínua e injetiva e $C = f(D)$ então $f^{-1} : C \to \mathbb{R}$ é contínua.

(5) Se $\mathscr{K} \subset \mathbb{R}$ é compacto e $f : \mathscr{K} \to \mathbb{R}$ é contínua então $f : \mathscr{K} \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.

(6) Se o conjunto dos pontos de descontinuidades de f não é enumerável então f não é monótona.

4.ª Questão. FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS

ÍTEM	V OU F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é diferenciável com $f'(a) < f'(b)$ então, para todo $C \in [f'(a), f'(b)]$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = C$.

(2) Seja I é um intervalo e $p \in I$. Existe $f : I \to \mathbb{R}$ que é diferenciável em todo ponto de I e tal que $f' : I \to \mathbb{R}$ tem uma descontinuidade de primeira espécie em p.

(3) Se $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b)$ então f é não-decrescente em $[a, b)$.

(4) Existe $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ que não é monótona, tem derivada à direita em todo ponto de $[a, b)$ e $D^+f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b)$.

(5) Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável. Então f é estritamente convexa em I se, e somente se, $f' : I \to \mathbb{R}$ é estritamente crescente.

5.ª Questão. Funções de Variação Limitada

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é monótona então $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é de variação limitada.

(2) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é Lipschitz contínua então $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é de variação limitada.

(3) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é de variação limitada existem funções não-decrescentes $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = g(x) - h(x)$.

(4) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é monótona, então f é diferenciável exceto possivelmente em um conjunto $E \subset [a, b]$ com $m^*(E) = 0$.

(5) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é Lipschitz contínua então f é diferenciável em $A \subset [a, b]$ com $m^*(A) = b - a$.