Limites, Continuidade e Diferenciabilidade: Revisão - Aula 29

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

31 de Maio de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Abertos, Fechados, Compactos e Conexos

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$.

1) *Um ponto* $a \in A$ *é interior a* A *se existe* $r > 0$ *tal que* $(a - r, a + r) \subset A$.

2) *O conjunto* A *é aberto se todos os seus pontos são interiores.*

3) *O conjunto* A *é fechado em* $\mathbb{R}$ *se seu complementar é aberto.*

4) *O interior* A^{o} *de* A *é o conjunto dos pontos interiores a* A.

5) *O fecho* $\bar{A}$ *de* A *é a interseção de todos os fechados que contém* A.

Teorema

Seja Λ um conjunto e $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de conjuntos.

1) *Se cada A_λ é aberto, $\cup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ é aberto.*
2) *Se cada A_λ é aberto e Λ é um conjunto finito, $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ é aberto.*
3) *Se cada A_λ é fechado, $\cap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ é fechado.*
4) *Se cada A_λ é fechado e Λ é finito, $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ é fechado.*

Exemplo

Todo intervalo aberto é aberto. O interior de $[a, b]$ é (a, b). O interior A^{o} de A é o maior aberto contido em A. O fecho de A é o menor fechado que contém A.

Teorema

Todo subconjunto aberto A de $\mathbb{R}$ se exprime, de maneira única, como união enumerável de intervalos abertos disjuntos

Corolário

Se I é um intervalo aberto e $I = A \cup B$ onde A e B são conjuntos abertos e disjuntos então um deses conjuntos é vazio.

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um ponto $p \in \mathbb{R}$ é aderente a A se existir seqüência $\{x_n\}$ em A tal que $x_n \xrightarrow{n \to \infty} p$.

Sabemos que se p é ponto de acumulação de A então p é aderente a A. Se p é aderente a A e p não é ponto de acumulação de A então $p \in A$. Todo ponto de A é aderente a A. Todo ponto interior a A é aderente a A e é um ponto de acumulação de A.

Teorema

Um ponto $p \in \mathbb{R}$ é aderente a A se, e só se, $A \cap (p-\epsilon, p+\epsilon) \neq \varnothing$ para todo $\epsilon > 0$.

Corolário

Se $A \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente (inferiormente) então $\sup A$ $(\inf A)$ *é aderente a A.*

Teorema

O fecho A^- de $A \subset \mathbb{R}$ é o conjunto $\tilde{A}$ dos pontos aderentes de A.

Definição

Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ com $A \subset B$. Diremos que A é denso em B se $B \subset A^-$

Teorema

Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ com $A \subset B$. São equivalentes

- *Todo ponto de B é aderente a A.*
- *Todo ponto de B é limite de uma seqüência de pontos de A.*
- *Para todo $\epsilon > 0$ e $b \in B$, $(b - \epsilon, b + \epsilon) \cap A \neq \varnothing$.*

Teorema

Todo $B \subset \mathbb{R}$ tem um subconjunto enumerável e denso em B.

Teorema

Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado, não vazio e sem pontos isolados. Então F é não enumerável.

Coberturas e Compactos

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ e Λ um conjunto, uma coleção $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de conjuntos é chamada uma **cobertura de** *A se $A \subset \cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda$.*

Se $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é uma cobertura e $\Lambda' \subset \Lambda$ e $A \subset \cup_{\lambda'\in\Lambda'}\mathcal{A}_{\lambda'}$, $\{\mathcal{A}_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ é dita uma **subcobertura da cobertura** *$\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.*

Se os conjuntos da cobertura são todos abertos a cobertura é dita uma **cobertura aberta**.

Teorema (Borel-Lebsegue)

Dada uma cobertura $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de $[a,b]$ onde cada I_λ é um intervalo aberto existe $\Lambda' \subset \Lambda$ finito tal que $[a,b] \subset \cup_{\lambda'\in\Lambda'} I_{\lambda'}$.

Corolário

Dada uma cobertura aberta $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *de* $[a,b]$ *existe* $\Lambda' \subset \Lambda$ *finito tal que* $[a,b] \subset \cup_{\lambda'\in\Lambda'} A_{\lambda'}$.

Basta lembrar que cada aberto da cobertura pode ser escrito como união enumerável de intervalos abertos (disjuntos).

Corolário

Dada uma cobertura aberta $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *de um conjunto fechado e limitado* F *existe* $\Lambda' \subset \Lambda$ *finito tal que* $F \subset \cup_{\lambda'\in\Lambda'} A_{\lambda'}$.

Teorema

Dado $K \subset \mathbb{R}$ são equivalentes:

1) *K é fechado e limitado.*

2) *Toda cobertura aberta de K possui uma subcobertura finita.*

3) *Todo subconjunto infinito de K possui um ponto de acumulação pertencente a K.*

4) *Toda seqüência de pontos de K possui uma subseqüência que converge para um ponto de K.*

Definição

Um conjunto é compacto se satisfaz uma das condições do teorema anterior.

Corolário (Teorema de Bolzado-Weierstrass)

Todo conjunto infinito e limitado de números reais possui um ponto de acumulação.

Corolário

Toda seqüência decrescente de compactos não-vazios tem interseção não vazia.

Medida Exterior

Se $I=(a,b)$ defina $\ell(I)=b-a$. Dado $A\subset\mathbb{R}$ existe uma família contável de intervalos abertos que cobrem A. Seja $\mathscr{U}_A$ a coleção de todas as coberturas contáveis de intervalos abertos de A.

$$m^*(A)=\inf\left\{\sum\ell\left(I_n\right):\{I_n\}\in\mathscr{U}_A\right\}$$

É claro que $m^*(\varnothing)=0$, $m^*((a,b))\leqslant b-a$, $m^*(\{x\})=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ e que, se $A\subset B$ $m^*(A)\leqslant m^*(B)$.

Lema

$m^*[a,b] = m^*(a,b] = m^*[a,b) = m^*(a,b) = b - a.$

Lema

Se $\{A_n\}$ *é uma família contável de subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *então*

$$m^*\left(\bigcup A_n\right) \leqslant \sum m^*(A_n)$$

Corolário

1) *Se* $A \subset \mathbb{R}$ *é enumerável,* $m^*(A) = 0$*.*

2) *Se* $\{A_n\}$ *é uma família contável de subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *e* $m^*(A_n) = 0$, $\forall n$ *então* $m^*(\bigcup_n A_n) = 0$

Exercício

Seja $I_j = [a_j, b_j]$, $1 \leqslant j \leqslant n$ *com* $b_j < a_{j+1}$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. *Mostre que*

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

O Lema do Recobrimento de Vitali

Lema (Recobrimento de Vitali)

Seja $E \subset [a, b]$, consequentemente $m^*(E) \leqslant b - a$. Se $\mathscr{I}$ é uma cobertura de E por intervalos não degenerados e tal que, dados $x \in E$ e $\epsilon > 0$, existe $I \in \mathscr{I}$ tal que $x \in I$ e $\ell(I) < \epsilon$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe uma coleção finita e disjunta $\{I_1, \dots, I_N\} \subset \mathscr{I}$ tal que

$$m^*\left(E \Big\backslash \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) < \epsilon.$$

Limites

Definição (Limite)

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D. Diremos que **o limite de** $f(x)$ **quando** x **tende** p **é** L *se, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D \text{ e } 0 < |x - p| < \delta, \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Dito de outra forma, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, p) > 0$ tal que

$$f(D \cap (p - \delta, p + \delta) \backslash a) \subset (L - \epsilon, L + \epsilon).$$

Note que:

- Se $\nexists L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \to p} f(x) = L$ diremos que $\lim_{x \to p} f(x)$ não existe.
- O ponto p não precisa pertencer a D e, mesmo que pertença, o valor de f em p não é importante para a definição acima.
- Apenas os valores de f em pontos arbitrariamente próximos a p são importantes para a definição.

Teorema

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D. O limite de $f(x)$ quando x tende a p, caso exista, é único. Este limite será denotado por

$$\lim_{x \to p} f(x) = L.$$

Segue imediatamente da definição que

Teorema (1)

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função, $D' \subset D$ e p um ponto de acumulação de D'. Se $\lim_{x \to p} f(x) = L$ então $\lim_{x \to p} f|_{D'}(x) = L$

Critério negativo para existência de limites

Teorema

Seja $f : D \to \mathbb{R}$, $D', D'' \subset D$ e p ponto de acumulação de D' e D''.

•Se

- *um dos limites $\lim\limits_{x\to p} f|_{D'}(x)$ ou $\lim\limits_{x\to p} f|_{D''}(x)$ não existe ou*
- *ambos existem e $\lim\limits_{x\to p} f|_{D'}(x) \neq \lim\limits_{x\to p} f|_{D''}(x)$*

então o limite $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ não existe.

•Se $(D' \cup D'')\backslash\{p\} = D\backslash\{p\}$, $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ existe se, e só se, $\lim\limits_{x\to p} f|_{D'}(x)$ e $\lim\limits_{x\to p} f|_{D''}(x)$ existem e $\lim\limits_{x\to p} f|_{D'}(x) = \lim\limits_{x\to p} f|_{D''}(x)$.

Limites Laterais

Se $D \subset \mathbb{R}$, diremos que $p \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação à direita (esquerda) de D se é um ponto de acumulação de $D_p^+ = D \cap (p, \infty)$ $(D_p^- = D \cap (-\infty, p))$.

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p é um ponto de acumulação à direita (esquerda) de D. O **limite de** $f(x)$ **quando** x **tende a** p **pela direita (esquerda)** é

$$\lim_{x \to p^+} f(x) := \lim_{x \to p} f|_{D_p^+}(x) \qquad \left(\lim_{x \to p^-} f(x) := \lim_{x \to p} f|_{D_p^-}(x) \right)$$

Corolário

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p é um ponto de acumulação à direita e à esquerda de D. Então

$$\lim_{x \to p} f(x) \quad \textit{existe}$$

se, e só se, existem os limites laterais à direita e à esquerda e

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x).$$

Teorema

Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ e p um ponto de acumulação de D. Se existe $\lim_{x \to p} f(x) = L$ então f é limitada em uma vizinhança de p, isto é, existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tais que $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M$.

Teorema (Confronto)

Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ funções e p um ponto de acumulação de D. Se existe $\delta_0 > 0$ tal que, para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta_0$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ e $\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} h(x) = L$ então $\lim_{x \to p} g(x) = L$.

Teorema (Conservação do Sinal)

Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D. Se $\lim_{x \to p} f(x) = L > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in D$ com $0 < |x - p| < \delta$.

Teorema (Comparação)

Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D. Se existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in D$, $0 < |x - p| < \delta$ e existem $\lim_{x \to p} f(x) = L_f$ então $L_f \leqslant L_g$.

Teorema (Limite por seqüências)

Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D. O limite $\lim_{x \to p} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{n \to \infty} f(x_n)$ existe para toda seqüência $\{x_n\}$ em $D \backslash \{p\}$ que converge para p.

Propriedades do Limite

Sejam $f_i : D_{f_i} \to \mathbb{R}$, $i = 1$ e 2, funções. Suponha que p seja um ponto de acumulação de $D_{f_1} \cap D_{f_2}$ e que $\lim\limits_{x\to p} f_i(x) = L_i$, $i = 1, 2$. Então:

1) $\lim\limits_{x\to p} (f_1 + f_2)(x) = \lim\limits_{x\to p} f_1(x) + \lim\limits_{x\to p} f_2(x) = L_1 + L_2$.

2) $\lim\limits_{x\to p} \; k \; f_1(x) = k \, L_1$ onde $k =$ constante.

3) $\lim\limits_{x\to p} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim\limits_{x\to p} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to p} f_2(x) = L_1 \cdot L_2$.

4) $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to p} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to p} f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.

Teorema (Critério de Cauchy)

Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ *funções e* p *um ponto de acumulação de* D. *O* $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ *existe se, e só se,* f *é de Cauchy em* p*, isto é, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $x, y \in D$, $0 < |x - p| < \delta$ *e* $0 < |y - p| < \delta$ $\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Limite Superior e Limite Inferior

Seja D um subconjunto $\mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. Se p é um ponto de acumulação de D. Suponha que exista um $\delta_0 > 0$ tal que

$$\sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} < \infty$$

Então, existe (ou diverge para $-\infty$) o limite

$$\overline{\lim_{x \to p}} f(x) := \lim_{\delta \to 0^+} \sup\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\}$$

Escrevemos $\overline{\lim\limits_{x \to p}} f(x) = +\infty$ quando f não é limitada superiormente em nenhuma vizinhança de p.

Semelhantemente, se

$$\inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta_0\} > -\infty,$$

definimos (podendo divergir para $+\infty$)

$$\underline{\lim}_{x \to p} f(x) := \lim_{\delta \to 0^+} \inf\{f(x) : x \in D, 0 < |x - p| < \delta\}$$

Escreveremos $\underline{\lim}_{x \to p} f(x) = -\infty$ quando f não for limitada inferiormente em uma vizinhança de p.

Valor de Aderência

Definição

Dizemos que $y \in \mathbb{R}$ *é um valor de aderência de* f *no ponto* p *se existe seqüência* $\{x_n\}$ *em* $D\backslash\{p\}$, $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$ *e* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$.

Teorema

Seja $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função e* p *um ponto de acumulação de* D.

1) *Se* ℓ *é um valor de aderência de* f *em* p, $\underline{\lim}_{x\to p} f(x) \leqslant \ell \leqslant \overline{\lim}_{x\to p} f(x)$.

2) *Se* f *é limitada em uma vizinhança de* p *então* $\overline{\lim}_{x\to p} f(x)$ *e* $\underline{\lim}_{x\to p} f(x)$ *são valores de aderência de* f.

3) $\lim_{x\to p} f(x)$ *existe se, e só se,* f *é limitada em uma vizinhança de* p *e o conjunto dos valores de aderência de* f *em* p *é unitário.*

4) *Se* f *é limitada em uma vizihança de* p, *dado* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $\underline{\lim} f(x) - \epsilon < f(x) < \overline{\lim} f(x) + \epsilon, \forall x \in D,\ 0 < |x - p| < \delta$.

Continuidade

Definição (Continuidade)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$. Diremos que $f(x)$ **é contínua em** *p se, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in D_f \text{ e } |x - p| < \delta, \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(p)| < \varepsilon\ .$$

Observação

Se $p \in D_f$ é um ponto de acumulação de D_f, então f é contínua em p se, e somente se, $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.

Se p é um ponto isolado de D_f então f é contínua em p.

Propriedades da Continuidade

Corolário

Sejam $f_i : D_{f_i} \to \mathbb{R}$, $i=1$ e 2, funções. Suponha que $p \in D_{f_1} \cap D_{f_2}$ e que f e g sejam contínuas em p. Então $f_1 + f_2$, $k \cdot f_1$, $f_1 \cdot f_2$ e, se $f_2(p) \neq 0$, f_1/f_2 são contínuas em p.

Teorema (Limite da Composta)

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ funções tais que $\mathrm{Im}(g) \subset D_f$ e $L \in D_f$. Se p é um ponto de acumulação de D_g, $\lim_{x \to p} g(x) = L$ e f é contínua em L, então

$$\lim_{x \to p} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to p} g(x)\right) = f(L)\,.$$

O Teorema da Conservação do Sinal

Teorema (Teorema da Conservação do Sinal)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\bar{x} \in D_f$ tal que $f(\bar{x}) > 0$ $(f(\bar{x}) < 0)$. Então, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ sempre que $x \in D_f$ e $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$.

O Teorema Anulamento

Teorema (Teorema do Anulamento)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é contínua e* $f(a) < 0 < f(b)$ *ou* $f(a) > 0 > f(b)$, *então, existe* $\bar{x} \in (a, b)$ *tal que* $f(\bar{x}) = 0$.

O Teorema do Valor Intermediário

Teorema (Teorema do Valor Intermediário)

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e tal que* $f(a) < f(b)$ $(f(a) > f(b))$. *Se* $f(a) < k < f(b)$ $(f(a) > k > f(b))$, *então existe* $\bar{x} \in (a, b)$ *tal que* $f(\bar{x}) = k$.

A prova do teorema a seguir segue da definição de continuidade e da caracterização de limites por seqüências.

Teorema

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ e $p \in D$. A função f é contínua em p se, e somente se, para toda seqüência $\{x_n\}$ em D com $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} p$ existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Corolário

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ e $p \in D$. A função f é contínua em p se, e somente se, para toda seqüência $\{x_n\}$ em D com $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} p$ temos $f(x_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(p)$.

O Teorema de Weierstrass e Aplicações

Teorema (de Weierstrass ou do Valor Extremo)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *for contínua, existirão* $p, q \in [a, b]$ *tais que*

$$f(p) \leq f(x) \leq f(q), \quad \textit{para todo } x \in [a, b].$$

Como uma conseqüência do Teorema do Valor Intermediário e do Teorema de Weierstrass, obtemos o seguinte resultado

Corolário

Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Se

$$m=\min\{f(x):x\in[a,b]\} \text{ e } M=\max\{f(x):x\in[a,b]\},$$

então

$$Im(f)=f([a,b])=[m,M].$$

Continuidade e Abertos

Teorema

Seja $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$. A função f é contínua se, e somente se, para todo aberto $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\mathcal{O})$ é aberto em D.

Continuidade e conexos

Teorema

Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então $f(I)$ é um intervalo.

Continuidade e Compactos

Teorema

Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto $f : K \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então $f(K)$ é compacto.

Teorema (Weierstrass)

Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ é contínua, existem $x_1, x_2 \in K$ tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in K$.

Teorema

Se $f : K \to \mathbb{R}$ é contínua e injetiva e $C = f(K)$ então $f^{-1} : C \to \mathbb{R}$ é contínua.

Cuidado!!

Teorema

Se I é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua e injetiva então f é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Teorema

Se $f : D \to \mathbb{R}$ é tal que, dado $\epsilon > 0$ existe função contínua $g : D \to \mathbb{R}$ tal que $|g(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in D$, então f é contínua.

Continuidade Uniforme

Definição (Continuidade Uniforme)

Se $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função, dizemos que f é uniformemente contínua se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in D$, $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Note que:

- Nem toda função contínua é uniformemente contínua.

Exemplo: $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ é uniformemente contínua em $[r,\infty)$ para qualquer $r>0$ mas não em $(0,\infty)$.

- Se $f:D\to\mathbb{R}$ e existem $C>0$ e $\theta\in(0,1]$ tais que $|f(x)-f(y)|\leqslant C|x-y|^{\theta}, \forall x,y\in D$ então f é uniformemente contínua. Se $\theta\in(0,1)$ $[\theta=1]$ f é Hölder [Lipschitz] contínua.

Exemplo: $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$ é Hölder contínua com expoente $\theta=\frac{1}{2}$.

Teorema

Se $f : D \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua então f leva seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy.

Corolário

Se $f : D \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua então para cada ponto de acumulação d' de D existe o limite $\lim_{x \to d'} f(x)$.

Teorema

Se $\mathscr{K} \subset \mathbb{R}$ é compacto e $f : \mathscr{K} \to \mathbb{R}$ é contínua então $f : \mathscr{K} \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.

Teorema

Toda função uniformemente contínua $f : D \to \mathbb{R}$ admite uma única extensão contínua a D^-. Esta extensão é uniformemente contínua.

Descontinuidades

Definição

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. Um ponto de descontinuidade ou uma descontinuidade da função f é um ponto $d \in D$ no qual f não é contínua (descontinuidades são pontos de acumulação de D).

Uma descontinuidade d é de 1^{a} espécie se existe $\lim_{x \to d^+} f(x)$ (se d é um ponto de acumulação à direita) e o limite $\lim_{x \to d^-} f(x)$ (se d é um ponto de acumulação à esquerda).

Uma descontinuidade que não é de 1^{a} espécie é de segunda espécie.

Escreveremos $f(d^{\pm}) = \lim_{x \to d^{\pm}} f(x)$ quando o limite existir.

Teorema

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função monótona.*

1) f *não admite descontinuidades de segunda espécie.*

2) *Se* $f(D)$ *é denso em algum intervalo* I*, então* f *é contínua.*

Teorema

Se as descontinuidades de $f : D \to \mathbb{R}$ são todas de primeira espécie então o conjunto das descontinuidades de f é enumerável. Em particular, se f é monótona o conjunto das descontinuidade de f é enumerável.

Definição

Definição (Derivada)

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função e* $p \in D_f$ *um ponto de acumulação de* D_f*. Se existir o limite* $\lim\limits_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = L \in \mathbb{R}$*, diremos que* L *é a* **derivada** *de* f *em* p *e escreveremos*

$$f'(p) = L = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}.$$

Definição (Derivada à Direita e à Esquerda)

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$ um ponto de acumulação à direita de D_f. Se existir o limite $\lim\limits_{x\to p^+} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = L^+ \in \mathbb{R}$, diremos que L^+ é a **derivada à direita** *de f em p e escreveremos*

$$f'(p^+) = L^+ = \lim_{x\to p^+} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}..$$

De maneira semelhante definimos a derivada à esquerda.

A função derivada

Diferenciabilidade implica continuidade:

Teorema

Se f for diferenciável em $p \in D_f$, então f será contínua em p.

Observação: Não vale a volta. A função $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$ mas não é diferenciável em $x = 0$.

Exemplo (Critério Negativo)

Se f não é contínua em p então f não é diferenciável em p.

Propriedades da Derivada

Teorema (Propriedades da Derivada)

Sejam f e g funções diferenciáveis em p e k uma constante. Então

(a) kf será diferenciável em p e

$$(kf)'(p) = kf'(p),\ \textbf{(Multiplicação por constante)}$$

(b) $f+g$ será derivável em p e

$$(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p),\ \textbf{(Derivada da Soma)}$$

(c) fg será derivável em p e

$$(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p),\ \textbf{(Derivada do Produto)}$$

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)$ será derivável em p, se $g(p) \neq 0$ e, neste caso, teremos

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2},\ \textbf{(Derivada do Quociente)}.$$

A Regra da Cadeia

A Regra da Cadeia nos fornece uma maneira de calcular a derivada da função composta $h = f \circ g$ em termos das derivadas de f e de g.

Teorema (Regra da Cadeia)

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ diferenciáveis com $\mathrm{Im}(g) \subset D_f$. Se g é diferenciável em p, $g(p)$ é ponto de acumulação de D_f, f é diferenciável em $g(p)$ e $h = f \circ g$, então h é diferenciável em p e

$$h'(p) = f'(g(p))g'(p). \tag{1}$$

Derivada da Função Inversa

Proposição (Derivada de funções inversas)

Seja f injetiva, p um ponto de acumulação de $Im(f)$. Se f for diferenciável em $q = f^{-1}(p)$ e f^{-1} é contínua em p, então f^{-1} é diferenciável em p se, e somente se, $f'(f^{-1}(p)) \neq 0$. Neste caso

$$(f^{-1})'(p) = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}\,.$$

Máximos e Mínimos

Seja $f : D \to \mathbb{R}$. Dizemos que f tem um máximo (mínimo) local no ponto $d \in D$ se existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leqslant f(d)$ $(f(x) \geqslant f(d))$ para todo $x \in D$, $|x - d| < \delta$. Quando a desigualdade é estrita dizemos que f tem um máximo (mínimo) local estrito. Os máximos e mínimos locais serão chamados de valores extremos e os pontos onde a função assume valores máximos ou mínimos serão chamados de pontos de máximo ou de mínimo.

Segue diretamente da definição de derivada (derivada à direita) que:

- Se $f : D \to \mathbb{R}$ é não-decrescente (não-crescente) e é diferenciável em um ponto $d \in D$ então, $f'(d) \geqslant 0$ ($f'(d) \leqslant 0$). Vale o mesmo resultado para funções diferenciáveis à direita.

- Se $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável à direita (esquerda) em um ponto $d \in D$ e $f'(d^+) > 0$ ($f'(d^-) > 0$) então existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $x \in (d, d+\delta)$ ($x \in (d-\delta, d)$) implica $f(x) > f(d)$ ($f(x) < f(d)$).

- Se $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável à direita (esquerda) em um ponto $d \in D$ e $f'(d^+) < 0$ ($f'(d^-) < 0$) então existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $x \in (d, d+\delta)$ ($x \in (d-\delta, d)$) implica $f(x) < f(d)$ ($f(x) > f(d)$).

- Se $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $d \in D$, d é ponto de acumulação a direita e a esquerda e $f'(d) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $d - \delta < x < d < y < d + \delta \Rightarrow f(x) < f(d) < f(y)$.

- Se $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $d \in D$, d é um ponto de acumulação a direita e a esquerda e f tem um valor extremo local em d então e $f'(d) = 0$.

A derivada tem a propriedade do valor intermediário

Teorema (Darboux)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é diferenciável com $f'(a) \neq f'(b)$ então, para todo C entre $f'(a)$ e $f'(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = C$.

Teorema (Derivadas não tem descontinuidades 1ª espécie)

Se I é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável então f' não tem descontinuidades de primeira espécie.

Teorema

Se $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \leq 0$ $(D^+f(x) \geq 0)$ para todo $x \in [a, b)$ e $f(a) = 0$ então $f(x) \leq 0$ $(f(x) \geq 0)$ em $[a, b)$.

Corolário

Se $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b)$ então f é não-crescente em $[a, b)$.

Corolário

Se $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b)$ então f é não-decrescente em $[a, b)$.

Corolário

Se $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \to \mathbb{R}$ contínua então f é de classe C^1.

O Teorema do Valor Médio e suas Conseqüências

O Teorema do Valor Médio é um dos Teoremas teoremas fundamentais das funções diferenciáveis em intervalos. A sua demonstração decorre do seguinte resultado:

Theorem (Teorema do Valor Médio de Cauchy)

Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas que são differenciáveis em (a, b), existe $c \in (a, b)$ para o qual

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Corolário (de Rolle)

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é contínua em* $[a,b]$ *e diferenciável em* (a,b) *e* $f(a) = f(b)$, *então existirá* $c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Corolário (do Valor Médio)

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é contínua em* $[a,b]$ *e diferenciável em* (a,b), *então existe* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a),$$

ou seja

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Os fatos a seguir são conseqüências do Teorema do Valor Médio.

Corolário

Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *é diferenciável*

(a) *Se* $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, b)$, *então* f *não-decrescente em* (a, b).

(b) *Se* $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, *então* f *crescente em* (a, b).

(c) *Se* $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, *então* f *é constante em* (a, b).

(d) *Se* $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a, b)$, *então* f *não-crescente em* (a, b).

(e) *Se* $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, *então* f *decrescente em* (a, b).

Observação (Teorema da Função Inversa)

Se $I \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo aberto,* $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ *é* C^1 *e* $f'(x_0) \neq 0$ *então, existe* $\delta > 0$ *tal que* $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ *é injetora* $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = J$ *é um intervalo aberto, e* $f^{-1} : J \to I$ *é continuamente diferenciável com*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Regra de L'Hospital

Teorema

Sejam f e g são diferenciáveis em (a, b), e $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, onde $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ e

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \stackrel{x \to a}{\longrightarrow} A. \tag{2}$$

Se

$$f(x) \stackrel{x \to a}{\longrightarrow} 0 \text{ e } g(x) \stackrel{x \to a}{\longrightarrow} 0 \tag{3}$$

ou se

$$g(x) \stackrel{x \to a}{\longrightarrow} +\infty \tag{4}$$

então

$$\frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{x \to a}{\longrightarrow} A.$$

O resultado permanece válido se $x \to b$, ou se $g(x) \to -\infty$.

Teorema de Taylor

Theorem

Se $n \in \mathbb{N}^*$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função $n-1$ vezes diferenciável em $[a, b]$ e nvezes diferenciável em (a, b) com $f^{(n-1)} : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Sejam $\alpha, \beta \in [a, b]$, $\alpha \neq \beta$ e

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^k$$

Então existe ξ entre α e β tal que

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(\beta - \alpha)^n.$$

Para $n=1$, teste é o teorema do valor médio. Em geral o teorema mostra como aproximar f por polinômios e fornece um modo de estimar o erro se conhecermos limitações para $\left|f^{(n)}(\xi)\right|$.

Funções Convexas

Seja I um intervalo, uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa quando, dados $a < x < b$ em I, o ponto $(x, f(x))$ fica abaixo da reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

A equação reta é

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \text{ ou } y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

Logo $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa se, dados $a < x < b$ em I,

$$f(x) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a) \text{ ou } f(x) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)+f(b).$$

Ou seja, $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa se uma das desigualdades

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$

sempre que $a < x < b$ em I. Dizemos que f é estritamente convexa se a desigualdade nesta definição é estrita.

Teorema (Caracterização de funções convexas)

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável. Então f é convexa se, e somente se, $f''(x) \geqslant 0$, $\forall x \in I$.

Observação

1) *Seja f diferenciável. Então f' é crescente se, e somente se, f é convexa.*

2) *Pode ser mostrado de forma análoga que, se $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente convexa em I. A recíproca é falsa ($f(x) = x^4$ é estritamente convexa em $\mathbb{R}$ mas $f''(0) = 0$).*

Funções de Variação Limitada (BV)

Se $r \in \mathbb{R}$, $r^+ = \max\{r, 0\}$ e $r^- = \max\{-r, 0\}$ $(r = r^+ - r^-, |r| = r^+ + r^-)$.

Uma coleção $\{a_0, \cdots, a_k\}$ de pontos em $[a, b]$ é chamada **uma partição** do intervalo $[a, b]$ se $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b$. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $\{a_0, \cdots, a_k\}$ uma partição de $[a, b]$. Escrevemos

$$p = \sum_{i=1}^{k} [f(a_i) - f(a_{i-1})]^+, \;\; n = \sum_{i=1}^{k} [f(a_i) - f(a_{i-1})]^-, \;\text{ e}$$

$$t = \sum_{i=1}^{k} |f(a_i) - f(a_{i-1})| = p + n \;\;\text{ e }\;\; f(b) - f(a) = p - n$$

Sejam

$$P_a^b = \sup\{p : k \in \mathbb{N} \text{ e } a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b \text{ partição de } [a,b]\}$$

$$N_a^b = \sup\{n : k \in \mathbb{N} \text{ e } a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b \text{ partição de } [a,b]\}$$

$$T_a^b = \sup\{t : k \in \mathbb{N} \text{ e } a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b \text{ partição de } [a,b]\}$$

Dizemos que P_a^b, N_a^b e T_a^b são as variações positiva, negativa e total de f. É claro que

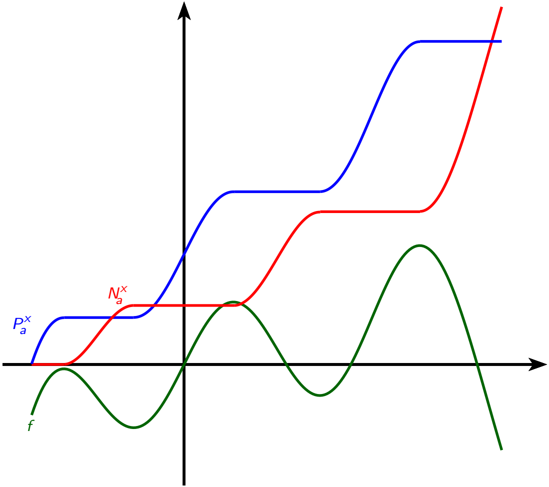
$$\max\{P_a^b, N_a^b\} \leqslant T_a^b \leqslant P_a^b + N_a^b \quad \text{e} \quad f(b) - f(a) = P_a^p - N_a^b$$

A função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é de variação limitada se $T_a^b < \infty$. Notação $f \in BV([a,b])$.

Funções Monótonas e Lipschitzianas são BV

Teorema

1) *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é Lipschitz contínua então* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é de variação limitada.*
2) *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é monótona então* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é de variação limitada.*
3) *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é de variação limitada existem funções não-decrescentes* $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ *tais que* $f(x) = g(x) - h(x)$.


N_a^x
P_a^x
f

Monotonicidade e Diferenciabilidade

Lema

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é monótona, então f é diferenciável exceto possivelmente em um conjunto $E \subset [a, b]$ com $m^*(E) = 0$.

Lipschitz Continuidade e Diferenciabilidade

Corolário

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I. Então f é diferenciável exceto possivelmente em um conjunto E com $m^*E = 0$.

Corolário

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I. Então f é diferenciável em um subconjunto denso de I.

Teorema

Seja I um intervalo aberto da reta e $g : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I. Então g é continuamente diferenciável se, e somente se, para cada $x_0 \in I$,

$$\left| \frac{g(x_0+s+h)-g(x_0+s)}{h} - \frac{g(x_0+h)+g(x_0)}{h} \right| \stackrel{|s|+|h|\to 0}{\longrightarrow} 0. \quad (5)$$