Diferenciabilidade: Teorema do Valor Médio
Aula 22

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

12 de Maio de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^3$*. Já sabemos que* f *é contínua. Como*

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) \\ &= (x - y)((x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2) \\ &= (x - y)((\frac{x}{2} + y)^2 + \frac{3}{4}x^2) \end{aligned}$$

Segue que $x \neq y$ *implica* $f(x) \neq f(y)$ *e* f *é injetora.*

Note ainda que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e, do teorema do valor intermediário, f é uma bijeção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Segue ainda que $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua pois ela é contínua em qualquer intervalo compacto. A inversa de f é denotada por $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$. Do teorema sobre a derivada da inversa e do fato que $f'(x) = 3x^2$ deduzimos que $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável se, e somente se, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e, para estes valores de x,

$$\overbrace{(\sqrt[3]{x})'}^{(f^{-1})'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{3(\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{f^{-1}(x)})^2} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}. \square$$

Seja $f : D \to \mathbb{R}$. Dizemos que f tem um máximo (mínimo) local no ponto $d \in D$ se existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leqslant f(d)$ $(f(x) \geqslant f(d))$ para todo $x \in D$, $|x - d| < \delta$. Quando a desigualdade é estrita dizemos que f tem um máximo (mínimo) local estrito. Os máximos e mínimos locais serão chamados de valores extremos e os pontos onde a função assume valores máximos ou mínimos serão chamados de pontos de máximo ou de mínimo.

Segue diretamente da definição de derivada (derivada à direita) que:

- Se $f : D \to \mathbb{R}$ é não-decrescente (não-crescente) e é diferenciável em um ponto $d \in D$ então, $f'(d) \geqslant 0$ ($f'(d) \leqslant 0$). Vale o mesmo resultado para funções diferenciáveis à direita.

- Se $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável à direita (esquerda) em um ponto $d \in D$ e $f'(d^+) > 0$ ($f'(d^-) > 0$) então existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $x \in (d, d+\delta)$ ($x \in (d-\delta, d)$) implica $f(x) > f(d)$ ($f(x) < f(d)$).

- Se $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável à direita (esquerda) em um ponto $d \in D$ e $f'(d^+) < 0$ ($f'(d^-) < 0$) então existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $x \in (d, d+\delta)$ ($x \in (d-\delta, d)$) implica $f(x) < f(d)$ ($f(x) > f(d)$).

• Se $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $d \in D$, d é ponto de acumulação a direita e a esquerda e $f'(d) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $d - \delta < x < d < y < d + \delta \Rightarrow f(x) < f(d) < f(y)$.

• Se $f : D \to \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $d \in D$, d é um ponto de acumulação a direita e a esquerda e f tem um valor extremo local em d então e $f'(d) = 0$.

Funções deriváveis em intervalos

Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $f' : I \to \mathbb{R}$ for contínua diremos que f é continuamente diferenciável em I ou simplesmente f é de classe C^1 em I.

Existe função diferenciável em um intervalo I que não é continuamente diferenciável

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Então f é differenciavel e f' não é contínua em $x = 0$.

A derivada tem a propriedade do valor intermediário

Teorema (Darboux)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é diferenciável com $f'(a) \neq f'(b)$ então, para todo C entre $f'(a)$ e $f'(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = C$.

Prova: Suponha que $f'(a) < 0 < f'(b)$. Segue que, para x próximo a a em $[a, b]$, $f(x) < f(a)$ e para x próximo a b em $[a, b]$, $f(x) < f(b)$. Logo, o ponto de mínimo (que existe pelo Teorema de Weierstrass) c de f ocorre em (a, b) e portanto $f'(c) = 0$. Para o caso geral consideramos

- Se $f'(a) < C < f'(b)$, $g(x) = f(x) - C \cdot x$.
- Se $f'(a) > C > f'(b)$, $g(x) = C \cdot x - f(x)$.

A derivada não tem descontinuidades de primeira espécie

Teorema

Se I é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável então f' não tem descontinuidades de primeira espécie.

Prova: Se a é um ponto de acumulação à direita de I e $L^+ = \lim_{x \to a^+} f'(x)$ existe, mostremos que $L^+ = f'(a)$.

De modo análogo (exercício), se a é um ponto de acumulação à esquerda de I e $L^- = \lim_{x \to a^-} f'(x)$ existe, mostre que $f'(a) = L^-$.

Se $L^+ > f'(a)$ e $C \in (f'(a), L^+)$ existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) > C$ para todo $x \in (a, a+\delta)$. Escolhendo $b \in (a, a+\delta)$ temos que $f'(b) > C > f'(a)$ o que está em contradição com o Teorema de Darboux pois este implica a existência de $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = C$. Logo, $f'(a) \geq L^+$.

Se $f'(a) > L^+$ e $C \in (L^+, f'(a))$ existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) < C$ para todo $x \in (a, a+\delta)$. Escolhendo $b \in (a, a+\delta)$ temos que $f'(b) < C < f'(a)$ o que está em contradição com o Teorema de Darboux pois este implica a existência de $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = C$. Logo, $f'(a) \leq L^+$. Segue que $L^+ = f'(a)$. $\square$

Teorema

Se $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \leq 0$ ($D^+f(x) \geq 0$) para todo $x \in [a, b)$ e $f(a) = 0$ então $f(x) \leq 0$ ($f(x) \geq 0$) em $[a, b)$.

Prova: Suponha primeiramente que $D^+f(x) < 0$ para todo $x \in [a, b)$. Se o resultado é falso, existe ao menos um $x \in (a, b)$ tal que $f(x) > 0$. Seja $x_0 = \inf\{x \in (a, b) : f(x) > 0\}$.

Da continuidade de f, $f(x_0) = 0$ e da definição de x_0 existe uma seqüência $x_n \in (x_0, b)$ tal que $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. Assim

$$D^+f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geqslant 0$$

o que é uma contradição. Logo, $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b)$.

Agora consideramos o caso geral $D^+f(x) \leqslant 0$ para todo $x \in [a, b)$. Neste caso consideramos a função auxiliar $f_\epsilon(x) = f(x) - \epsilon(x - a)$ e temos que $f_\epsilon(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b)$ e para todo $\epsilon > 0$.

Sendo assim $f(x) \leq \epsilon(x - a)$, para todo $x \in [a, b)$ e $\epsilon > 0$. Disto segue que para todo $x \in [a, b)$, $f(x) \leq 0$.

O caso restande será deixado como exercício.$\square$

A hipótese de continuidade não pode ser retirada como estabelece o exercício abaixo.

Exercício

Encontre uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é diferenciável à direita, tal que $D^+f(x) < 0$ para todo $x \neq 0$, $D^+f(0) = 0$, f é positiva para $x > 0$ e negativa para $x < 0$ ($f(x) \overset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$).

Corolário

Se $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b)$ então f é não-crescente em $[a, b)$.

Prova: Se $a \leq c < d < b$ seja $g : [c, b) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - f(c)$ e $D^+g(x) \leq 0$ para todo $x \in [c, b)$. Segue do teorema que $g(x) \leq 0$ para todo $x \in [c, b)$. Em particular $g(d) = f(d) - f(c) \leq 0$. $\square$

Corolário

Se $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b)$ então f é não-decrescente em $[a, b)$.

Prova: Exercício.

Exercício

Enuncie e prove resultados semelhantes aos anteriores para a derivada à esquerda.