

Coberturas e Compactos

Continuidade: Abertos, Conexos e Compactos

Aula 19

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

05 de Maio de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Coberturas e Compactos

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ e Λ um conjunto, uma coleção $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de conjuntos é chamada uma **cobertura de A** se $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$.

Se $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma cobertura e $\Lambda' \subset \Lambda$ e $A \subset \bigcup_{\lambda' \in \Lambda'} \mathcal{A}_{\lambda'}$, $\{\mathcal{A}_{\lambda'}\}_{\lambda' \in \Lambda'}$ é dita uma **subcobertura da cobertura** $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Se os conjuntos da cobertura são todos abertos a cobertura é dita uma **cobertura aberta**.

Teorema (Borel-Lebsegue)

Dada uma cobertura $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de $[a, b]$ onde cada I_λ é um intervalo aberto existe $\Lambda' \subset \Lambda$ finito tal que $[a, b] \subset \cup_{\lambda' \in \Lambda'} I_{\lambda'}$.

Prova: Seja $A = \{x \in [a, b] : \text{existe } \Lambda' \subset \Lambda \text{ finito com } [a, x] \subset \cup_{\lambda' \in \Lambda'} I_{\lambda'}\}$.
É claro que $A \neq \emptyset$. Seja $s = \sup A$. É claro que $s \in [a, b]$ e que existe λ_s tal que $s \in I_{\lambda_s}$. Como I_{λ_s} é aberto $I_{\lambda_s} \cap A \neq \emptyset$. Segue que $s = b$ e que $[a, b]$ está contido em uma união finita de I_{λ} 's. \square

Corolário

Dada uma cobertura aberta $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de $[a, b]$ existe $\Lambda' \subset \Lambda$ finito tal que $[a, b] \subset \cup_{\lambda' \in \Lambda'} A_{\lambda'}$.

Basta lembrar que cada aberto da cobertura pode ser escrito como união enumerável de intervalos abertos (disjuntos).

Corolário

Dada uma cobertura aberta $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de um conjunto fechado e limitado F existe $\Lambda' \subset \Lambda$ finito tal que $F \subset \cup_{\lambda' \in \Lambda'} A_{\lambda'}$.

De fato: Como F é fechado e limitado $F \subset [a, b]$. Como $A = F^c$ é aberto e $[a, b] \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \cup A$ temos que existe $\Lambda' \subset \Lambda$ finito tal que

$$[a, b] \subset \cup_{\lambda' \in \Lambda'} A_{\lambda'} \cup A \text{ e } F \subset \cup_{\lambda' \in \Lambda'} A_{\lambda'}. \square$$

Teorema

Dado $K \subset \mathbb{R}$ são equivalentes:

- 1) K é fechado e limitado.*
- 2) Toda cobertura aberta de K possui uma subcobertura finita.*
- 3) Todo subconjunto infinito de K possui um ponto de acumulação pertencente a K .*
- 4) Toda seqüência de pontos de K possui uma subsequência que converge para um ponto de K .*

Prova:

- 1) \Rightarrow 2): Segue diretamente do corolário anterior.
- 2) \Rightarrow 3): Se $A \subset K$ é infinito e não tem pontos de acumulação em K , para cada $k \in K$ existe $I_k = r_k > 0$ tal que $(k - r_k, k + r_k) \cap A = \{k\}$ ou $I_k \cap A = \emptyset$. Segue que $\cup_{k \in K} I_k \supset K$ é uma cobertura aberta sem subcobertura finita.
- 3) \Rightarrow 4): Dada uma seqüência de pontos $\{k_n\}$ em K ela pode ter um número finito ou infinito de valores. Em qualquer dos casos possui uma subsequência convergente.
- 4) \Rightarrow 1): É claro que K é limitado pois caso contrário existiria uma seqüência $\{x_n\}$ em K com $x_0 \in K$ e $|x_n| \geq |x_{n-1}| + 1$ e esta não teria subsequência convergente. Para ver que K é fechado simplesmente note que se $x \in K^-$ existe seqüência $x_n \in K$ tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, de 4), $x \in K$. \square

Definição

Um conjunto é compacto se é satisfaz uma das condições do teorema anterior.

Corolário (Teorema de Bolzrado-Weierstrass)

Todo conjunto infinito e limitado de números reais possui um ponto de acumulação.

Corolário

Toda seqüência decrescente de compactos não-vazios tem interseção não vazia.

Continuidade e Abertos

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset A$ diremos que B é aberto em A se para cada $b \in B$ existe um $r_b > 0$ tal que $A \cap (b - r_b, b + r_b) \subset B$.

Note que.

- Todo conjunto é aberto nele mesmo.
- Se $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset A$, B é aberto em A se, e somente se, existe um aberto \mathcal{O}_B de \mathbb{R} tal que $B = \mathcal{O}_B \cap A$.
- Se A é aberto, $B \subset A$ é aberto em A se, e somente se, B é aberto em \mathbb{R} .

Recorde que, se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, $f^{-1}(\mathcal{O}) = \{d \in D : f(d) \in \mathcal{O}\}$.

Teorema

Seja $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. A função f é contínua se, e somente se, para todo aberto \mathcal{O} de \mathbb{R} , $f^{-1}(\mathcal{O})$ é aberto em D .

Prova: Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, \mathcal{O} é um aberto de \mathbb{R} e $d \in f^{-1}(\mathcal{O})$, então $f(d) \in \mathcal{O}$ e dado $\epsilon > 0$ tal que $(f(d) - \epsilon, f(d) + \epsilon) \subset \mathcal{O}$, existe $\delta > 0$ tal que $f((d - \delta, d + \delta) \cap D) \subset (f(d) - \epsilon, f(d) + \epsilon)$. Isto mostra que $(d - \delta, d + \delta) \cap D \subset f^{-1}(\mathcal{O})$ e que $f^{-1}(\mathcal{O})$ é aberto em D .

Por outro lado de $f^{-1}(\mathcal{O})$ é aberto em D para dada \mathcal{O} aberto em \mathbb{R} , se $d \in D$, dado $\epsilon > 0$ seja $\mathcal{O} = (f(d) - \epsilon, f(d) + \epsilon)$. Como $d \in f^{-1}((f(d) - \epsilon, f(d) + \epsilon))$ que é aberto em D existe $\delta > 0$ tal que $(d - \delta, d + \delta) \cap D \subset f^{-1}((f(d) - \epsilon, f(d) + \epsilon))$, ou seja

$$x \in D, |x - d| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(d)| < \epsilon.$$

e f é contínua em d . \square

Continuidade e conexos

Teorema

Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua então $f(I)$ é um intervalo.

Prova: Basta notar que, dados dois pontos $f(a) \neq f(b)$ em $f(I)$ com $a < b$, tomando a restrição de f ao intervalo $[a, b]$, do teorema do valor intermediário, para todo k entre $f(a)$ e $f(b)$ existe um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$, ou seja $f(I)$ é um intervalo. \square

Continuidade e Compactos

Teorema

Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua então $f(K)$ é compacto.

Prova: Seja $\{\mathcal{O}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ uma cobertura aberta de $f(K)$. Como, para cada $\lambda \in \Lambda$, $f^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)$ é aberto em K existe U_λ aberto em \mathbb{R} tal que $U_\lambda \cap K = f^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)$. Assim $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é uma cobertura aberta de K . Como K é compacto, existe $\Lambda' \subset \Lambda$ finito tal que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda \supset K$. Segue que $\{\mathcal{O}_{\lambda'} : \lambda' \in \Lambda'\}$ é uma subcobertura finita da cobertura $\{\mathcal{O}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de $f(K)$. Isto mostra que $f(K)$ é compacto. \square

Outra Prova: Seja $\{y_n\}$ uma seqüência em $f(K)$. Então existe seqüência $\{x_n\}$ em K tal que $y_n = f(x_n)$. Como K é compacto, $\{x_n\}$ tem uma subseqüência $\{x_{\phi(n)}\}$ ($\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estritamente crescente) convergente com limite $\bar{x} \in K$. Como $x_{\phi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}$, $y_{\phi(n)} = f(x_{\phi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\bar{x})$ e $\{y_n\}$ tem uma subseqüência convergente com limite em $f(K)$. Logo, $f(K)$ é compacto. \square

Teorema (Weierstrass)

Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto e $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, existem $x_1, x_2 \in K$ tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in K$.

De fato: Como $f(K)$ é compacto, $L = \sup\{y : y \in f(K)\}$ e $\ell = \inf\{y : y \in f(K)\}$ pertencem a $f(K)$. Logo, existem $x_1, x_2 \in K$ tais que $f(x_1) = \ell \leq f(x) \leq L = f(x_2)$, para todo $x \in K$. \square

Teorema

Se $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e injetiva e $C = f(K)$ então $f^{-1} : C \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

De fato: Se $C \ni c_n = f(k_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c = f(k) \in C$ então $\{k_n\}$ é uma seqüência em K e portanto tem uma subseqüência convergente com limite em K . Para qualquer $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estritamente crescente e tal que $\{k_{\phi(n)}\}$ é convergente com limite k_ϕ temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f(k_{\phi(n)})}_{=c_{\phi(n)}} = f(k_\phi) = c = f(k) \text{ e } k_\phi = k.$$

Logo, o conjunto dos valores de aderência da seqüência $\{k_n\}$ é o conjunto unitário $\{k\}$ e portanto $f^{-1}(c_n) = k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} k = f^{-1}(c)$. Isto mostra que $f^{-1} : C \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.