Diferenciabilidade de Funções de BV
Aula 27

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

24 de Maio de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Medida Exterior

Se $I = (a, b)$ defina $\ell(I) = b - a$. Dado $A \subset \mathbb{R}$ existe uma família contável de intervalos abertos que cobrem A. Seja $\mathscr{U}_A$ a coleção de todas as coberturas contáveis de intervalos abertos de A.

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum \ell\left(I_n\right) : \{I_n\} \in \mathscr{U}_A \right\}$$

É claro que $m^*(\varnothing) = 0$, $m^*((a, b)) \leqslant b - a$, $m^*(\{x\}) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e que, se $A \subset B$ $m^*(A) \leqslant m^*(B)$.

Lema

$m^*[a, b] = m^*(a, b] = m^*[a, b) = m^*(a, b) = b - a.$

Lema

Se $\{A_n\}$ *é uma família contável de subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *então*

$$m^*\left(\bigcup A_n\right) \leqslant \sum m^*(A_n)$$

Corolário

1) *Se* $A \subset \mathbb{R}$ *é enumerável,* $m^*(A) = 0$.

2) *Se* $\{A_n\}$ *é uma família contável de subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *e* $m^*(A_n) = 0, \forall n$ *então* $m^*(\bigcup_n A_n) = 0$

O Lema do Recobrimento de Vitali

Lema (Recobrimento de Vitali)

Seja $E \subset [a, b]$, consequentemente $m^*(E) \leqslant b - a$. Se $\mathscr{I}$ é uma cobertura de E por intervalos não degenerados e tal que, dados $x \in E$ e $\epsilon > 0$, existe $I \in \mathscr{I}$ tal que $x \in I$ e $\ell(I) < \epsilon$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe uma coleção finita e disjunta $\{I_1, \ldots, I_N\} \subset \mathscr{I}$ tal que

$$m^*\left(E \Big\backslash \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) < \epsilon.$$

Monotonicidade e Diferenciabilidade

Lema

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é monótona, então f é diferenciável exceto possivelmente em um conjunto $E \subset [a,b]$ com $m^*(E) = 0$.

Prova: Faremos apenas o caso f não-descrescente. Considere

$$\overline{d^+} f(x) = \overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant \underline{d^+} f(x) = \underline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\overline{d^-} f(x) = \overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \geqslant \underline{d^-} f(x) = \underline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Provemos que $\underline{d^+} f(x) \geqslant \overline{d^-} f(x)$ e $\underline{d^-} f(x) \geqslant \overline{d^+} f(x)$ exceto em um conjunto de medida exterior nula.

Vamos apenas considerar o conjunto E dos pontos $x \in [a,b]$ para os quais $\underline{d^-}f(x) < \overline{d^+}f(x)$. O conjunto E é a união dos conjuntos

$$E = \left\{ x \in [a,b] : \underline{d_-}f(x) < \overline{d^+}f(x) \right\} = \bigcup_{\substack{u,v \in \mathbb{Q} \\ v<u}} E_{u,v}$$

$$\text{onde} \quad E_{u,v} = \left\{ x \in [a,b] : \underline{d_-}f(x) < v < u < \overline{d^+}f(x) \right\}$$

Logo, é suficiente mostrar que $m^*(E_{u,v}) = 0$. Seja $s = m^*(E_{u,v})$ e, dado $\epsilon > 0$, $E_{u,v}$ está contido em um aberto O com $m^*(O) < s + \epsilon$.

Para cada $x \in E_{u,v}$, podemos escolher $h > 0$ arbitrariamente pequeno de modo que o intervalo $[x-h, x]$ está contido em O e

$$f(x) - f(x-h) < vh \tag{1}$$

Do Lema de Vitali, escolhemos uma coleção $\{I_1, \ldots, I_N\}$ disjunta desses intervalos cujos interiores cobrem $A \subset E_{u,v}$ com $m^*(A) > s - \epsilon$. Somando (1) para todos estes intervalos

$$\sum_{n=1}^{N} [f(x_n) - f(x_n - h_n)] < \underbrace{v \sum_{n=1}^{N} h_n}_{= \, v\, m^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n\right)} < v\, m^*(O) < v(s+\epsilon).$$

Agora, cada $y \in A$ e k arbitrariamente pequeno $[y, y+k] \subset I_n$ e

$$f(y+k) - f(y) > uk. \tag{2}$$

Usando o Lema de Vitali temos uma coleção disjunta $\{J_1, \cdots, J_M\}$ desses intervalos que cobrem $B \subset A$ com $m^*(B) > m^*(A) - \epsilon > s - 2\epsilon$. Somando (2) para todos esses intervalos temos

$$\sum_{i=1}^{M} f(y_i + k_i) - f(y_i) > u \underbrace{\sum_{i=1}^{M} k_i}_{\substack{\| \\ u\, m^*\left(\bigcup_{i=1}^{M} J_i\right)}} > u(s - 2\epsilon).$$

Cada intervalo J_i está contido em algum intervalo I_n e, como f é crescente, se somamos para todos os i para os quais $J_i \subset I_n$, temos

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant M \\ J_i \subset I_n}} f(y_i + k_i) - f(y_i) \leqslant f(x_n) - f(x_n - h_n)$$

Logo

$$u(s-2\epsilon) < \sum_{i=1}^{M} f(y_i + k_i) - f(y_i) \leqslant \sum_{n=1}^{N} f(x_n) - f(x_n - h_n) < v(s+\epsilon)$$

e, para todo $\epsilon > 0$,

$$u(s - 2\epsilon) < v(s + \epsilon).$$

Segue que, $us \leqslant vs$. Como $u > v$, concluímos que $s = 0$. Isto mostra que $m^*(E_{u,v}) = 0$ e consequentemente $m^*(E) = 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe exceto possivelmente em um conjunto E com $m^*(E) = 0$. $\square$

Lipschitz Continuidade e Diferenciabilidade

Corolário

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I. Então f é diferenciável exceto possivelmente em um conjunto E com $m^*E = 0$.

Corolário

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I. Então f é diferenciável em um subconjunto denso de I.

Teorema

Seja I um intervalo aberto da reta e $g : I \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I. Então g é continuamente diferenciável se, e somente se, para cada $x_0 \in I$,

$$\left| \frac{g(x_0 + s + h) - g(x_0 + s)}{h} - \frac{g(x_0 + h) + g(x_0)}{h} \right| \overset{|s|+|h|\to 0}{\longrightarrow} 0. \quad (3)$$

Prova: Se f é $C^1(I)$, existem $\theta, \theta' \in (0,1)$ tais que

$$\begin{aligned} &\left| \frac{g(x_0 + s + h) - g(x_0 + s)}{h} - \frac{g(x_0 + h) + g(x_0)}{h} \right| \\ &= |g'(x_0 + s + \theta h) - g'(x_0 + \theta' h)| \overset{|s|+|h|\to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Agora mostraremos que se a $g : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável, (3) implica que $g : I \to \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável.

De (3), dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $|x - x_0| < \delta$ e $|h| < \delta$,

$$\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - \frac{g\left(x_0+h\right)+g\left(x_0\right)}{h}\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Segue que, para $|x - x_0| < \delta$,

$$|g'(x)-g'(x_0)| = \left|\lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right\}\right| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

e g' é contínua em x_0.

Para concluir a prova, basta mostrar que $g : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável.

Como g Lipschitz contínua, ela é diferenciável em um conjunto denso de pontos. Para cada $x_0 \in I, \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(x+h) - g(x) - g\left(x_0+h\right) + g\left(x_0\right)| \leqslant \frac{\epsilon}{4}|h|, \; |x - x_0| + |h| < \delta$$

e existe $x^* \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que $g'\left(x^*\right)$ existe. Logo, para $h \neq 0$ suficientemente pequeno

$$\left|\frac{g\left(x_0+h\right) - g\left(x_0\right)}{h} - g'\left(x^*\right)\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2},$$
$$0 \leq \left\{\overline{\lim_{h\to 0}} - \underline{\lim_{h\to 0}}\right\} \frac{g\left(x_0+h\right) - g\left(x_0\right)}{h} \leqslant \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, isto implica que $g'(x_0)$ existe. $\square$