A integral de Riemann-Stieltjes: Definição e Caracterizações Equivalentes
Aula 28

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

29 de Maio de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Introdução: A integral de Riemann

No que se segue, vamos apresentar a integral de Riemann-Sieltjes.
Dados $a<b$, seja $\mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que f é limitada$\}$.

Definição

Dizemos que $\mathcal{P}=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ é uma partição de $[a,b]$ se

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b. \tag{1}$$

Se $\Delta x_i:=x_i-x_{i-1}$, $1\leqslant i\leqslant n$, $\|\mathcal{P}\|:=\sup\{\Delta x_i:1\leqslant i\leqslant n\}$ será chamada de malha da partição $\mathcal{P}$.

Se $f\in\mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$, $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ e chamamos de **soma superior** e **inferior** da função f relativas à $\mathcal{P}$, às somas

$$U(\mathcal{P},f)=\sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i, \qquad L(\mathcal{P},f)=\sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i.$$

Note que

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a$
- $L(\mathcal{P}, f) \leqslant U(\mathcal{P}, f)$ pois $m_i \leqslant M_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
- $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m \leqslant m_i \leqslant M_i \leqslant M$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
- $m(b-a) \leqslant L(\mathcal{P}, f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = U(\mathcal{P}, f) \leqslant M(b-a)$
- Os conjuntos $\left\{U(\mathcal{P}, f) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}_{[a,b]}\right\}$ e $\left\{L(\mathcal{P}, f) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}_{[a,b]}\right\}$ são limitados inferiormente e superiormente, respectivamente, onde $\mathscr{P}_{[a,b]} = \{\mathcal{P} : \mathcal{P}$ é partição de $[a, b]\}$.

Definimos a **integral superior de Riemann** de f em $[a, b]$ por

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}} U(\mathcal{P}, f)$$

e a **integral inferior de Riemann** de f em $[a, b]$ por

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}} L(\mathcal{P}, f)\,.$$

Dizemos que f é **Riemann integrável em** $[a, b]$ se

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x).$$

O valor comum acima é chamado **integral de Riemann** de f em $[a, b]$ e denotado por $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

$$\mathscr{R}([a,b]) = \{f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R}) : f \text{ Riemann integrável em } [a,b]\}.$$

Nem toda função limitada é Riemann integrável. De fato, seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{para} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1, & \text{para} \quad x \in \mathbb{I} \cap [0,1]. \end{cases} \tag{2}$$

É claro que f é limitada em $[0,1]$. Mostremos que f **não** é Riemann integrável em $[0,1]$.

De fato: Se $\mathcal{P} = \{0 = x_0, x_1, \cdots, x_n = 1\} \in \mathscr{P}_{[0,1]}$, como $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 1$ e $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 0$,

$$U(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1,$$
$$L(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \, \Delta x_i = 0.$$

Sendo assim,

$$\overline{\int_0^1} f(x)\, dx = 1 \neq \underline{\int_0^1} f(x)\, dx = 0.$$

e f não é Riemann integrável em $[0, 1]$.

Integral de Rieman-Stieltjes: Definição e caracterização

A seguir introduziremos a integral de Riemann-Stieltjes. Seja $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ não-decrescente. Claramente α é limitada em $[a,b]$.

Dada $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$, para $1 \leqslant i \leqslant n$, seja

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \geq 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

e, dada $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$, defina

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta\alpha_i,$$

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta\alpha_i,$$

com $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, como antes.

Note que

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \alpha(b) - \alpha(a)$$

e

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i = U(\mathcal{P}, f, \alpha)$$

$$m\,[\alpha(b) - \alpha(a)] = \sum_{i=1}^{n} m\,\Delta\alpha_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i = U(\mathcal{P}, f, \alpha)$$

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i \leqslant M \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = M\,[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

onde $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, como antes.

Disto segue que os conjuntos

$$\{L(\mathcal{P}, f, \alpha)\,;\, \mathcal{P} \in \mathscr{P}_{[a,b]}\} \text{ e } \{U(\mathcal{P}, f, \alpha)\,;\, \mathcal{P} \in \mathscr{P}_{[a,b]}\}$$

são, respectivamente, limitado superiormente e inferiormente em $\mathbb{R}$. Logo definimos a integral superior e a integral inferior de Riemann-Stieltjes da função f em $[a, b]$, relativamente a α por

$$\overline{\int_a^b} f\, d\alpha = \inf_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}} U(\mathcal{P}, f, \alpha) \text{ e } \underline{\int_a^b} f\, d\alpha = \sup_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}} L(\mathcal{P}, f, \alpha)\,.$$

A função f é **Riemann-Stieltjes integrável em $[a, b]$, relativamente a α** se

$$\overline{\int_a^b} f\, d\alpha = \underline{\int_a^b} f\, d\alpha\,,$$

e o valor acima é chamado **integral de Riemann-Stieltjes de f em $[a, b]$, relativamente a função α.** e será denotado por

$$\int_a^b f\, d\alpha \text{ ou } \int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$$

Denote por $\mathscr{R}(\alpha, [a, b]) = \{f \in \mathscr{B}([a, b], \mathbb{R}) : f$ é Riemann-Stieltjes integrável $[a, b]$, relativamente a $\alpha\}$.

Se $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dada por $\alpha(x) = x$, $x \in [a, b]$ a integral de Riemann-Stieltjes, relativamente a α, coincide com a integral de Riemann, ou seja,

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f(x) dx$$

pois, neste caso, $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Note que $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ só precisa ser não-decrescente em $[a, b]$, para podermos definir a integral de Riemann-Stieltjes de funções $f \in \mathscr{B}([a, b], \mathbb{R})$ relativamente a α.

Vamos supor, daqui em diante, que

$$\alpha(b) > \alpha(a). \tag{3}$$

Caso contrário, a integral de Rieman-Stieltjes de f relativamente a α seria nula para toda $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$.

A seguir passaremos a investigar em que situações existe a integral de Riemann-Stieltjes, relativamente à função α, para uma função limitada, a valores reais, definida no intervalo $[a, b]$.

Definição (Refinamento)

Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{P}^* \in \mathscr{P}_{[a,b]}$, dizemos que a partição $\mathcal{P}^*$ é um **refinamento da partição** $\mathcal{P}$*, se*

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^*,$$

ou seja, todo ponto de $\mathcal{P}$ é um ponto de $\mathcal{P}^*$.

Sejam $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathscr{P}_{[a,b]}$. Definimos

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2. \tag{4}$$

Então $\mathcal{P}^* \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ e $\mathcal{P}^*$ é um refinamento comum a $\mathcal{P}_1$ e a $\mathcal{P}_2$.

Proposição

Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{P}^* \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ com $\mathcal{P}^* \supset \mathcal{P}$. Então,

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leqslant L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \tag{5}$$

$$U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha). \tag{6}$$

Prova: Se $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$ não há nada a fazer. Se $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{P}^*$, seja $x^* \in \mathcal{P}^* \setminus \mathcal{P}$. Considere, inicialmente, o caso

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \{x^*\}.$$

Logo, se $\mathcal{P}$ tem n elementos, $\mathcal{P}^*$ tem $n+1$ elementos e

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \{a = x_0, x_1, \cdots, x_{i_0-1}, x_{i_0}, \cdots, x_n = b,\\
\mathcal{P}^* &= \{a = x_0, x_1, \cdots, x_{i_0-1}, x^*, x_{i_0}, \cdots, x_n = b\}\\
&= \{a = x_0^*, x_1^*, \cdots, x_{i_0-1}^*, x_{i_0}^*, x_{i_0+1}^*, \cdots, x_{n+1}^* = b\}
\end{aligned}$$

Se $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ e $m_j^* = \inf\limits_{x \in [x_{j-1}^*, x_j^*]} f(x)$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$.
$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$, $1 \leqslant i \leqslant n$ e $\Delta\alpha_j^* = \alpha(x_j^*) - \alpha(x_{j-1}^*)$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$.

Assim,

$$L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{j=1}^{n+1} m_j^* \,\Delta\alpha_j^* - \sum_{i=1}^{n} m_i \,\Delta\alpha_i$$

$$= m_{i_0}^* \,\Delta\alpha_{i_0}^* + m_{i_0+1}^* \,\Delta\alpha_{i_0+1}^* - m_{i_0} \,\Delta\alpha_{i_0}$$

$$= m_{i_0}^* \,\Delta\alpha_{i_0}^* + m_{i_0+1}^* \,\Delta\alpha_{i_0+1}^* - m_{i_0} [\underbrace{\alpha(x_{i_0}) - \alpha(x^*)}_{\Delta\alpha_{i_0+1}^*} - \underbrace{\alpha(x^*) - \alpha(x_{i_0-1})}_{\Delta\alpha_{i_0}^*}]$$

$$= [m_{i_0}^* - m_{i_0}][\alpha(x^*) - \alpha(x_{i_0-1})] + [m_{i_0+1}^* - m_{i_0}][\alpha(x_{i_0}) - \alpha(x^*)] \geqslant 0$$

ou seja,

$$L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \geqslant 0.$$

O caso geral segue por indução. A desigualdade para a soma superior é obitida de maneira análoga (Exercício). $\square$

Como consequência do resultado anterior temos

Teorema

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada em* $[a, b]$. *Então*

$$\underline{\int_a^b} f \, d\alpha \leqslant \overline{\int_a^b} f \, d\alpha \, . \tag{7}$$

Prova: Do resultado anteior, se $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ e $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$

$$L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) \leqslant L\,(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leqslant U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leqslant U(\mathcal{P}_2, f, \alpha).$$

e

$$\underline{\int_a^b} f \, d\alpha = \sup_{\mathcal{P}_1 \in \mathscr{P}} L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) \leqslant \inf_{\mathcal{P}_2 \in \mathscr{P}} U(\mathcal{P}_2, f, \alpha) = \overline{\int_a^b} f \, d\alpha$$

completando a prova.$\square$

Corolário

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada em* $[a, b]$.
Então $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *se, e somente se, dado* $\epsilon > 0$, *existe uma partição* $\mathcal{P} \in \mathscr{P}$, *tal que*

$$0 \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon.$$

Prova: Note que, dado $\epsilon > 0$, se $\mathcal{P} \in \mathscr{P}$ é tal que a desigualdade acima está satisfeita,

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leqslant \sup_{\mathcal{P}' \in \mathscr{P}} L(\mathcal{P}', f, \alpha) = \underline{\int_a^b} f \, d\alpha \\ \leqslant \overline{\int_a^b} f \, d\alpha = \inf_{\mathcal{P}' \in \mathscr{P}} U(\mathcal{P}', f, \alpha) \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) \end{aligned}$$

e

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f \, d\alpha - \underline{\int_a^b} f \, d\alpha \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon.$$

Segue que $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$.

Por outro lado, se $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$,

$$\inf_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}} U(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sup_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}} L(\mathcal{P}, f, \alpha).$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, existem partições $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathscr{P}$ tais que

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) \leqslant U(\mathcal{P}_2, f, \alpha) < \overline{\int_a^b} f \, d\alpha + \frac{\epsilon}{2} = \int_a^b f \, d\alpha + \frac{\epsilon}{2},$$

e

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \geqslant L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) > \underline{\int_a^b} f \, d\alpha - \frac{\epsilon}{2} = \int_a^b f \, d\alpha - \frac{\epsilon}{2},$$

onde $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Ou seja $0 \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon.$ $\square$

Teorema

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada e $\epsilon > 0$ dado

1) *Se existe $\mathcal{P} \in \mathscr{P}$ tal que $0 \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon$ então $0 \leqslant U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) < \epsilon$, para todo refinamento $\mathcal{P}^*$ de $\mathcal{P}$.*

2) *Se existe $P = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\}$ tal que $0 \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon$ e, para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, dados $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, então*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \, \Delta\alpha_i < \epsilon \,. \tag{8}$$

e, se $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b])$,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \, \Delta\alpha_i - \int_a^b f \, d\alpha \right| < \epsilon. \tag{9}$$

Prova: 1) Seja $\mathcal{P} \in \mathscr{P}$ tal que $0 \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon$ e $\mathcal{P}^*$ um refinamento de $\mathcal{P}$. O resultado segue de

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leqslant L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leqslant U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha).$$

2) Sabemos que, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, se $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ então $f(s_i), f(t_i) \in [m_i, M_i]$ e $|f(s_i) - f(t_i)| \leqslant M_i - m_i$ onde $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ e $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$. Portanto

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \, \Delta\alpha_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta\alpha_i = U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon$$

e o resultado segue.

Se $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$, dado $\epsilon > 0$, existe uma $\mathcal{P} \in \mathscr{P}([a,b])$ tal que

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leqslant \int_a^b f \, d\alpha \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) < L(\mathcal{P}, f, \alpha) + \epsilon$$

Escolhendo $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $f(t_i) \in [m_i, M_i]$

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i = U(\mathcal{P}, f, \alpha) < L(\mathcal{P}, f, \alpha) + \epsilon \end{aligned}$$

e o resultado segue.$\square$