Abertos, Fechados, Compactos e Conexos
Aula 18

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

03 de Maio de 2023

Primeiro Semestre de 2023

Abertos, Fechados, Compactos e Conexos

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$*.*

1) *Um ponto* $a \in A$ *é interior a* A *se existe* $r > 0$ *tal que* $(a - r, a + r) \subset A$*.*

2) *O conjunto* A *é aberto se todos os seus pontos são interiores.*

3) *O conjunto* A *é fechado em* $\mathbb{R}$ *se seu complementar é aberto.*

4) *O interior* A^{o} *de* A *é o conjunto dos pontos interiores a* A*.*

5) *O fecho* A^{-} *de* A *é a interseção de todos os fechados que contém* A*.*

Teorema

Seja Λ um conjunto e $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de conjuntos.

1) *Se cada A_λ é aberto, $\cup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ é aberto.*
2) *Se cada A_λ é aberto e Λ é um conjunto finito, $\cap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ é aberto.*
3) *Se cada A_λ é fechado, $\cap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ é fechado.*
4) *Se cada A_λ é fechado e Λ é um conjunto finito, $\cup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ é fechado.*

Exemplo

Todo intervalo aberto é aberto. O interior de $[a,b]$ é (a,b). O interior A^{o} de A é o maior aberto contido em A. O fecho de A é o menor fechado que contém A.

Teorema

Todo subconjunto aberto A de $\mathbb{R}$ se exprime, de maneira única, como união enumerável de intervalos abertos disjuntos

Prova: Primeiramente note que se Λ é um conjunto, para cada λ, $I_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda)$ é um intervalo e $p \in \cap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ então $\cup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = (a, b)$ onde $a = \inf_{\lambda\in\Lambda}$ e $b = \sup_{\lambda\in\Lambda}$. De fato, é claro que $\cup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subset (a, b)$. Para provar a outra inclusão note que $p \in (a, b)$ e se $x \in (a, b)$, ou $x \leq p$ ou $x > p$. Agora,

se $x \leq p$, do fato que $a = \inf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda < x$, existe $\mu_1 \in \Lambda$ tal que $a_{\mu_1} < x \leq p < b_{\mu_1}$.

se $x > p$, do fato que $b = \sup_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda > x$, existe $\mu_2 \in \Lambda$ tal que $a_{\mu_2} < p < x < b_{\mu_2}$.

Em qualquer dos casos $x \in \cup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$.

Para o restante da prova, dado $x \in A$ seja I_x a união de todos os intervalos abertos contidos em A e que contém x. Segue que

1) $I_x = (a_x, b_x) \subset A$,
2) se $x, y \in A$, ou $I_x \cap I_y = I_x = I_y$ ou $I_x \cap I_y = \varnothing$ e
3) $\cup_{x \in A} I_x = A$.

Tomando, para cada intervalo desta decomposição um único racional vemos que A pode ser escrito como união enumerável de intervalos disjuntos. Para ver que esta decomposição é única basta notar que cada intervalo aberto de uma tal decomposição está contido em algum dos I_x e não pode ser distinto de I_x. $\square$

Corolário

Se I é um intervalo aberto e $I = A \cup B$ onde A e B são conjuntos abertos e disjuntos então um deses conjuntos é vazio.

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um ponto $p \in \mathbb{R}$ é aderente a A se existir seqüência $\{x_n\}$ em A tal que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$.

Sabemos que se p é ponto de acumulação de A então p é aderente a A. Se p é aderente a A e p não é ponto de acumulação de A então $p \in A$. Todo ponto interior a A é aderente a A e é um ponto de acumulação de A.

Teorema

Um ponto $p \in \mathbb{R}$ é aderente a A se, e só se, $A \cap (p-\epsilon, p+\epsilon) \neq \varnothing$ para todo $\epsilon > 0$.

Corolário

Se $A \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente (inferiormente) então $\sup A$ ($\inf A$) é aderente a A.

Teorema

O fecho A^- de $A \subset \mathbb{R}$ é o conjunto $\tilde{A}$ dos pontos aderentes de A.

Prova: De fato, se $x \notin \tilde{A}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap A = \varnothing$ segue que $\tilde{A}$ é fechado e $A^- \subset \tilde{A}$. Se $x \notin A^-$ existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap A = \varnothing$ e $x \notin \tilde{A}$. $\square$

Definição

Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ com $A \subset B$. Diremos que A é denso em B se $B \subset A^-$

Teorema

Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ com $A \subset B$. São equivalentes

- *Todo ponto de B é aderente a A.*
- *Todo ponto de B é limite de uma seqüência de pontos de A.*
- *Para todo $\epsilon > 0$ e $b \in B$ $(b - \epsilon, b + \epsilon) \cap A \neq \varnothing$.*

Teorema

Todo subconjunto B de $\mathbb{R}$ contém um subconjunto A que é enumerável e denso em B.

Prova: Dado $n \in \mathbb{N}^*$ temos que $\mathbb{R} = \displaystyle\bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$. Para cada $p \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$ escolha $x_{np} \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right) \cap B$ quando esta interseção for não vazia. O conjunto A desses pontos é claramente denso em B (para cada $n \in \mathbb{N}^*$ e $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $|a - b| < \frac{1}{n}$) e é enumerável (a coleção de intervalos $\left\{\left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right) : p \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N}^*\right\}$ é enumerável).$\square$

Teorema

Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado, não vazio e sem pontos isolados. Então F é não enumerável.

Prova: Sejam $x, y \in F$ distintos, $r = |x-y|/2$ e $\tilde{F}_y = F \cap (x-r, x+r)$. Segue que $\tilde{F}_y$ é não vazio e não contém pontos isolados. Seja F_y a união de $\tilde{F}_y$ com os pontos de acumulação de $\tilde{F}_y$ no conjunto $\{x-r, x+r\}$. F_y é claramente fechado e não tem pontos isolados, é limitado e $y \notin F$.

Se $F \supset \{y_1, y_2, y_3, \cdots\}$ seja F_{y_1}. Tendo escolhido $F_{y_1}, \cdots F_{y_{n-1}}$, se $y_n \notin F_{y_{n-1}}$ escolhemos $F_{y_n} = F_{y_{n-1}}$ e se $y_n \in F_{y_{n-1}}$ escolhemos F_{y_n} fechado e sem pontos isolados tal que $y_n \notin F_{y_n} \subset F_{y_{n-1}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $x_n \in F_{y_n}$. A seqüência $\{x_n\}$ é limitada e portanto tem uma subseqüência $\{x_{\phi(n)}\}$ convergente com limite $\bar{x}$. É claro que $\bar{x} \in \cap_{n\in\mathbb{N}} F_{y_n}$ e $\bar{x} \neq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.$\square$