

Continuidade Uniforme Descontinuidades Aula 20

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

08 de Maio de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Continuidade e Abertos

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset A$ diremos que B é aberto em A se para cada $b \in B$ existe um $r_b > 0$ tal que $A \cap (b - r_b, b + r_b) \subset B$.

Recorde que, se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, $f^{-1}(\mathcal{O}) = \{d \in D : f(d) \in \mathcal{O}\}$.

Teorema

Seja $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. A função f é contínua se, e somente se, para todo aberto \mathcal{O} de \mathbb{R} , $f^{-1}(\mathcal{O})$ é aberto em D .

Continuidade e conexos

Teorema

Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua então $f(I)$ é um intervalo.

Continuidade e Compactos

Teorema

Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua então $f(K)$ é compacto.

Teorema (Weierstrass)

Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto e $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, existem $x_1, x_2 \in K$ tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in K$.

Teorema

Se $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e injetiva e $C = f(K)$ então $f^{-1} : C \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

Teorema

Se I é um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e injetiva então f é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Prova: Sejam $a, b, c \in I$ com $a < b < c$. O resultado segue mostrando que ou $f(a) < f(b) < f(c)$ ou $f(a) > f(b) > f(c)$. Provaremos isto usando o Teorema do Valor Intermediário.

$f(a) < f(c)$: Se $f(b) < f(a)$ existe $d \in (b, c)$ tal que $f(d) = f(a)$ e se $f(b) > f(c)$ existe $d \in (a, b)$ tal que $f(d) = f(c)$. Em qualquer dos casos isto contradiz a injetividade. Logo $f(a) < f(b) < f(c)$.

$f(a) > f(c)$: Se $f(b) > f(a)$ existe $d \in (b, c)$ tal que $f(d) = f(a)$ e se $f(b) < f(c)$ existe $d \in (a, b)$ tal que $f(d) = f(c)$. Em qualquer dos casos isto contradiz a injetividade. Logo $f(a) > f(b) > f(c)$. \square

Teorema

Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que, dado $\epsilon > 0$ existe função contínua $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|g(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in D$, então f é contínua.

Prova: Seja $d \in D$, $\epsilon > 0$ e $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $|f(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{3}$, $\forall x \in D$. Como g é contínua em d , existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $|x - d| < \delta$ implica $|g(x) - g(d)| < \frac{\epsilon}{3}$. Logo, $x \in D$, $|x - d| < \delta$ implica

$$|f(x) - f(d)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(d)| + |g(d) - f(d)| < \epsilon. \square$$

Continuidade Uniforme

Definição (Continuidade Uniforme)

Se $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, dizemos que f é uniformemente contínua se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in D$, $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Note que:

- Nem toda função contínua é uniformemente contínua.

Exemplo: $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ não é uniformemente contínua em $(0, \infty)$ mas é uniformemente contínua em $[r, \infty)$ para qualquer $r > 0$.

- Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que existem constantes $C > 0$ e $\theta \in (0, 1]$ tais que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\theta$, $\forall x, y \in D$. É fácil ver que f é uniformemente contínua. Dizemos que f é Hölder contínua se $\theta \in (0, 1)$ e Lipschitz contínua se $\theta = 1$.

Exemplo: $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ é Hölder contínua com expoente $\theta = \frac{1}{2}$.

Teorema

Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua então f leva seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy.

De fato: Seja $\{x_n\}$ uma seqüência de Cauchy em D (note que o limite desta seqüência não precisa estar em D). Da continuidade uniforme, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $x, y \in D$ e $|x - y| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \delta$ para todo $n, m \geq N$. Segue que $|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$, para todo $n, m \geq N$. Isto mostra que $\{f(x_n)\}$ é de Cauchy. \square

Corolário

Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua então para cada ponto de acumulação d' de D existe o limite $\lim_{x \rightarrow d'} f(x)$.

Teorema

Se $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ é compacto e $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.

Prova: Dado $\epsilon > 0$ e $\kappa \in \mathcal{K}$, existe $\delta_\kappa > 0$ tal que, se $x \in \mathcal{K}$ e $x \in (\kappa - 2\delta_\kappa, \kappa + 2\delta_\kappa)$ então $|f(x) - f(\kappa)| < \frac{\epsilon}{2}$. Se $I_\kappa := (\kappa - \delta_\kappa, \kappa + \delta_\kappa)$, como $\cup_{\kappa \in \mathcal{K}} I_\kappa \supset \mathcal{K}$ e \mathcal{K} é compacto existem $n \in \mathbb{N}^*$ e $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ tais que $\cup_{i=1}^n I_{\kappa_i} \supset \mathcal{K}$. Seja $\delta = \min\{\delta_{\kappa_1}, \dots, \delta_{\kappa_n}\}$.

Logo, se $\kappa, x \in \mathcal{K}$ e $|\kappa - x| < \delta$ então, $\kappa \in I_{\kappa_i}$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$ e $|\kappa - \kappa_i| < \delta_{\kappa_i}$ e $|x - \kappa_i| \leq |x - \kappa| + |\kappa - \kappa_i| < 2\delta_i$. Desta forma $|f(\kappa) - f(\kappa_i)| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|f(x) - f(\kappa_i)| < \frac{\epsilon}{2}$. Da desigualdade triangular temos $|f(\kappa) - f(x)| < \epsilon$. \square

Teorema

Toda função uniformemente contínua $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ admite uma única extensão contínua a D^- . Esta extensão é uniformemente contínua.

Prova: Se $x \in D$ defina $\bar{f}(x) = f(x)$ e se d' é ponto de acumulação de D que não pertence a D defina $\bar{f}(d') = \lim_{x \rightarrow d'} f(x)$. Mostremos que \bar{f} é uniformemente contínua.

Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in D, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Agora, se $\bar{x}, \bar{y} \in D^-, |\bar{x} - \bar{y}| < \delta, \{x_n\}, \{y_n\}$ são seqüências em $D, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}$ e $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{y}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - y_n| < \delta, \forall n \geq N$.

Logo, $|f(x_n) - f(y_n)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall n \geq N$ e, passando o limite, $|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{y})| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Qualquer outra extensão contínua coincide com f em D e portanto nos pontos de acumulação de D que não pertencem a D . \square

Descontinuidades

Definição

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Um ponto de descontinuidade ou uma descontinuidade da função f é um ponto $d \in D$ no qual f não é contínua. É claro que descontinuidades são pontos de acumulação de D .

Uma descontinuidade d é de primeira espécie se o limite $\lim_{x \rightarrow d^+} f(x)$ (se d é um ponto de acumulação à direita) existe e o limite $\lim_{x \rightarrow d^-} f(x)$ (se d é um ponto de acumulação à esquerda) existe.

Uma descontinuidade que não é de primeira espécie é de segunda espécie.

Escreveremos $f(d^\pm) = \lim_{x \rightarrow d^\pm} f(x)$ quando o limite existir.

Teorema

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona.

- 1) f não admite descontinuidades de segunda espécie.
- 2) Se $f(D)$ é denso em algum intervalo I , então f é contínua.

Prova: 1) Dado $d \in D$, como f é monótona, $\lim_{x \rightarrow d^+} f(x)$ (se d é ponto de acumulação à direita) existe e $\lim_{x \rightarrow d^-} f(x)$ (se d é ponto de acumulação à esquerda) existe.

2) Se f é não-decrescente e $f(d^+) \neq f(d^-)$ e para todo $x \in D$, $x > d$, $f(x) \geq f(d^+)$ e para todo $x \in D$, $x < d$, $f(x) \leq f(d^-)$ logo $I \supset [f(d^-), f(d^+)]$ e ou $(f(d^-), f(d))$ ou $(f(d), f(d^+))$ é um intervalo aberto e não vazio que não contém pontos de D contradizendo a densidade de D em I . Segue que $f(d^+) = f(d^-)$ e f é contínua em d . O caso f não-crescente é análogo. \square

Teorema

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujas descontinuidades são todas de primeira espécie o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável. Em particular, se f é monótona o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável.

Prova: Seja $\sigma(x) = \max\{|f(x) - f(x^-)|, |f(x) - f(x^+)|\}$, $x \in D$. O conjunto das descontinuidade de f é $S = \{x \in D : \sigma(x) > 0\}$. Se $S_n = \{x \in D : \sigma(x) > \frac{1}{n}\}$, $S = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$.

Mostremos que os pontos de S_n são todos isolados.

Seja $s \in S_n$. Se s é um ponto de acumulação à direita de D . Da definição de $f(s^+)$, dado $n \in \mathbb{N}^*$ existe $\delta > 0$ tal que $s < x < s + \delta$, $x \in D$, implica $f(s^+) - \frac{1}{4n} < f(x) < f(s^+) + \frac{1}{4n}$. Logo, para cada $x \in (s, s + \delta) \cap D$, $\sigma(x) \leq \frac{1}{2n}$.

Semelhantemente, se s é um ponto de acumulação à esquerda de D , existe $\delta > 0$ tal que $\sigma(x) \leq \frac{1}{2n}$, para cada $x \in (s - \delta, s) \cap D$. Segue que s é um ponto isolado de S_n .

Disto segue que S_n é enumerável e portanto S é enumerável. \square