Funções de Variação Limitada e Medida Exterior
Aula 25

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

19 de Maio de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Funções Convexas

Seja I um intervalo, uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa quando, dados $a < x < b$ em I, o ponto $(x, f(x))$ fica abaixo da reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. A equação reta é

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \text{ ou } y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

Logo $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa se, dados $a < x < b$ em I,

$$f(x) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x-a)+f(a) \text{ ou } f(x) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x-b)+f(b).$$

Ou seja, $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa se uma das desigualdades

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

sempre que $a < x < b$ em I. Dizemos que f é estritamente convexa se a desigualdade nesta definição é estrita.

Teorema (Caracterização de funções convexas)

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável. Então f é convexa se, e somente se, $f''(x) \geqslant 0$, $\forall x \in I$.

Prova: Se $f''(x) \geqslant 0$, $\forall x \in I$. Então, dados $a, a+h \in I$, existe c entre a e $a+h$ tal que $f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(c)}{2} \cdot h^2$.

Como $f''(c) \geqslant 0$, $f(a+h) \geqslant f(a) + f'(a) \cdot h$. Disto segue que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leqslant f'(a)$ se $h < 0$ e $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geqslant f'(a)$ se $h > 0$.

Isto é, se $a < x < b$ em I, então $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$ ou seja

$$(f(x) - f(a))(b - x) \leqslant (f(b) - f(x))(x - a).$$

Sendo assim,

$$(f(x)-f(a))(b-a-(x-a)) \leq (f(b)-f(a)-(f(x)-f(a)))(x-a) \quad \text{e}$$

$$(f(x)-f(a))(b-a) \leq (f(b)-f(a))(x-a)$$

Isto prova que f é convexa.

Reciprocamente, se f convexa, dados $a < x < b$ em I, temos

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

Fazendo $x \to a$ e $x \to b$

$$f'(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b)$$

e f' é não-decrescente em I. Logo $f''(x) \geqslant 0$, $\forall x \in I$. $\square$

Observação

1) *Seja f diferenciável. Então f' é crescente se, e somente se, f é convexa.*

2) *Pode ser mostrado de forma análoga que, se $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente convexa em I. A recíproca é falsa ($f(x) = x^4$ é estritamente convexa em $\mathbb{R}$ mas $f''(0) = 0$).*

Funções Analíticas e Séries de Taylor

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Se $a, x \in I^o$, então podemos escrever, para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$
$$+ r_n((x-a)),$$

onde $r_n((x-a)) = \frac{f^{(n)}((1-\theta_n)a+\theta_n x))}{n!} \cdot (x-a)^n$, com $0 < \theta_n < 1$.

A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

chama-se a série de Taylor da função f em torno do ponto a.

Esta série pode convergir ou não e mesmo que convirja sua soma pode ser diferente de $f(x)$.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(0) = 0$ *e* $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ *se* $x \neq 0$. *Mostre que* f *é* C^∞, $f^{(n)}(0) = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e portanto a série de Taylor de* f *em* $x = 0$ *é convergente para* $f(0)$ *mas não coincide com* f *para nenhum* $x \neq 0$.

Definição

Se $I \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo aberto e* $f : I \to \mathbb{R}$ *é uma função, dizemos que* f *é analítica em* I *se, para cada* $a \in I$ *existe* $\epsilon > 0$ *tal que a série de Taylor* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$ *é convergente com soma* $f(x)$, $\forall x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$.

É claro que, a série de Taylor $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$ converge para $f(x)$ se, e somente se, $\lim\limits_{n \to a} r_n((x-a)) = 0$.

Exemplo

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Veremos mais tarde que, se a série de potências $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ tem raio de convergência $R > 0$ então a função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad x \in (a-R, a+R)$$

é analítica.

Funções de Variação Limitada (BV)

Se $r \in \mathbb{R}$, $r^+ = \max\{r, 0\}$ e $r^- = \max\{-r, 0\}$ $(r = r^+ - r^-, \; |r| = r^+ + r^-)$.

Uma coleção $\{a_0, \cdots, a_k\}$ de pontos em $[a, b]$ é chamada **uma partição** do intervalo $[a, b]$ se $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b$. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $\{a_0, \cdots, a_k\}$ uma partição de $[a, b]$. Escrevemos

$$p = \sum_{i=1}^{k} [f(a_i) - f(a_{i-1})]^+, \;\; n = \sum_{i=1}^{k} [f(a_i) - f(a_{i-1})]^-, \text{ e}$$

$$t = \sum_{i=1}^{k} |f(a_i) - f(a_{i-1})| = p + n \;\text{ e }\; f(b) - f(a) = p - n$$

Sejam

$$P_a^b = \sup\{p : k \in \mathbb{N} \text{ e } a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b \text{ partição de } [a,b]\}$$

$$N_a^b = \sup\{n : k \in \mathbb{N} \text{ e } a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b \text{ partição de } [a,b]\}$$

$$T_a^b = \sup\{t : k \in \mathbb{N} \text{ e } a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b \text{ partição de } [a,b]\}$$

Dizemos que P_a^b, N_a^b e T_a^b são as variações positiva, negativa e total de f. É claro que

$$\max\{P_a^b, N_a^b\} \leqslant T_a^b \leqslant P_a^b + N_a^b \quad \text{e} \quad f(b) - f(a) = P_a^p - N_a^b$$

A função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é de variação limitada se $T_a^b<\infty$. Notação $f\in BV([a,b])$.

Funções Monótonas e Lipschitzianas são BV

Teorema

1) *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é Lipschitz contínua então* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é de variação limitada.*
2) *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é monótona então* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é de variação limitada.*
3) *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é de variação limitada existem funções não-decrescentes* $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ *tais que* $f(x) = g(x) - h(x)$.

Prova: 1) Se f é Lipschitz, $\max\{P_a^b, N_a^b\} \leq T_a^b \leq L(b-a) < \infty$ onde $L > 0$ é a constante de Lipschitz.

2) Se f é monótona então $T_a^b = |f(b) - f(a)| < \infty$.

3) Se $T_a^b < \infty$, defina $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(a) + P_a^x$ e $h(x) = N_a^x$, para cada $x \in [a, b]$. É claro que g, h são não-decrescentes e que $f(x) = g(x) - h(x)$. $\square$

Funções de Variação Limitada (BV)

Se $r \in \mathbb{R}$, $r^+ = \max\{r, 0\}$ e $r^- = \max\{-r, 0\}$ $(r = r^+ - r^-,\ |r| = r^+ + r^-)$.

Uma coleção $\{a_0, \cdots, a_k\}$ de pontos em $[a, b]$ é chamada **uma partição** do intervalo $[a, b]$ se $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b$. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $\{a_0, \cdots, a_k\}$ uma partição de $[a, b]$. Escrevemos

$$p = \sum_{i=1}^{k} [f(a_i) - f(a_{i-1})]^+, \ \ n = \sum_{i=1}^{k} [f(a_i) - f(a_{i-1})]^-, \ \text{e}$$

$$t = \sum_{i=1}^{k} |f(a_i) - f(a_{i-1})| = p + n \ \ \text{e} \ \ f(b) - f(a) = p - n$$

Sejam

$$P_a^b = \sup\{p : k \in \mathbb{N} \text{ e } a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b \text{ partição de } [a,b]\}$$

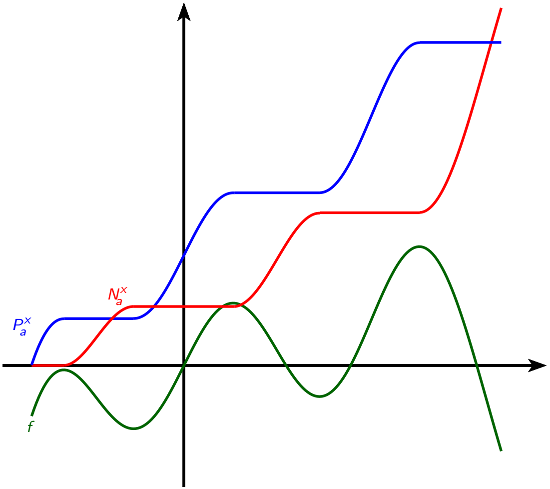
$$N_a^b = \sup\{n : k \in \mathbb{N} \text{ e } a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b \text{ partição de } [a,b]\}$$

$$T_a^b = \sup\{t : k \in \mathbb{N} \text{ e } a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b \text{ partição de } [a,b]\}$$

Dizemos que P_a^b, N_a^b e T_a^b são as variações positiva, negativa e total de f. É claro que

$$\max\{P_a^b, N_a^b\} \leqslant T_a^b \leqslant P_a^b + N_a^b \quad \text{e} \quad f(b) - f(a) = P_a^p - N_a^b$$

A função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é de variação limitada se $T_a^b < \infty$. Notação $f \in BV([a,b])$.


N_a^x
P_a^x
f

Funções Monótonas e Lipschitzianas são BV

Teorema

1) *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é Lipschitz contínua então* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é de variação limitada.*
2) *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é monótona então* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é de variação limitada.*
3) *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é de variação limitada existem funções não-decrescentes* $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ *tais que* $f(x) = g(x) - h(x)$*.*

Prova: 1) Se f é Lipschitz, $\max\{P_a^b, N_a^b\} \leq T_a^b \leq L(b-a) < \infty$ onde $L > 0$ é a constante de Lipschitz.

2) Se f é monótona então $T_a^b = |f(b) - f(a)| < \infty$.

3) Se $T_a^b < \infty$, defina $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(a) + P_a^x$ e $h(x) = N_a^x$, para cada $x \in [a, b]$. É claro que g, h são não-decrescentes e que $f(x) = g(x) - h(x)$. $\square$

Medida Exterior

Se $I = (a, b)$ defina $\ell(I) = b - a$. Dado $A \subset \mathbb{R}$ existe uma família contável de intervalos abertos que cobrem A. Seja $\mathscr{U}_A$ a coleção de todas as coberturas contáveis de intervalos abertos de A.

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum \ell\left(I_n\right) : \{I_n\} \in \mathscr{U}_A\right\}$$

É claro que $m^*(\varnothing) = 0$, $m^*((a, b)) \leqslant b - a$, $m^*(\{x\}) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e que, se $A \subset B$ $m^*(A) \leqslant m^*(B)$.

Lema

$m^*[a,b] = m^*(a,b] = m^*[a,b) = m^*(a,b) = b - a.$

Prova: Como $[a,b] \subset (a-\frac{\epsilon}{2}, b+\frac{\epsilon}{2}), \forall \epsilon > 0$ temos $m^*([a,b]) \leq b-a$. Por outro lado se $\{I_n\} \in \mathscr{U}_{[a,b]}$ existe uma subcoleção finita $\{I_{n_1}, \cdots, I_{n_k}\}$ de $\{I_n\}$ tal que $\cup_{i=1}^{k} I_{n_i} \supset [a,b]$ e

$$\sum_{i=1}^{k} \ell(I_{n_i}) \leqslant \sum \ell(I_n)$$

Podemos tomar uma subcobertura de $\{I_{n_1}, \cdots, I_{n_k}\}$ de forma que $a \in I_{n_{j_1}} = (y_1, x_1)$ e, recursivamente, se $x_j \leq b$, $x_j \in I_{n_{i_{j+1}}} = (y_{j+1}, x_{j+1})$ parando para $j_0 \leqslant k$ tal que $I_{n_{i_{j_0}}} \ni b$. Assim, como $y_j < x_{j-1} < x_j$,

$$\sum_{j=1}^{j_0} \ell(I_{n_{i_j}}) = \sum (x_j - y_j) > x_{j_0} - y_1 > b - a$$

e $m^*([a,b]) = b - a$. $\square$

Lema

Se $\{A_n\}$ é uma família contável de subconjuntos de $\mathbb{R}$ então

$$m^*\left(\bigcup A_n\right) \leqslant \sum m^*(A_n)$$

Prova: Só temos que considerar o caso em que $\sum m^*(A_n) < \infty$. Como $m^*(A_n)$ é finita, dado $\epsilon > 0$, seja $\{I_{n,i}\}_i \in \mathscr{U}_{A_n}$ tal que $A_n \subset \bigcup_i I_{n,i}$ e $\sum_i \ell(I_{n,i}) < m^*(A_n) + 2^{-n}\epsilon$. Logo $\{I_{n,i}\}_{n,i} \in \mathscr{U}_{\cup A_n}$ e

$$m^*\left(\bigcup A_n\right) \leqslant \sum_{n,i} \ell(I_{n,i}) = \sum_n \sum_i \ell(I_{n,i}) < \sum_n \left(m^*(A_n) + \epsilon 2^{-n}\right)$$
$$= \sum m^*(A_n) + \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário o resultado segue.$\square$

Corolário

1) *Se* $A \subset \mathbb{R}$ *é enumerável,* $m^*(A) = 0$.

2) *Se* $\{A_n\}$ *é uma família contável de subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *e* $m^*(A_n) = 0$, $\forall n$ *então* $m^*(\bigcup_n A_n) = 0$

Exercício

Seja $I_j = [a_j, b_j]$, $1 \leqslant j \leqslant n$ *com* $b_j < a_{j+1}$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$. *Mostre que*

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\right) = \sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j).$$