

Funções Convexas, Séries de Taylor e Funções BV

Aula 24

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

17 de Maio de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Funções Convexas

Seja I um intervalo, uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa quando, dados $a < x < b$ em I , o ponto $(x, f(x))$ fica abaixo da reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. A equação reta é

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \text{ ou } y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

Logo $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, dados $a < x < b$ em I ,

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \text{ ou } f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

Ou seja, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se uma das desigualdades

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

sempre que $a < x < b$ em I . Dizemos que f é estritamente convexa se a desigualdade nesta definição é estrita.

Teorema (Caracterização de funções convexas)

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável.
Então f é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$.

Prova: Se $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$. Então, dados $a, a + h \in I$, existe c entre a e $a + h$ tal que $f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(c)}{2} \cdot h^2$.

Como $f''(c) \geq 0, f(a + h) \geq f(a) + f'(a) \cdot h$. Disto segue que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq f'(a)$ se $h < 0$ e $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq f'(a)$ se $h > 0$.

Isto é, se $a < x < b$ em I , então $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$ ou seja
$$(f(x) - f(a))(b - x) \leq (f(b) - f(x))(x - a).$$

Sendo assim,

$$(f(x) - f(a))(b - a - (x - a)) \leq (f(b) - f(a) - (f(x) - f(a)))(x - a) \quad \text{e}$$

$$(f(x) - f(a))(b - a) \leq (f(b) - f(a))(x - a)$$

Isto prova que f é convexa.

Reciprocamente, se f convexa, dados $a < x < b$ em I , temos

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Fazendo $x \rightarrow a$ e $x \rightarrow b$

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b)$$

e f' é não-decrescente em I . Logo $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$. \square

Observação

- 1) *Seja f diferenciável. Então f' é crescente se, e somente se, f é convexa.*
- 2) *Pode ser mostrado de forma análoga que, se $f''(x) > 0, \forall x \in I$, então f é estritamente convexa em I . A recíproca é falsa ($f(x) = x^4$ é estritamente convexa em \mathbb{R} mas $f''(0) = 0$).*

Funções Analíticas e Séries de Taylor

Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . Se $a, x \in I^\circ$, então podemos escrever, para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + r_n((x-a)),$$

onde $r_n((x-a)) = \frac{f^{(n)}((1-\theta_n)a + \theta_n x)}{n!} \cdot (x-a)^n$, com $0 < \theta_n < 1$.

A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

chama-se a série de Taylor da função f em torno do ponto a .

Esta série pode convergir ou não e mesmo que convirja sua soma pode ser diferente de $f(x)$.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ e $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$. Mostre que f é C^∞ , $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto a série de Taylor de f em $x = 0$ é convergente para $f(0)$ mas não coincide com f para nenhum $x \neq 0$.

Definição

Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, dizemos que f é analítica em I se, para cada $a \in I$ existe $\epsilon > 0$ tal que a

série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n$ é convergente com soma $f(x)$, $\forall x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.

É claro que, a série de Taylor $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n$ converge para $f(x)$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n((x - a)) = 0$.

Exemplo

$$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Veremos mais tarde que, se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$ tem raio de convergência $R > 0$ então a função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n, \quad x \in (a - R, a + R)$$

é analítica.

Funções de Variação Limitada (BV)

Se $r \in \mathbb{R}$, $r^+ = \max\{r, 0\}$ e $r^- = \max\{-r, 0\}$ ($r = r^+ - r^-$, $|r| = r^+ + r^-$).

Uma coleção $\{a_0, \dots, a_k\}$ de pontos em $[a, b]$ é chamada **uma partição** do intervalo $[a, b]$ se $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k = b$. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\{a_0, \dots, a_k\}$ uma partição de $[a, b]$. Escrevemos

$$p = \sum_{i=1}^k [f(a_i) - f(a_{i-1})]^+, \quad n = \sum_{i=1}^k [f(a_i) - f(a_{i-1})]^-, \quad e$$

$$t = \sum_{i=1}^k |f(a_i) - f(a_{i-1})| = p + n \quad e \quad f(b) - f(a) = p - n$$

Sejam

$$P_a^b = \sup\{p : k \in \mathbb{N} \text{ e } a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b \text{ partição de } [a, b]\}$$

$$N_a^b = \sup\{n : k \in \mathbb{N} \text{ e } a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b \text{ partição de } [a, b]\}$$

$$T_a^b = \sup\{t : k \in \mathbb{N} \text{ e } a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b \text{ partição de } [a, b]\}$$

Dizemos que P_a^b , N_a^b e T_a^b são as variações positiva, negativa e total de f . É claro que

$$\max\{P_a^b, N_a^b\} \leq T_a^b \leq P_a^b + N_a^b \quad \text{e} \quad f(b) - f(a) = P_a^b - N_a^b$$

A função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de variação limitada se $T_a^b < \infty$. Notação $f \in BV([a, b])$.

Funções Monótonas e Lipschitzianas são BV

Teorema

- 1) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz contínua então $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de variação limitada.
- 2) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona então $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de variação limitada.
- 3) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de variação limitada existem funções não-decrescentes $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x) = g(x) - h(x)$.

Prova: 1) Se f é Lipschitz, $\max\{P_a^b, N_a^b\} \leq T_a^b \leq L(b-a) < \infty$
onde $L > 0$ é a constante de Lipschitz.

2) Se f é monótona então $T_a^b = |f(b) - f(a)| < \infty$.

3) Se $T_a^b < \infty$, defina $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = f(a) + P_a^x$ e $h(x) = N_a^x$, para cada $x \in [a, b]$. É claro que g, h são não-decrescentes e que $f(x) = g(x) - h(x)$. \square